南 華 大 學 企 業 管 理 系 管 理 科 學 碩 士 論 文

A THESIS FOR THE DEGREE OF MASTER BUSINESS ADMINISTRATION

MASTER PROGRAM IN MANAGEMENT SCIENCES

DEPARTMENT OF BUSINESS ADMINISTRATION

NANHUA UNIVERSITY

三階段訂單式生產最適控制模型之研究

A STUDY ON OPTIMAL CONTROL MODEL OF THREE-STAGE MAKE-TO-ORDER

指導教授： 黃國忠 博士

ADVISOR : KUO-CHUNG HUANG Ph.D.

研 究 生： 侯彥廷

GRADUATE STUDENT : YAN-TING HOU

中 華 民 國 九 十 九 年 六 月

南　華　大　學

企業管理系管理科學碩士班

碩 士 學 位 論 文

三階段訂單式生產最適控制模型之研究

研究生：侯彥廷

經考試合格特此證明

口試委員：褚麗絹

[illegible]

黃國忠

指導教授：黃國忠

系 主 任：[illegible]

口試日期：中華民國　九十九　年　六　月　十一　日

南華大學企業管理系管理科學碩士班

九十八學年度第二學期碩士論文摘要

論文題目：三階段訂單式生產最適控制模型之研究

研 究 生：侯彥廷　　　　　　　　　　指導教授：黃國忠　博士

論文摘要內容：

本研究主要探討各時點產能未受限制下之三個不同交貨日期的動態最佳化訂單式生產計畫模式，對於任何給定之訂單要求交貨數量與交貨日期之下，本研究試圖尋求可使得總成本為最小目標下之最佳生產計畫，其中所考慮的總成本函數包含生產作業成本以及存貨成本等二項目標成本函數。首先針對三階段訂單式生產問題的特性將研究問題建構為一個可具體討論的數學模式，其後利用動態最佳化方法之變分法，藉以尋求連續時間生產計畫之最佳解。最後，根據相關研究結果，歸納出一個三階段訂單式生產之最佳生產計畫的決策準則，以提供生產決策者在實務應用上之參考應用依據。

關鍵詞：尤拉方程式、變分法、角點條件

Title of Thesis：A Study on Optimal Control Model of Three-Stage Make-To-Order
Department：Master Program in Management Sciences, Department of Business Administration, Nanhua University
Graduate Date：June 2010 Degree Conferred： M.B.A.
Name of Student：Yan-Ting Hou Advisor：Kuo-Chung Huang Ph.D.

Abstract

This study for the given quantities and delivery dates, and considers the problem of production planning of make-to-order of three different delivery dates with unlimited production capacity at any point in time. The corresponding mathematical model is constructed, and the analytic method, the dynamic optimization technique of calculus of variations, is employed for solving the continuous time planning problem. We intend to achieve optimal production plan for which the total cost attains its minimum. Here the total cost under consideration is composed of production operating cost and inventory cost. According to the results obtained, the production decision procedure is also proposed as a working rule for practical applications.

Keywords：Euler equation, Calculus of variations, Corner condition

目 錄

表目錄

圖目錄

參數與函數之符號及意義

本研究所建構的數學模式，其中所使用的參數、決策變數及決策函數之符號、意義，介紹如下：

1. 參數

T_1： 三個不同交貨日期之第一期的交貨時點（假設決策者之相對的決策時點為$T_0 = 0$）；即第一期生產期間為$[0, T_1]$。

T_2： 三個不同交貨日期之第二期的交貨時點，且$T_2 > T_1$；即第二期生產期間為$[T_1, T_2]$。

T_3： 三個不同交貨日期之第三期的交貨時點，且$T_3 > T_2$；即第三期生產期間為$[T_2, T_3]$。

B_1： 生產者在時點T_1應交貨的貨品數量。

B_2： 生產者在時點T_2應交貨的貨品數量。

B_3： 生產者在時點T_3應交貨的貨品數量。

c_1： 單位時間內之單位貨品的生產速率的係數，其中$c_1 > 0$為常數。

c_2： 單位時間內之單位貨品的存貨成本（持有成本），其中$c_2 > 0$為常數。

2. 決策變數（函數）

$W(t)$： 時點t產能未受限制之三個不同交貨日期生產計畫的生產函數，它是模式（I）的決策函數，其中$W(t)$表示在時間區間$[0, t]$之累積生產量，且滿足$W(0) = 0$，$W(T_1) \ge B_1$，$W(T_2) \ge B_1 + B_2$，$W(T_3) = B_1 + B_2 + B_3$；$W'(t)$表示生產函數$W(t)$在時點t的生產速率，即在時點t之單位時間的生產量。

$w_1(t)$： 時點t產能未受限制之第一期生產計畫的生產函數，$w_1(t)$是模式（III）、（IV）、（V）的決策函數，其中$w_1(t)=W(t)$為定義在時間區間$[0,T_1]$之增函數。

$w_2(t)$： 時點t產能未受限制之第二期生產計畫的生產函數，$w_2(t)$是模式（III）、（IV）、（VI）的決策函數，其中$w_2(t)=W(t+T_1)-W(T_1)$為定義在時間區間$[0,T_2-T_1]$之增函數。

$w_3(t)$： 時點t產能未受限制之第三期生產計畫的生產函數，$w_3(t)$是模式（III）、（IV）、（VII）的決策函數，其中$w_3(t)=W(t+T_2)-W(T_2)$為定義在時間區間$[0,T_3-T_2]$之增函數。

t_{w_1}： 第一期生產函數$w_1(t)$之生產起始時點，t_{w_1}是模式（III）、（IV）、（V）的決策變數，其中$t_{w_1}=Max\{t \mid w_1(t)=0, t\in[0,T_1]\}$；即$w_1(t)=0$，$0\le t\le t_{w_1}$且$w_1(t)>0$，$t_{w_1}<t<T_1$。

t_{w_2}： 第二期生產函數$w_2(t)$之生產起始時點，t_{w_2}是模式（III）、（IV）、（VI）的決策變數，其中$t_{w_2}=Max\{t \mid w_2(t)=0, t\in[0,T_2-T_1]\}$；即$w_2(t)=0$，$0\le t\le t_{w_2}$且$w_2(t)>0$，$t_{w_2}<t<(T_2-T_1)$。

t_{w_3}： 第三期生產函數$w_3(t)$之生產起始時點，t_{w_3}是模式（III）、（IV）、（VII）的決策變數，其中$t_{w_3}=Max\{t \mid w_3(t)=0, t\in[0,T_3-T_2]\}$；即$w_3(t)=0$，$0\le t\le t_{w_3}$且$w_3(t)>0$，$t_{w_3}<t<(T_3-T_2)$。

a_1： 三個不同交貨日期生產計畫中，於第一交貨日期前必須額外生產的貨品數量，a_1是模式（II）的決策變數，且$W(T_1)=B_1+a_1$，亦即$w_1(T_1)=B_1+a_1$，其中$a_1\in[0,B_2]$；a_1^*為模式（II）之最佳解。

a_2： 三個不同交貨日期生產計畫中，於第二交貨日期前必須額外生

產的貨品數量，a_2 是模式（II）的決策變數，且 $W(T_2)=B_1+B_2+a_2$，亦即 $w_2(T_2-T_1)=B_2+a_2-a_1$、$w_3(T_3-T_2)=B_3-a_2$，其中 $a_2\in[0,B_3]$；a_2^* 為模式（II）之最佳解。

第一章 緒論

現實生活中在生產製品的過程裡，當產品規格型式在生產時為固定，生產者可以先行生產，並預先存放些許的基本存貨量，以因應緊急之需求；此種產品的生產線經常都是持續不斷的運作加以生產，並且生產者可以隨時接受顧客的訂單、隨時出貨、如存貨生產等。但是，有些產品的生產製造，其產品規格型式與數量必須完全依照顧客的訂單需求而加以規劃製作，此種類型產品的製程方法就是「訂單式生產(Make-to-Order)」：生產者依照顧客的訂單需求排訂製作即為訂單式生產，規劃產品的生產計畫，裡面包含產品規格型式、種類、交期、價格、數量等，以符合顧客的訂單需求。因此，訂單式生產裡並沒有預先生產與多生產的庫存建立，而是在顧客下訂單後，才依照其需求而開始設計規劃並製造顧客所需要的產品規格與所需數量。

1.1 研究動機

訂單式生產是一種依照顧客的訂單需求而製定的客製化生產方式，雖然顧客的需求無法事先預測，然而對於常被訂購且數量龐大的產品，生產者通常都會事先構建出一個生產系統；所建立訂單式生產系統的目標是在確保生產者能在訂單交貨期間內，有足夠的產品數量可以提供給顧客訂購。因為顧客的準確需求數量事先並不容易精準預測，而且訂單式生產系統的模式也非排定中生產排程的「一般訂單」；進而去影響到正常的生產排程，因此就會出現「緊急訂單（Rush Order）」的情形。

