

南華大學九十三年學年度 博士班 招生考試試題卷

系所別：管理科學研究所

科目編號：C1-02-01

科目：統計學 【本科目不得使用計算機】

試題紙第 1 頁共 2 頁

※每題均須詳述解題過程，否則不予計分，解題可參考附表及公式

一、若 X_1, X_2, \dots, X_n 係由常態分配 $N(\mu, \sigma^2)$ 所抽出之一組大小為 n 之隨機樣本。

$$\text{令 } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}, \quad \text{則}$$

\bar{x} 與 S^2 相互獨立，若令 $W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ ，試證 W 之分配為自由度 $n-1$ 之卡方分配。(15分)

二、若 X_1, X_2, \dots, X_n 係由常態分配 $N(\mu, \sigma^2)$ 所抽出之一組大小為 n 之隨機樣本。

$$\text{令 } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1},$$

(1) 利用第一題得到的結果，證明 S^2 為 σ^2 之不偏估計量。(5分)

(2) 證明樣本標準差 S 不是 σ 之不偏估計量，並求出 σ 之不偏估計量與 S 的關係。(15分)

三、設 X_1, X_2, \dots, X_n 係由具有 pdf 為 $f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}$ ， $0 < x < 1$ ， $0 < \theta < \infty$ 所抽出之一組大小為 n 之隨機樣本。

(1) 求出 θ 之最大概度估計量 $\hat{\theta}$ 。(10分)

(2) 求出 $\hat{\theta}$ 之變異數。(10分)

四、若給定母體平均數為 100，母體變異數為 36，且假設母體為常態分配，今藉由一組由均勻分配 $U(0, 1)$ 所產生的隨機數列。

(1) 如何去模擬上述母體之觀測值？寫出詳細步驟(15分)

(2) 如何檢驗這些模擬觀測值是否吻合母體之分配(10分)

五、若 X_1, X_2, \dots, X_n 係由常態分配 $N(\mu, 64)$ 所抽出之一組大小為 n 之隨機樣本。

(1) 檢定 $H_0: \mu=80$ ， $H_1: \mu=76$ 之最佳棄卻域，試證其為

$$C = \{ (X_1, X_2, \dots, X_n) \mid \bar{X} \leq c \} \quad (10 \text{ 分})$$

(2) 試求 n 與臨界點 c 之值，使得 $\alpha=0.05$ ，且 $\beta=0.05$ (10分)