任何一個生產製程中的每一個時點，無論提供生產的資源可以充分供應或是受到上限限制，當生產決策者決定接下一個新訂單後，以及如

何決定該新訂單在生產期間內控制各時點的生產速率，為本篇論文的主要內容，其中生產速率含生產函數、生產起始時點、全產能生產起使時點及第一期交貨時要額外生產的數量。控制生產速率對於生產者而言是要增加公司之生產利潤或減低生產總成本，將是一個很重要的決策（Chen and Lan, 2001a, 2001b；Chen and Chu, 2003；Feichtinger and Harth, 1985）。生產速率控制的重要性在於；如果太早開始生產或生產速率過快，不但會浪費生產作業成本，同時將快速累積其存貨成本；因此，考慮生產作業成本與存貨成本因素，若過早開始生產或生產速率過快，都並非為最合適的決策。反之，如果太晚開始生產或生產速率過慢，就將無法在期限日交足產品數量而發生違約，這種損失不但包含因延遲交貨或被退貨所造成公司財務上的損失，會讓公司損失無形的商譽，並可能進而導致失去這些客戶之後的訂單。當生產期間內每一個時點的產能皆受到限制時，全產能生產（即產能利用率為百分之百）的起始時點亦是另外一個重要的決策點；此外，對三個不同交貨日期，於第一期交貨前必須額外生產多少數量，以應付第二期之所需，第二期交貨前必須額外生產多少數量，以應付第三期之所需，亦值得重視。就像 Soroush（1999）指出，能符合應交貨日期是現實世界中生產計畫管理實務是最重要的目標，也是公司贏得勝利的關鍵。

1.2 研究目的

假設在整個生產過程中，生產者所提供於生產使用的資源均能充分無限地供應，也就是考慮產能未受到限制的問題。此時，生產決策者必會毫無顧慮承接新訂單；在現實生活中生產實務運作上，對於某一種同型式的產品，顧客常常會有在一個訂單中註明多個不同的交貨數量及交

貨日期，或同時間有多個訂單而各有其不同的交貨數量及交貨日期。對於一個生產決策者，若能規劃出一個具體的最佳生產計畫，以同時完成此多個不同交貨狀況的訂單需求，則是一件相當重要的事。在過去的文獻中，如在 Chen and Lan（2001a；2001b）或 Grubbstrom and Wang（2003）工作中，不論是從廠房機器設備的可靠度或生產資源的可用性或多階段生產，或探討生產存貨系統的隨機模式多階段產能受限，全是針對單一交貨日期的生產計畫問題；然而，有關多個交貨日期之訂單式生產的議題，甚至顯少提到動態生產（Dynamic Production）之層面的理論探討，僅蔡福建(民 97)探討到二階段訂單式生產計畫最適控制模型，因此，本研究試圖推廣蔡福建(民 97)之二階段訂單式生產計畫最適控制模型，將從成本的構面，在各時點產能未受到限制的情況下，利用連續動態規劃的方式來建構三個不同交貨日期之訂單式生產計畫模式，並尋求模式的最佳解。

1.3 研究流程

本研究主要透過數學推導與資料模擬方式進行，數學推導方面主要是利用微積分（Calculus）、變分法（Calculus of　Variation）等數學運算技巧來對所建構的數學模型加以求解；資料模擬方面則是針對數個特殊狀況，分別進行範例分析。根據上述之內容，本論文主要探討內容分以下五章，第一章為緒論、第二章為文獻探討、第三章為模型建構、第四章為模式求解、第五章為結論與未來研究方向，本論文之研究流程如下圖所示：

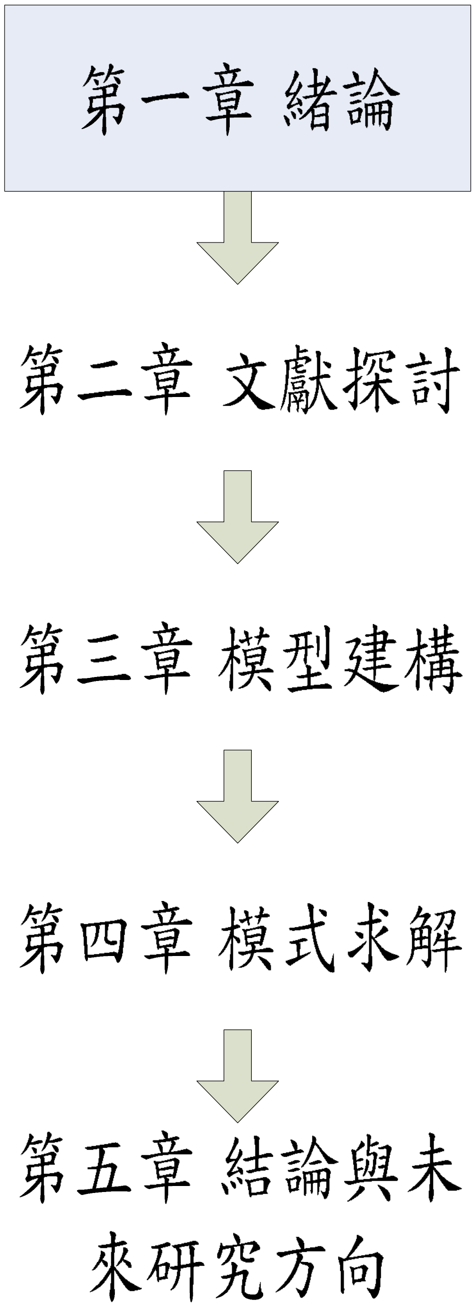

圖 1.1 本論文之研究流程

第二章 文獻探討

本篇研究討論訂單式生產所建構出的數學模式並求其最佳解，在本章節中透過 2.1 節訂單式生產及 2.2 節變分法的介紹，利用變分法尋求可使總成本為最小的連續時間最佳生產計畫，以提供給管理者作為生產實務上之參考。

2.1 訂單式生產

在生產製造過程中，經常會發生緊急訂單的情形，在訂單式生產系統中的生產者假如決定接受顧客下訂的新訂單並用插單的方式來進行生產製作，此種訂單總稱為緊急訂單（Rush Order）。陽念華（民 95）曾提過對於機械製造業而言，常見的排程方式多以最小到期日之派工法則為主，當實務上遇到緊急訂單時，所執行之重排程大多需要大幅更動原有排程之結果，而造成物料不足或生產過多之情形影響生產排程之管控；而洪柏璿（民 96）提出干擾性插單現象係指工廠生產時未能依照正常下單或是派工法則程序生產，而把某些訂單提前生產，改變機台原先已優化的作業製程。但在過去的文獻上，極少有關系統性的方法來解決其訂單分配與評估問題。突然出現的緊急訂單，通常會嚴重的對生產者原先已排定之生產排程產生影響；如，導致一般訂單的交貨日期上的延遲、導致機器負荷量太大的情形發生、導致存貨量的變化、導致人力資源需重新分配、以及導致對生產者整體商譽、信譽的影響等；因此，考量如何為企業創造最大利益，之後再來探討企業如何在獲取利潤的同時也能維持良好的企業商譽。對於訂單式生產的生產系統規劃及排定，是需要去重視的。由於訂單式生產所簽訂的交貨合約，往往使得生產者

須於未來約定時點交足一定產量給下單的客戶；因此，生產者為了讓新訂單可以如期交貨，就必須重新調整原可供生產的資源使用計畫。這樣便會影響打亂生產者原本的生產順序，進而發生有趕工與製程相互排擠等的情形，而這些情況在無形中將會導致生產作業成本的增加（Wu and Chen, 1996）；此外，一個訂單式生產的公司要與他人相互競爭且需在市場上佔有一席之地，必須要有前置準備時間上的優勢，並快速做出正確的決策。所以，對於訂單式生產，生產決策者必須事先設計出一個能使該生產過程的整體成本為最小（使得利潤為最大）並能準時交貨的最佳生產計畫，並擴大公司的生產利潤並吸引顧客來此下單，達到生產管理的目標。

由於生產者把生產廠房設備設置列為優先，產品生產計畫擺在之後，因此生產者一般都假設產能有上限。因為廠商在接受客戶下新訂單合約時，通常還會有些許仍在執行中的舊訂單生產合約；因此在未來新訂單執行生產計畫中在生產期間之各時點發揮最大產能（生產者在各時點使用所有可運用生產資源產出最大產量）型態是不為相同的。這表示生產者在某時點所能接下的新訂單交貨日期和數量上限也會有所不同，且使得新訂單最佳生產計畫所採行的方法也會不一樣。大多數之前相關研究文獻主要在於排程最佳化、接受訂單之成本分析來追求利潤最大化為目標，對生產者而言，考慮是否有能力接下一個新訂單時，是看未來生產期間內各時點之最大產能如何分配而定。在評估未來生產期間內每個時點可以充分提供生產資源時，才會考慮接下該訂單。訂單式生產系統中緊急訂單問題出現時處理方式多以追求利潤為目標，陳美棟（民 89）開發一套評估系統，提供決策者在短時間內做出緊急訂單是否承接的最佳決策；吳銘源（民 90）以找出最適當的緊急訂單比例作

為是否接單的決策參考。在過去的文獻中有提到使 Enterprise Resource Planning（ERP）系統，魏慶昌（民 94）使用模糊理論和層級分析法建構單一訂單接單與否即時評估分析模式；劉俊輝（民 96）考慮利潤最大化問題，應用禁忌搜尋法（Tabu Search Algorithm）探討如何決定價格、交貨日期與排程的決定，結果發現比起以往的研究更能獲得較佳之目標函數值。生產者在考慮是否接下該新訂單前，仍要面臨各類生產成本（或利潤）的事先評估問題。一旦生產者決定接下該新訂單後，生產者依然必須面臨該新訂單之最佳生產計畫的完成與控制問題。

現在的生產製造環境複雜多變化，企業大量生產製造產品不再是最終目標，而是要去瞭解顧客的消費需求（訂單交貨期日、產品價格、產品型式及產品品質）並使所需都得到滿足，進而才能獲利。近年來訂單式生產環境下，經常無法準確預測出顧客所需，就會發生緊急訂單或插單的情況。由於時代的改變；科技不斷的進步、所得相對提升，以致消費型態受到改變，消費者對產品所需也趨於多樣化（陳俊龍，民 86），訂單式生產以少量多變化的生產方式來滿足現今消費者的需求。在訂單式生產系統的研究中，當廠商接到此訂單時已超過現在排定有效的預定主生產排程，有可能需要中斷或改變現有既定之生產計畫，然後改成生產緊急訂單。劉明恩（民 84）認為生產製造現場之高度複雜性及動態，會造成所需生產之訂單數量通常無法如期交貨。因此，企業評估是否接下訂單；應考慮訂單是否能獲利、交貨期日等的影響，否則使得交貨日延期就會造成違約需付出更多的懲罰成本。此時考慮不接下訂單會是較好選擇（Kern & Guerrero, 1990; Mohebbi and Choobineh, 2005）。

陳舜源（民 84）曾提到決策者常常依據主觀的經驗判斷，造成工廠生產計畫經常改變造成生產線有所混亂的狀況發生。因此分別提出單

目標成本數學模式，利用混合整數規劃的方法，計算出因接下緊急訂單所造成生產計畫的變動，導致生產系統需要承擔額外付出的成本。接著提出一個多目標規劃數學模式，以成本差異作為評估的方式，探討是否接下緊急訂單的問題，由於運算時間呈現倍數成長，將違反即時性的需求。Wu and Chen（1996, 1997）以顧客的緊急訂單為立即需求，當廠商接到新訂單時已超過了現在排定有效的預期之主生產排程。這樣在一個動態的市場是常見的，在相關文獻中，卻很少討論對於願意接受這樣的訂單模式上的表示，因此生產緊急訂單所產生的成本用一個混合的整數規劃模型計算出，而讓決策者願意接受的成本模型；另一方面，多準則決策模型所發展出來的緊急訂單成本評估模式，計算出接下緊急訂單所需之成本價格，可使利潤最大化而成本支出最小化，並得以獲致訂價策略，由於問題相對複雜，亦容易違反即時性的需求。陳俊龍（民 86）則是利用接下緊急訂單所獲得之固定報酬及在製品存貨成本、完成品存貨成本及延遲交貨懲罰成本等成本項目，算出緊急訂單對訂單式生產系統所產生影響的成本與進行報酬比較，以提供決策者當作是否要接下緊急訂單的判斷及訂價的參考依據。

在一個以客製化為主的生產環境中，緊急訂單是否要接下還是使用插單生產等，經常在生產製造系統裡發生，因此當提出發生緊急訂單和物料短缺時，對於製造系統裡是必要重新安排生產排程。重新排程的方法能有效地處理現階段發生的緊急訂單的承接與插單生產等，使得生產製程更能順利進行。決策目標函數為既有工作和緊急訂單的平均製程工作時間之權重比例，緊急訂單的權重比原本的工作訂單大，此時在新排程裡應該把處理緊急訂單先行處理。因此，Jing et al.（2008）以螞蟻集群最佳化演算法（Ant Colony Optimization Algorithm）來解決重新排程

問題中可能會陷入局部最佳解的陷阱，因為在找尋排程最佳解時，所得解可能是落在某一個區域最佳解卻不是整體最佳解。陽念華（民 95）以限制規劃（Constraint Planning）、近代啟發式法（Modern of Heuristic），求解滿足顧客需求並使庫存成本最小化生產排程問題。

過去文章皆討論單一階層的生產系統對評估緊急訂單是否要接下的問題，但卻很少討論對有多階層級的供應鏈部分，詹璨嶸（民 92）提出了一個評估模式，特別針對當不再是單一工廠的問題時發生突發性需求變異，也必須考量是否影響到其他供應鏈成員已在執行的生產計劃，及可能對成本或損失增加的產生，因此從供應鏈的角度表現緊急訂單對供應鏈整體所造成的損益情形進而發展了一個數學模式。使用新、舊生產計劃資料相互比較方式，以供應鏈之損益來決定是否要接下緊急訂單。

2.2 變分法

變分法是研究泛函數極值問題的數學方法。早在十七世紀末，幾何學、力學等領域相繼提出了一些有關泛函數的極值問題，促使變分法的形成和發展迅速，近十幾年來作為現代控制理論中的最適控制理論，在工程技術和經濟管理等領域方面受到重視且廣泛的應用。

設 S 為一函數集合，若對於每一個函數 $w(t) \in S$ 有一個實數 J 與之對應，則稱 J 是定義在 S 上的泛函數，記作 $J[w(t)]$。S 稱為 J 的容許函數集。最簡單的一類泛函數可表示為 $J[w(t)] = \int_{t1}^{t2} F(t, w, w')dt$，其中被積函數 $F = F(t, w, w')$ 包含自變數 t 、未知函數 $w(t)$ 及導函數 $w'(t)$ 。泛函數 $J[w(t)]$ 在 $w^*(t) \in S$ 取得極小值，是指對於任意一個與 $w^*(t)$ 接近的

$w(t) \in S$ ，都有 $J[W(t)] \geq J[w^*(t)]$ 。

如同函數的微分是增量的線性部分一樣，泛函數的變分是泛函數增量的線性部分。作為泛函數的自變量，函數 $w(t)$ 在 $w^*(t)$ 的增量記作 $\delta w(t) = w(t) - w^*(t)$ 也稱函數的變分。由它引起的泛函數的增量記作 $\Delta J = J[w^*(t) + \delta w(t)] - J[w^*(t)]$ 。如果 ΔJ 可以表示為 $\Delta J = L[w_0(t), \delta w(t)] + \gamma[w_0(t), \delta w(t)]$ 其中 L 是 δw 的線性項，而 γ 是 δw 的高階項，則 L 稱為泛函數在 $w^*(t)$ 的變分，記作 $\delta J[w_0(t)]$ 。用變動的 $w(t)$ 代替 $w'(t)$ ，就有 $\delta J[w(t)]$ 。

泛函數變分的一個重要形式是它可以表示為對參數 α 的導函數：

$$\delta J[w(t)] = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[w(t)] + \alpha\delta[w(t)]|_{\alpha=0} \tag{2.1.1}$$

這是因為當變分存在時，增量

$$\Delta J = J[w(t) + \alpha\delta w] - J[w(t)] = L[w(t), \alpha\delta w] + \gamma[w(t), \alpha\delta w]$$

根據 L 和 γ 的性質有

$$L[w(t), \alpha\delta w] = \alpha L[w(t), \delta w]$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\gamma[w(t), \alpha\delta w]}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\gamma[w(t), \alpha\delta w]}{\alpha\delta w} \delta w = 0$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(w + \alpha\delta w)\,|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{J(w + \alpha\delta w) - J(w)}{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{L(w, \alpha\delta w) + \gamma(w, \alpha\delta w)}{\alpha} = L(w, \delta w) = \delta J(w)$$

利用變分法來表達(2.1.1)式可以得到泛函數極值與變分的關係：

若 $J[w(t)]$ 在 $w_0(t)$ 達到極值（極大或極小），則

$$\delta J[w^*(t)] = 0 \tag{2.1.2}$$

這是因為對任意給定的$\delta w, J(w^* + \alpha\delta w)$是變量$\delta$的函數，該函數在$\alpha = 0$處達到極值。根據函數極值的必要條件可知：

$\frac{\partial}{\partial\alpha} J(w_0 + \alpha\delta w)|_{\alpha=0} = 0$，於是由(2.1.1)式直接得到(2.1.2)式。討論最簡泛函數在固定端點條件下取得極值的必要條件。泛函數和端點條件表示為：

$$J[w(t)] = \int_{t1}^{t2} F[t, w(t), w'(t)]dt \tag{2.1.3}$$

$$w(t_1) = w_1,\ \ w(t_2) = w_2 \tag{2.1.4}$$

其中F具有二階連續偏導函數，容許函數集S為滿足(2.1.4)式的二階可微函數集合。

設泛函數(2.1.3)式在$w(t)$取得極值，$w(t)$滿足(2.1.4)式記$\varphi(t) = \delta w(t)$，滿足$\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$。按照泛函數極值與變分的關係(2.1.1)式、(2.1.2)式得

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} J[w(t) + \alpha\varphi(t)]|_{\alpha=0} = 0 \tag{2.1.5}$$

對於(2.1.3)式表示的$J[w(t) + \alpha\varphi(t)]$計算可得

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} J(w + \alpha\varphi)|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial\alpha} F(t, w + \alpha\varphi, w' + \alpha\varphi')|_{\alpha=0}\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} [F_w(t, w, w')\varphi + F_{w'}(t, w, w')\varphi']dt \tag{2.1.6}$$

對右端第二項作部分積分並利用$\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$得

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{w'}\varphi' dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F_{w'}\varphi\, dt$$

代入(2.1.6)式並根據(2.1.5)式有$\int_{t_1}^{t_2} (F_w - \frac{d}{dt} F_{w'})\varphi\, dt = 0$，因為$\varphi$是任意的，由理論可得到

$$F_w - \frac{d}{dt}F_{w'} = 0 \tag{2.1.7}$$

(2.1.7)式稱為尤拉方程式，且是$J[w(t)]$在$w(t)$取得極值的必要條件。雖然尤拉方程式的解只是泛函數達到極值的必要條件，但是正如解函數極值一樣，對於實際問題通常不用檢驗它是否滿足泛函數達到極小值的充分條件。因為極小值曲線一定存在，並滿足尤拉方程式，所以它的解就是極小值曲線。

以單階段訂單式生產為例，當生產者答應接下這一筆新訂單時，約定好在時點T要交足生產貨品數量B單位時；然後根據前面的符號及函數的定義與基本假設，可得到在時點t之生產作業成本及存貨成本分別為$c_1[w'(t)]^2$與$c_2 w(t)$，其中c_1和c_2是給定的非負常數；所以在時間區間$[t_w, T]$之總生產作業成本及總存貨成本分別為$\int_{t_W}^{T} c_1[w'(t)]^2 dt$及$\int_{t_w}^{T} c_2 w(t)dt$。因此，如何尋求函數$w$使得其所對應之總成本為最小且能如期交貨的數學模式，可表示如下：

$$\begin{cases} Min\int_0^T \{c_1[w'(t)]^2 + c_2 w(t)\}dt \\ s.t.\ w(0) = 0,\ w(T) = B,\ w'(t) \geq 0 \end{cases}$$

首先假設最佳解滿足非負條件$w'(t) \geq 0$，則這個限制條件$w'(t) \geq 0$是沒有約束力的。從$F_w = c_2$，$F_{w'} = 2c_1 w'$，尤拉方程式是$2c_1 w'' = c_2$，或

$$w''(t) = c_2 ／ c_1 \tag{2.1.8}$$

尤拉方程式$2c_1 w'' = c_2$有一種解釋，c_2為單位存貨成本，$c_1[w'(t)]^2$為總生產成本t，所以$2c_1 w'$是瞬間的邊際生產成本，和$2c_1 w''$是它的時間變化率。因此，尤拉方程式邊際成本變化率，邊際成本存貨成本要減低在時

間點T提供B單位生產產品。

計算(2.1.8)式對t之兩次積分後，可得$w(t)=c_2t^2／4c_1+k_1t+k_2$，其中$k_1$和$k_2$為積分常數。進一步利用邊界條件

$w(0)=0=k_2$, $w(T)=B=c_2T^2／4c_1+k_1t+k_2$

可得$k_1=B／T-c_2T／4c_1$, $k_2=0$，因此，

$$w(t)=c_2t(t-T)／4c_1+Bt／T,\ 0\le t\le T \quad (2.1.9)$$

我們檢查(2.1.9)式滿足$w'\ge 0$的條件，從(2.1.8)式可知$w''>0$，表示w'是一個遞增函數，因此，若$w'(0)=k_1=B／T-c_2T／4c_1\ge 0$，則對於所有的$t\ge 0$均可滿足$w'(t)\ge 0$，換言之，$w'(t)\ge 0$成立的條件為

$$B\ge c_2T^2／4c_1 \quad (2.1.10)$$

因此，當(2.1.10)式成立時，最佳生產函數為(2.1.9)式，且為立即生產。

假若(2.1.10)式不成立，則必為延後生產，$w'\ge 0$的限制條件必須優先滿足。因為可行解$w(t)$的生產時間起時點t_w會隨著可行解不同得到的解也會有所不同，所以由可行解邊界可移性條件(Transversality Condition)(Kamien & Schwartz, 1991, p.57)，可得到單階段生產模型之最佳解$w(t)$的生產起始點t_w必須滿足下列的條件：

$$w(t_w)=0 \quad (2.1.11)$$

由$w(t)=c_2t^2／4c_1+k_1t+k_2$，利用(2.1.11)式及$w(T)=B$，可以得到$w(t)=c_2t^2／4c_1+k_1t+k_2$中之兩個積分常數的解$k_1=-c_2t_w$及$k_2=2c_1B-\frac{c_2T^2}{2}+c_2t_wT$將此結果代入$w(t)=c_2t^2／4c_1+k_1t+k_2$，並利用$w(t_w)=0$，可以解得$t_w=T-2\sqrt{\frac{c_1B}{c_2}}>0$(即$B<\frac{c_2T^2}{4c_1}$)。此時$w(t)$可以表示如下：

$$w(t)=\frac{c_2}{4c_1}t^2-\frac{c_2t_w}{2c_1}+(B-\frac{c_2T^2}{4c_1}+\frac{c_2t_wT}{2c_1})\text{，}\forall t\in[t_w,T] \tag{2.1.12}$$

由(2.1.8)式知，$w'(t)$為t之嚴格增函數；再結合(2.1.11)式，知$w'(t)\geq w'(t_w)=0$，$\forall t\in[t_w,T]$。所以當$B<c_2T^2／4c_1$則為延後生產；反之$B\geq c_2T^2／4c_1$則為立即生產。

本研究考慮在給定訂單貨品數量與交貨日期的情況下，建構一個各時點產能未受限制之三個不同交貨日期的訂單式生產計畫數學模式，利用變分法尋求可使總成本為最小的連續時間最佳生產計畫，並歸納出一個決策準則提供給管理者在生產實務上之參考。

第三章 模型建構

假設生產者在接下三筆新訂單後，在未來的時點T_1、T_2、T_3須分別交貨數量B_1、B_2、B_3單位的製成品，其中T_1、T_2、T_3、B_1、B_2、B_3均為已知的參數。針對此三個不同交貨日期T_1、T_2及T_3之訂單式生產的生產計畫，生產決策者必須決定何時為生產起始時點、並以及使用何種的生產速率來從事生產，且第一期交貨前必須額外生產多少的數量，才能如期分別交足貨品數量並使得整個生產製程的總成本（含生產作業成本、存貨成本）為最小。根據前面的符號及函數的定義與基本假設，可得到在時點t之生產作業成本及存貨成本分別為$c_1(W'(t))^2$與$c_2W(t)$；由於在T_1時間點交貨量為B_1單位，因此尚有$W(T_1)-B_1$單位的存貨量會保留至T_2時間點，而在T_2時間點交貨量為B_2單位，因此尚有$W(T_2)-(B_1+B_2)$單位的存貨量會保留至T_3時才一併出清，也因此，在時間區間$[T_1,T_2]$、$[T_2,T_3]$之累積產量函數分別為$W(t)-B_1$、$W(t)-(B_1+B_2)$。故在時間區間$[T_{n-1},T_n]$，$n=1,2,3$，之總生產作業成本及總存貨成本分別為

$$\int_{T_{n-1}}^{T_n} c_1(W'(t))^2dt \text{，} \int_{T_{n-1}}^{T_n} c_2\left(W(t)-\sum_{i=0}^{n-1}B_i\right)$$

使用前面所介紹的函數及參數符號，則可以得到三個不同交貨日期之生產計畫的數學模式，如下：

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} Min\displaystyle\sum_{n=1}^{3}\int_{T_{n-1}}^{T_n}\left[c_1(W'(t))^2+c_2\left(W(t)-\sum_{i=0}^{n-1}B_i\right)\right]dt \\ s.t.\ W(0)=0, W(T_1)\ge B_1, W(T_2)\ge B_1+B_2, W(T_3)=B_1+B_2+B_3 \\ \quad ,W'(t)\ge 0,\ \forall t\in[0,T_3] \end{cases}$$

利用變數變換的方法，可將模式（I）中之第二、第三個積分式重新表示如下：

$$\int_0^{T_2-T_1} \{c_1[W'(t+T_1)]^2 + c_2[W(t+T_1)-W(T_1)]\}dt + c_2[W(T_1)-B_1](T_2-T_1)$$

$$\int_0^{T_3-T_2} \{c_1[W'(t+T_2)]^2 + c_2[W(t+T_2)-W(T_2)]\}dt + c_2[W(T_2)-B_2](T_3-T_2)$$

此時若對於任意給定模式（I）的一個可行解$W(t)$，該可行解$W(t)$可對應一組函數$(w_1, w_2, w_3) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t))$，其中

$$\begin{cases} w_1(t) = W(t) & , 0 \le t \le T_1 \\ w_2(t) = W(t+T_1) - W(T_1) & , 0 \le t \le T_2 - T_1 \\ w_3(t) = W(t+T_2) - W(T_2) & , 0 \le t \le T_3 - T_2 \end{cases} \tag{3.1}$$

反之，若對於任意給定之一組函數(w_1, w_2, w_3)，其中$w_1(t)$為定義在時間區間$[0, T_1]$之增函數，$w_2(t)$為定義在時間區間$[0, T_2 - T_1]$之增函數，而$w_3(t)$為定義在時間區間$[0, T_3 - T_2]$之增函數，則由公式(3.1)可知，函數(w_1, w_2, w_3)亦可對應模式（I）之一個可行解$W(t)$。除此之外，由於模式（I）中之限制條件要求$W(T_1) \ge B_1$、$W(T_2) \ge B_1 + B_2$且$W(T_3) = B_1 + B_2 + B_3$，故存在兩個實數a_1與a_2，其中$a_1 \in [0, B_2]$、$a_2 \in [0, B_3]$，使得$W(T_1) = B_1 + a_1$且$W(T_2) = B_1 + B_2 + a_2$，亦即$w_1(T_1) = B_1 + a_1$、$w_2(T_2 - T_1) = B_2 + a_2 - a_1$、$w_3(T_3 - T_2) = B_3 - a_2$。於是模式（I）可進一步表示為

（II） $$\underset{a_1 \in [0, B_2],\, a_2 \in [0, B_3]}{Min} f(a_1, a_2)$$

其中

$$
(\text{III}) \quad f(a_1, a_2) = \begin{cases} \underset{(w_1,\, w_2,\, w_2)}{Min} & \int_0^{T_1} [c_1(w_1'(t))^2 + c_2 w_1(t)]dt \\ & + \int_0^{T_2 - T_1} [c_1(w_2'(t))^2 + c_2 w_2(t)]dt \\ & + \int_0^{T_3 - T_2} [c_1(w_3'(t))^2 + c_2 w_3(t)]dt \\ & + c_2[a_1(T_2 - T_1) + a_2(T_3 - T_2)] \\ s.t.\ w_1(0) = 0,\ w_1(T_1) = B_1 + a_1,\ w_1'(t) \geq 0,\ \forall t \in [0, T_1] \\ \quad w_2(0) = 0,\ w_2(T_2 - T_1) = B_2 + a_2 - a_1,\ w_2'(t) \geq 0 \\ \quad ,\forall t \in [0, T_2 - T_1] \\ \quad w_3(0) = 0,\ w_3(T_3 - T_2) = B_3 - a_2,\ w_3'(t) \geq 0 \\ \quad ,\forall t \in [0, T_3 - T_2] \end{cases}
$$

由於單一交貨日之訂單式生產系統中包含兩種情形：取得訂單後即應立即生產（Immediate Production），才能在交貨日有足夠產品數量可以交付；另一種則是延後生產（Deferred Production），即因訂單數量不多無須立即生產，可於一段時間後再行生產。因此，為涵蓋立即生產與延後生產等兩種情形，本研究考慮較模式（III）更為一般化的模型，即對於任意給定之函數 (w_1, w_2, w_3) ，若定義 $t_{w_1} = Max\{t \mid w_1(t) = 0, t \in [0, T_1]\}$ 、$t_{w_2} = Max\{t \mid w_2(t) = 0, t \in [0, T_2 - T_1]\}$ 以及 $t_{w_3} = Max\{t \mid w_3(t) = 0, t \in [0, T_3 - T_2]\}$ ，則模式（III）中 $f(a_1, a_2)$ 之三個積分式可分別改寫為

$\int_{t_{w_1}}^{T_1 - T_0} [c_1(w_1'(t))^2 + c_2 w_1(t)]dt$ ，$\int_{t_{w_2}}^{T_2 - T_1} [c_1(w_2'(t))^2 + c_2 w_2(t)]dt$ ，

$\int_{t_{w_3}}^{T_3 - T_2} [c_1(w_3'(t))^2 + c_2 w_3(t)]dt$

因此，$f(a_1, a_2)$ 可進一步表示為模式（IV）

$$f(a_1,a_2)=\begin{cases} \underset{w_1}{Min}\int_{t_{w_1}}^{T_1}[c_1(w_1'(t))^2+c_2w_1(t)]dt \\ \quad +\underset{w_2}{Min}\int_{t_{w_2}}^{T_2-T_1}[c_1(w_2'(t))^2+c_2w_2(t)]dt \\ \quad +\underset{w_3}{Min}\int_{t_{w_3}}^{T_3-T_2}[c_1(w_3'(t))^2+c_2w_3(t)]dt \\ \quad +c_2[a_1(T_2-T_1)+a_2(T_3-T_2)] \\ s.t.\ w_1(t_{w_1})=0,\ t_{w_1}\ge 0,\ w_1(T_1)=B_1+a_1,\ w_1'(t)\ge 0 \\ \quad ,\forall t\in[t_{w_1},T_1] \\ \quad w_2(t_{w_2})=0,\ t_{w_2}\ge 0,\ w_2(T_2-T_1)=B_2+a_2-a_1,\ w_2'(t)\ge 0 \\ \quad ,\forall t\in[t_{w_2},T_2-T_1] \\ \quad w_3(t_{w_3})=0,\ t_{w_3}\ge 0,\ \ w_3(T_3-T_2)=B_3-a_2,\ w_3'(t)\ge 0 \\ \quad ,\forall t\in[t_{w_3},T_3-T_2] \end{cases}$$

對給定之非負實數a_1與a_2，可得模式（IV）之可行解為(w_1, w_2, w_3)，其中$w_1(t)$、$w_2(t)$與$w_3(t)$均可視為a_1與a_2的函數。令a_1^*與a_2^*為模式（II）的最佳解、$W^*(t)$為模式（I）的最佳解；若能尋得最佳解a_1^*與a_2^*，則就可以得到$W^*(t)$，因此首先將致力於尋找最佳解a_1^*與a_2^*。

若令$L_1 = L_1(a_1, a_2)$、$L_2 = L_2(a_1, a_2)$及$L_3 = L_3(a_1, a_2)$分別為模式（V）、（VI）、（VII）在其最佳解時的目標函數，其中

（V） $$\begin{cases} \underset{w_1}{Min}\int_{t_{w_1}}^{T_1}[c_1(w_1'(t))^2+c_2w_1(t)]dt \\ s.t.\ w_1(t_{w_1})=0,\ t_{w_1}\ge 0,\ w_1(T_1)=B_1+a_1,\ w_1'(t)\ge 0,\ \forall t\in[t_{w_1},T_1] \end{cases}$$

（VI） $$\begin{cases} \underset{w_2}{Min}\int_{t_{w_2}}^{T_2-T_1}[c_1(w_2'(t))^2+c_2w_2(t)]dt \\ s.t.\ w_2(t_{w_2})=0,\ t_{w_2}\ge 0,\ w_2(T_2-T_1)=B_2+a_2-a_1,\ w_2'(t)\ge 0 \\ \quad ,\forall t\in[t_{w_2},T_2-T_1] \end{cases}$$

（VII）

$$\begin{cases} \underset{w_3}{Min}\int_{t_{w_3}}^{T_3-T_2}[c_1(w_3'(t))^2+c_2w_3(t)]dt \\ s.t.\ w_3(t_{w_3})=0,\ \ t_{w_3}\ge 0,\ \ w_3(T_3-T_2)=B_3-a_2,\ w_3'(t)\ge 0,\ \forall t\in[t_{w_3},T_3-T_2] \end{cases}$$

則模式（IV）可以改寫成為

$f(a_1, a_2) = L_1 + L_2 + L_3 + c_2 a_1 (T_2 - T_1) + c_2 a_2 (T_3 - T_2)$ 。

第四章 模式求解

為瞭解各模式最佳解之間的關係，本研究首先探討端點(Endpoint)不等式限制式之角點條件(Weierstrass-Erdmann Corner Condition)，藉此獲知模式（I）最佳解之特性，其後推論模式（II）之最佳解a_1^*與a_2^*，並依據相關研究結果，提供一個具體可行之模式（I）最佳解求解流程。

4.1 角點條件

若不考慮模式（I）中之二個限制條件$W(T_1) \geq B_1$以及$W(T_2) \geq B_1 + B_2$，模式（I）可視為單一交貨日期訂單式生產模式，此時最佳解必滿足尤拉方程式，其中積分常數將由端點條件$W(0) = 0$與$W(T_3) = B_1 + B_2 + B_3$所決定；而最佳解應區分為立即生產與延後生產二種情形討論，則是為了符合限制條件$W'(t) \geq 0$之要求。本研究首先探討單一交貨日期訂單式生產模式在多了二個限制條件$W(T_1) \geq B_1$以及$W(T_2) \geq B_1 + B_2$時，模式最佳解$W^*(t)$之特性。

考慮一個決策函數為$W(t)$之最佳化模式

$$\int_{T_0}^{T_3} F(t, W, W')dt \quad \text{限制條件為} \quad W(T_0) = W_{T_0}, W(T_3) = W_{T_3}, W'(t) \geq 0 \qquad (4.1.1)$$

其中$W(t)$為片段平滑（Piecewise Smooth）函數；亦即$W(t)$在區間$[T_0, T_3]$上須為連續（Continuous）函數，且除了在少數幾個時點外，須為連續可微（Continuous Derivative）。假設模式(4.1.1)之最佳解$W^*(t)$為在區間$[T_0, T_3]$上的片段平滑函數，僅在二個時點T_1與T_2上為連續不可微。由於模式(4.1.1)之目標函數可表示為

$$\int_{T0}^{T3} F(t,W,W')dt = \int_{T0}^{T1} F(t,W,W') + \int_{T1}^{T2} F(t,W,W')dt + \int_{T2}^{T3} F(t,W,W')dt \qquad (4.1.2)$$

假設$W(T_1)=W_{T_1}$且$W(T_2)=W_{T_2}$，則當$t\in[0,T_1]$時，模式(4.1)之最佳解$W^*(t)$必為

$$\int_{T_0}^{T_1} F(t,W,W')dt \quad \text{限制條件為} \quad W(T_0)=W_{T_0}, W(T_1)=W_{T_1}, W'(t)\geq 0 \qquad (4.1.3)$$

之最佳解；而當$t\in[T_1,T_2]$時，模式(4.1)之最佳解$W^*(t)$必為

$$\int_{T_1}^{T_2} F(t,W,W')dt \quad \text{限制條件為} \quad W(T_1)=W_{T_1}, W(T_2)=W_{T_2}, W'(t)\geq 0 \qquad (4.1.4)$$

之最佳解；且當$t\in[T_2,T_3]$時，模式(4.1.1)之最佳解$W^*(t)$必為

$$\int_{T_2}^{T_3} F(t,W,W')dt \quad \text{限制條件為} \quad W(T_2)=W_{T_2}, W(T_3)=W_{T_3}, W'(t)\geq 0 \qquad (4.1.5)$$

之最佳解。倘若任一子模式(4.1.3)、(4.1.4)、(4.1.5)之目標函數值並非最佳，吾人得以該子模式較佳的解取代在各該區間對應之$W^*(t)$函數關係後，三個子模式目標函數值的和亦將隨之而改進，因此，若$W^*(t)$為模式(4.1.1)之最佳解，$W^*(t)$亦為三個子模式(4.1.3)、(4.1.4)、(4.1.5)之最佳解，此時最佳解$W^*(t)$在三個區間$[T_0,T_1]$、$[T_1,T_2]$、$[T_2,T_3]$中，均滿足尤拉方程式$F_W = dF_{W'}/dt$。雖然$W^*(t)$在三個區間上均滿足同一尤拉方程式，但由於區間端點的不同將導致積分常數不同的結果，若欲以三個子模式(4.1.3)、(4.1.4)、(4.1.5)之最佳解來求得模式(4.1.1)之最佳解$W^*(t)$，可藉由二個端點(T_1,W_{T_1})與(T_2,W_{T_2})所需滿足的角點條件來瞭解模式(4.1.1)最佳解$W^*(t)$的特性。

首先考慮一般化情形，假設T_1、T_2、W_{T_1}與W_{T_2}均可被最佳選取，使得其所對應之目標函數(4.1.2)已為最佳數值。相較於T_1、T_2、W_{T_1}、W_{T_2}，對於任何的可能修正數值δT_1、δT_2、δW_{T_1}、δW_{T_2}，由於$W^*(t)$在區間

$[T_0, T_3]$上連續，若子模式(4.1.3)之端點(T_1, W_{T_1})變動，則子模式(4.1.4)之端點(T_1, W_{T_1})亦隨之變動；而子模式(4.1.4)之端點(T_2, W_{T_2})變動，子模式(4.1.5)之端點(T_2, W_{T_2})亦同時變動。為了求得在T_1、T_2、W_{T_1}與W_{T_2}附近些微變動所產生的目標函數(4.1.2)之變動量，應先行計算三個子模式(4.1.3)、(4.1.4)、(4.1.5)之目標函數變動量。由 Kamien & Schwartz (1991)可知，對於型如

$$J = \int_{T_{n-1}}^{T_n} F(t, W, W')dt$$

之目標函數而言，其變動量δJ可表示為

$$\delta J = (F - W'F_{W'})|_{T_n}\ \delta T_n + F_{W'}|_{T_n}\ \delta W_{T_n} - (F - W'F_{W'})|_{T_{n-1}}\ \delta T_{n-1}$$

$$- F_{W'}|_{T_{n-1}}\ \delta W_{T_{n-1}} + \int_{T_{n-1}}^{T_n} (F_W - dF_{W'}/dt)h\,dt \tag{4.1.6}$$

由於三個子模式之最佳解均應滿足尤拉方程式，故公式(4.1.6)中之積分項均等於零；而各時間點T_0、T_1、T_2、T_3均假設為已知之固定常數，因此，$\delta T_0 = \delta T_1 = \delta T_2 = \delta T_3 = 0$，換言之，公式(4.1.6)可簡化為

$$\delta J = F_{W'}|_{T_n}\ \delta W_{T_n} - F_{W'}|_{T_{n-1}}\ \delta W_{T_{n-1}}$$

就子模式(4.1.3)來說，由於$W_{T_0} = 0$，故$\delta W_{T_0} = 0$；而W_{T_1}之可能取值僅有下限要求B_1，若其值由W_{T_1}變動至$(W_{T_1} + \delta W_{T_1})$，該目標函數之變動量為

$$F_{W'}|_{T_1^-}\ \delta W_{T_1}$$

其中上標"-"表示左極限；就子模式(4.1.4)來說，由於W_{T_1}與W_{T_2}之取值僅有下限要求B_1與$(B_1 + B_2)$，若由W_{T_1}變動至$(W_{T_1} + \delta W_{T_1})$，而$W_{T_2}$變動至$(W_{T_2} + \delta W_{T_2})$，則該目標函數之變動量為

$$F_{W'}|_{T_2^-}\ \delta W_{T_2} - F_{W'}|_{T_1^+}\ \delta W_{T_1}$$

其中上標"+"表示右極限；就子模式(4.1.5)來說，由於$W_{T_3} = B_1 + B_2 + B_3$，

故$\delta W_{T_0}=0$，而W_{T_2}之取值僅有下限要求(B_1+B_2)，若其值由W_{T_2}變動至$(W_{T_2}+\delta W_{T_2})$，則該目標函數之變動量為

$$-F_{W'}|_{T_2^+}\ \delta W_{T_2}$$

目標函數(4.1.2)之總變動量即為三個子模式(4.1.3)、(4.1.4)、(4.1.5)之目標函數變動量的和，即

$$\delta J=F_{W'}|_{T_1^-}\ \delta W_{T_1}+F_{W'}|_{T_2^-}\ \delta W_{T_2}-F_{W'}|_{T_1^+}\ \delta W_{T_1}-F_{W'}|_{T_2^+}\ \delta W_{T_2} \qquad (4.1.7)$$

由於模式（I）之最佳解$W^*(t)$可使目標函數總成本為最小，對於其他可行解來說，其所對應之總成本必定不會高於最小總成本，因此，總成本總變動量(4.1.7)必滿足大於或等於零的條件，即$\delta J\ge 0$。基於限制條件$W(T_1)\ge B_1$以及$W(T_2)\ge B_1+B_2$，最佳解$W^*(t)$可區分為下列4種形式：

1. 當$W^*(T_1)=B_1$且$W^*(T_2)=B_1+B_2$(即$a_1^*=0$且$a_2^*=0$)時，則$\delta W_{T_1}\ge 0$且$\delta W_{T_2}\ge 0$，則在$\delta J\ge 0$的條件下，$(F_{W'}|_{T_1^-}-F_{W'}|_{T_1^+})\ge 0$且$(F_{W'}|_{T_2^-}-F_{W'}|_{T_2^+})\ge 0$，亦即$F_{W'}|_{T_1^-}\ge F_{W'}|_{T_1^+}$且$F_{W'}|_{T_2^-}\ge F_{W'}|_{T_2^+}$；也就是說，可將三階段訂單式生產模式視為由三個單階段模式所組合而成的，三個單階段模式各自求解其最佳生產函數，而模式（I）之最佳解$W^*(t)$即為由三個單階段訂單式生產模式之最佳生產函數所組成。

2. 當$W^*(T_1)=B_1$且$W^*(T_2)>B_1+B_2$（即$a_1^*=0$且$a_2^*>0$）時，則$\delta W_{T_1}\ge 0$，而δW_{T_2}無符號限制，因此，在$\delta J\ge 0$的條件下，$(F_{W'}|_{T_1^-}-F_{W'}|_{T_1^+})\ge 0$且$(F_{W'}|_{T_2^-}-F_{W'}|_{T_2^+})=0$，亦即$F_{W'}|_{T_1^-}\ge F_{W'}|_{T_1^+}$且$F_{W'}|_{T_2^-}=F_{W'}|_{T_2^+}$；也就是說，可將三階段訂單式生產模式視為由二個單階段模式所組合而成的，其中原模式之第一階段自成單一階段模

式求解，而原模式之第二與第三階段應合併為另一單階段模式求解，模式（I）之最佳解$W^*(t)$即為由第一階段訂單式生產模式之最佳生產函數，以及第二與第三階段合併而成的單階段訂單式生產模式之最佳生產函數所組合而成。

3. 當$W^*(T_1) > B_1$且$W^*(T_2) = B_1 + B_2$（即$a_1^* > 0$且$a_2^* = 0$）時，則δW_{T_1}無符號限制，而$\delta W_{T_2} \geq 0$，則在$\delta J \geq 0$的條件下，$(F_{W'}|_{T_1^-} - F_{W'}|_{T_1^+}) = 0$且$(F_{W'}|_{T_2^-} - F_{W'}|_{T_2^+}) \geq 0$，亦即$F_{W'}|_{T_1^-} = F_{W'}|_{T_1^+}$且$F_{W'}|_{T_2^-} \geq F_{W'}|_{T_2^+}$；也就是說，可將三階段訂單式生產模式視為由二個單階段模式所組合而成的，其中原模式之第一與第二階段應合併為單一階段模式求解，而原模式之第三階段自成另一單階段模式求解，模式（I）之最佳解$W^*(t)$即為由第一與第二階段合併而成的單一階段訂單式生產模式之最佳生產函數，以及第三階段訂單式生產模式之最佳生產函數所組合而成。

4. 當$W^*(T_1) > B_1$且$W^*(T_2) > B_1 + B_2$（即$a_1^* > 0$且$a_2^* > 0$）時，則δW_{T_1}與δW_{T_2}均無符號限制，因此，在$\delta J \geq 0$的條件下，$(F_{W'}|_{T_1^-} - F_{W'}|_{T_1^+}) = 0$且$(F_{W'}|_{T_2^-} - F_{W'}|_{T_2^+}) = 0$，亦即$F_{W'}|_{T_1^-} = F_{W'}|_{T_1^+}$且$F_{W'}|_{T_2^-} = F_{W'}|_{T_2^+}$；也就是說，可將三階段訂單式生產模式視為一個單階段模式，即原模式之三個階段應合併為單一階段模式求解，模式（I）之最佳解$W^*(t)$即為由三個階段合併而成的單階段訂單式生產模式之最佳生產函數。

4.2 模式（II）之最佳解a_1^*與a_2^*

由於模式（V）、（VI）、（VII）均可視為給定非負實數a_1與a_2之單一

交貨日期的最佳生產計畫模式，首先利用變分法來找尋各該模式之最佳解。若令$a_0=0$、$a_3=0$，且定義指示變數I_n，$n=1,2,3$，為

$$I_n=\begin{cases}1 & ,(B_n+a_n-a_{n-1})\ge \dfrac{c_2(T_n-T_{n-1})^2}{4c_1}\\ 0 & ,(B_n+a_n-a_{n-1})< \dfrac{c_2(T_n-T_{n-1})^2}{4c_1}\end{cases}$$

亦即當該期生產量$(B_n+a_n-a_{n-1})$大於或等於臨界值$c_2(T_n-T_{n-1})^2/(4c_1)$時，該指示變數$I_n=1$，表示所需生產之商品數量較多，需要立即生產，此時最佳生產函數為

$$w_n(t)=\frac{c_2}{4c_1}t^2+\left[\frac{(B_n+a_n-a_{n-1})-\dfrac{c_2}{4c_1}(T_n-T_{n-1})^2}{T_n-T_{n-1}}\right]t,\ t\in[0,T_n-T_{n-1}]$$

但若當期生產量$(B_n+a_n-a_{n-1})$小於臨界值$c_2(T_n-T_{n-1})^2/(4c_1)$，此時指示變數$I_n=0$，則應延後生產，而最佳生產函數則為

$$w_n(t)=\frac{c_2}{4c_1}(t-t_{w_n})^2,\ t\in[t_{w_n},T_n-T_{n-1}]$$

其中$t_{w_n}=(T_n-T_{n-1})-2\sqrt{\dfrac{c_1(B_n+a_n-a_{n-1})}{c_2}}$。將上述單一交貨日期生產計畫模式之最佳生產函數代入模式（IV）之$f(a_1,a_2)$中，並經過簡化後可得到

$$f(a_1,a_2)=\sum_{n=1}^{3}\left\{I_n\left[-\frac{c_2^2}{48c_1}(T_n-T_{n-1})^3+\frac{c_2}{2}(T_n-T_{n-1})(B_n+a_n+a_{n-1})\right.\right.$$

$$\left.+c_1\frac{(B_n+a_n-a_{n-1})^2}{T_n-T_{n-1}}\right]$$

$$+(1-I_n)\left[\frac{4}{3}\sqrt{c_1c_2(B_n+a_n-a_{n-1})^3}+c_2a_{n-1}(T_n-T_{n-1})\right]\Bigg\} \quad (4.1.8)$$

關於極值之一階必要條件（Necessary Condition），若對公式(4.1.8)進行偏微分計算，可求算出 $f(a_1,a_2)$ 分別對 a_1 與 a_2 之一階偏導函數為

$$\frac{\partial f}{\partial a_1}=I_1\left[\frac{c_2}{2}T_1+2c_1\frac{(B_1+a_1)}{T_1}\right]+(1-I_1)[2\sqrt{c_1c_2(B_1+a_1)}]$$

$$+I_2\left[\frac{c_2}{2}(T_2-T_1)-2c_1\frac{(B_2+a_2-a_1)}{T_2-T_1}\right]$$

$$+(1-I_2)[-2\sqrt{c_1c_2(B_2+a_2-a_1)}+c_2(T_2-T_1)] \quad (4.1.9)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_2}=I_2\left[\frac{c_2}{2}(T_2-T_1)+2c_1\frac{B_2+a_2-a_1}{T_2-T_1}\right]+(1-I_2)[2\sqrt{c_1c_2(B_2+a_2-a_1)}]$$

$$+I_3\left[\frac{c_2}{2}(T_3-T_2)-2c_1\frac{(B_3-a_2)}{T_3-T_2}\right]$$

$$+(1-I_3)[-2\sqrt{c_1c_2(B_3-a_2)}+c_2(T_3-T_2)] \quad (4.1.10)$$

由公式(4.1.9)與(4.1.10)可知，$f(a_1,a_2)$ 之臨界點與當期以及下一期的指示變數 I_n、I_{n+1} 有關，亦即與當期以及下一期訂單是否需要立即生產有關；且由於公式(4.1.9)與(4.1.10)中非負項包含

$$I_1\left[\frac{c_2}{2}T_1+2c_1\frac{(B_1+a_1)}{T_1}\right]+(1-I_1)[2\sqrt{c_1c_2(B_1+a_1)}]>0$$

$$(1-I_2)[-2\sqrt{c_1c_2(B_2+a_2-a_1)}+c_2(T_2-T_1)]>0$$

$$I_2\left[\frac{c_2}{2}(T_2-T_1)+2c_1\frac{B_2+a_2-a_1}{T_2-T_1}\right]+(1-I_2)[2\sqrt{c_1c_2(B_2+a_2-a_1)}]>0$$

$$(1-I_3)[-2\sqrt{c_1c_2(B_3-a_2)}+c_2(T_3-T_2)]>0$$

至於 $I_2\left[\frac{c_2}{2}(T_2-T_1)-2c_1\frac{(B_2+a_2-a_1)}{T_2-T_1}\right]$ 與 $I_3\left[\frac{c_2}{2}(T_3-T_2)-2c_1\frac{(B_3-a_2)}{T_3-T_2}\right]$

二項則無正負符號限制，因此可知，不論當期為立即生產或延後生產，只要下一期為延後生產，其一階偏導函數必定大於零，則當期額外生產之數量必等於零；反之，下一期若須立即生產，則應先令該一階偏導函數為零，且應分為下列二種狀況進行分析：

1. 若當期亦須立即生產，此時$I_n = I_{n+1} = 1$，則公式(4.1.9)與(4.1.10)經簡化後得到以下一般式

$$(T_{n+1}-T_n)a_{n-1}-(T_{n+1}-T_{n-1})a_n+(T_n-T_{n-1})a_{n+1}$$
$$=\frac{c_2}{4c_1}(T_{n+1}-T_{n-1})(T_n-T_{n-1})(T_{n+1}-T_n)+(T_{n+1}-T_n)B_n$$
$$-(T_n-T_{n-1})B_{n+1} \tag{4.1.11}$$

2. 若當期為延後生產，則$I_n = 0$，$I_{n+1} = 1$，則公式(4.9)與(4.10)經簡化後得到以下一般式

$$2\sqrt{c_1c_2(B_n+a_n-a_{n-1})}+\frac{c_2}{2}(T_{n+1}-T_n)-2c_1\frac{(B_{n+1}+a_{n+1}-a_n)}{T_{n+1}-T_n}=0 \tag{4.1.12}$$

至於極值之二階充分條件（Sufficient Condition），若分別對公式(4.1.9)與(4.1.10)進行偏微分計算，可求算出$f(a_1,a_2)$之二階偏導函數為

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2}=I_1\left[2c_1\frac{1}{T_1}\right]+(1-I_1)\left[\sqrt{\frac{c_1c_2}{B_1+a_1}}\right]+I_2\left[2c_1\frac{1}{T_2-T_1}\right]$$
$$+(1-I_2)\left[\sqrt{\frac{c_1c_2}{B_2+a_2-a_1}}\right]=A+B$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_2^2}=I_2\left[2c_1\frac{1}{T_2-T_1}\right]+(1-I_2)\left[\sqrt{\frac{c_1c_2}{B_2+a_2-a_1}}\right]+I_3\left[2c_1\frac{1}{T_3-T_2}\right]$$
$$+(1-I_3)\left[\sqrt{\frac{c_1c_2}{B_3-a_2}}\right]=B+C$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial a_2 \partial a_1} = I_2\left[-2c_1 \frac{1}{T_2 - T_1}\right] + (1 - I_2)\left[-\sqrt{\frac{c_1 c_2}{B_2 + a_2 - a_1}}\right] = -B$$

其中

$$A = I_1\left[2c_1 \frac{1}{T_1}\right] + (1 - I_1)\left[\sqrt{\frac{c_1 c_2}{B_1 + a_1}}\right] > 0$$

$$B = I_2\left[2c_1 \frac{1}{T_2 - T_1}\right] + (1 - I_2)\left[\sqrt{\frac{c_1 c_2}{B_2 + a_2 - a_1}}\right] > 0$$

$$C = I_3\left[2c_1 \frac{1}{T_3 - T_2}\right] + (1 - I_3)\left[\sqrt{\frac{c_1 c_2}{B_3 - a_2}}\right] > 0$$

因此，極值充分條件所需之海賽矩陣（Hessian Matrix）為

$$[H_2] = \begin{bmatrix} (A+B) & -B \\ -B & (B+C) \end{bmatrix}$$

而海賽矩陣的一階與二階子矩陣之行列式分別為

$$|H_1| = |(A+B)| = A + B > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} (A+B) & -B \\ -B & (B+C) \end{vmatrix} = (A+B)(B+C) - B^2 = AB + AC + BC > 0$$

由於計算所得之行列式數值$|H_1|$與$|H_2|$均大於零，滿足極小值之充分條件，因此，在一階必要條件中所求得之a_1與a_2的解，必為模式（II）之最佳解a_1^*與a_2^*。

如前所述，在單一交貨日之訂單式生產系統須考慮立即生產與延後生產 $2(=2^1)$種情形，故三階段訂單式生產問題共須考慮 $8(=2^3)$種可能情形，而a_1與a_2之解值可能為 0 或由公式(4.1.11)、(4.1.12)中求算出。8 種可能情形如下所述：

1. 當$(I_1, I_2, I_3) = (1,1,1)$，三期訂單所需生產之商品數量均多，使得三個生產週期均需立即生產，才能有足夠的產品數量交貨。此時模式

（II）之最佳解a_1^*與a_2^*，可先令$f(a_1, a_2)$對a_1與a_2之一階偏導函數分別為零後，求解該聯立方程式而得。利用公式(4.1.11)可得

$$a_1 = \frac{T_1}{T_3}(B_2 + B_3) - \frac{(T_3 - T_1)}{T_3} B_1 - \frac{c_2 T_1 (T_3 - T_1)}{4c_1}$$

$$a_2 = \frac{T_2}{T_3} B_3 - \frac{(T_3 - T_2)}{T_3}(B_1 + B_2) - \frac{c_2 T_2 (T_3 - T_2)}{4c_1}$$

2. 當$(I_1, I_2, I_3) = (1,1,0)$前二期訂單所需生產之商品數量均多，使得前二生產週期均需立即生產，而第三期訂單所需之生產量較少，得以延後生產。由於第三期為延後生產，因此$a_2^* = 0$；此時模式（II）之最佳解a_1^*，可先令$f(a_1, a_2)$對a_1之一階偏導函數為零後，求解而得。此時利用公式(4.1.11)可得

$$a_1 = \frac{T_1}{T_2} B_2 - \frac{(T_2 - T_1)}{T_2} B_1 - \frac{c_2 T_1 (T_2 - T_1)}{4c_1}$$

3. 當$(I_1, I_2, I_3) = (1,0,1)$，第一期與第三期訂單所需生產之商品數量均多，使得該二生產週期均需立即生產，而第二期訂單所需之生產量較少，得以延後生產。由於第二期為延後生產，因此$a_1^* = 0$；此時模式（II）之最佳解a_2^*，可先令$f(a_1, a_2)$對a_2之一階偏導函數為零後，求解而得。此時利用公式(4.1.12)可得

$$a_2 = B_3 + \frac{c_2 (T_3 - T_2)^2}{4c_1} - (T_3 - T_2)\sqrt{\frac{c_2 (B_2 + B_3)}{c_1}}$$

4. 當$(I_1, I_2, I_3) = (1,0,0)$，第一期訂單所需生產之商品數量較多，使得該生產週期需立即生產，而後二期訂單所需之生產量較少，均得以延後生產。此時由於後二期均為延後生產，因此$a_1^* = 0$、$a_2^* = 0$。

5. 當$(I_1, I_2, I_3) = (0,1,1)$，後二期訂單所需生產之商品數量均多，使得

後二生產週期均需立即生產，而第一期訂單所需之生產量較少，得以延後生產。此時模式（II）之最佳解a_1^*與a_2^*，可先令$f(a_1, a_2)$對a_1與a_2之一階偏導函數分別為零後，求解該聯立方程式而得。利用公式(4.1.11)與(4.1.12)可得

$$a_1 = (B_2 + B_3) + \frac{c_2 (T_3 - T_1)^2}{4c_1} - (T_3 - T_1)\sqrt{\frac{c_2 (B_1 + B_2 + B_3)}{c_1}}$$

$$a_2 = B_3 + \frac{c_2 (T_3 - T_2)^2}{4c_1} - (T_3 - T_2)\sqrt{\frac{c_2 (B_1 + B_2 + B_3)}{c_1}}$$

6. 當$(I_1, I_2, I_3) = (0, 1, 0)$，第二期訂單所需生產之商品數量較多，使得該生產週期需立即生產，而其餘二期訂單所需之生產量較少，均得以延後生產。由於第三期為延後生產，因此$a_2^* = 0$；而模式（II）之最佳解a_1^*，可先令$f(a_1, a_2)$對a_1之一階偏導函數為零後，求解而得。利用公式(4.1.12)可得

$$a_1 = B_2 + \frac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1} - (T_2 - T_1)\sqrt{\frac{c_2 (B_1 + B_2)}{c_1}}$$

7. 當$(I_1, I_2, I_3) = (0, 0, 1)$，第三期訂單所需生產之商品數量較多，使得該生產週期需立即生產，而前二期訂單所需之生產量較少，均得以延後生產。此時由於前二期均為延後生產，因此$a_1^* = 0$；此時模式（II）之最佳解a_2^*，可先令$f(a_1, a_2)$對a_2之一階偏導函數為零後，求解而得。此時利用公式(4.1.12)可得

$$a_2 = B_3 + \frac{c_2 (T_3 - T_2)^2}{4c_1} - (T_3 - T_2)\sqrt{\frac{c_2 (B_2 + B_3)}{c_1}}$$

8. 當$(I_1, I_2, I_3) = (0, 0, 0)$，三期訂單所需生產之商品數量均少，使得三個生產週期均得以延後生產。此時由於三期均為延後生產，因此

$a_1^* = 0$ 、 $a_2^* = 0$ 。

由於a_1與a_2均應為非負數值，因此，在求得以上 8 種可能情形之a_1與a_2解值後，尚須確認各該解值是否為非負，才能確認模式（II）之最佳解a_1^*與a_2^*；而在求得最佳解a_1^*與a_2^*後，模式（I）的最佳解$W^*(t)$亦可以得到。

4.3 模式（I）最佳解求解流程

由 4.2 節的研究結果可知，模式（II）的最佳解a_1^*與a_2^*確實滿足最小總成本之充分條件與必要條件；不過，由於最佳解a_1^*與a_2^*的計算並非由當期訂單商品數量B_n與臨界值$c_2(T_n - T_{n-1})^2 / (4c_1)$之間的大小關係來決定，而是由當期生產量$(B_n + a_n - a_{n-1})$所決定，因此，三階段訂單式生產模式之最佳生產函數$W^*(t)$，無法直接以各階段訂單商品數量多寡來求得，尚須考慮其他條件；而由 4.1 節可知，三階段訂單式生產之最佳生產函數$W^*(t)$共可區分為四大類型。綜合以上分析結果，本研究進一步建構最佳生產函數$W^*(t)$之決策準則，以提供相關生產決策者在實務應用上的決策參考。四種類型之三階段訂單式最佳生產函數$W^*(t)$彙整如表 4.1 所示。

表 4.1 三階段訂單式最佳生產函數決策準則彙整表

類型	最佳生產計畫函數
1	1. $W^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}t^2+\left[\frac{(B_1+B_2+B_3)}{T_3}-\frac{c_2T_3}{4c_1}\right]t$ ， $t\in[0,T_3]$ 2. $W^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}(t-t_{w^*})^2$ ， $t\in[t_{w^*},T_3]$ ， $t_{w^*}=T_3-2\sqrt{\frac{c_1(B_1+B_2+B_3)}{c_2}}$
2	$W^*(t)=\begin{cases} W_1^*(t) & ,t\in[(t_{w_1^*})^+,T_1] \\ W_2^*(t)+B_1 & ,t\in[(t_{w_2^*})^++T_1,T_3] \end{cases}$ ， $(x)^+=Max\{0,x\}$ ，其中 1. $\begin{cases} \frac{c_2}{4c_1}t^2+\left[\frac{B_1}{T_1}-\frac{c_2T_1}{4c_1}\right]t & ,t\in[0,T_1] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_1)^2+\left[\frac{B_2+B_3}{T_3-T_1}-\frac{c_2(T_3-T_1)}{4c_1}\right](t-T_1)+B_1 & ,t\in[T_1,T_3] \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \frac{c_2}{4c_1}(t-t_{w_1^*})^2 & ,t\in[t_{w_1^*},T_1] \quad ,t_{w_1^*}=T_1-2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}} \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_1)^2+\left[\frac{B_2+B_3}{T_3-T_1}-\frac{c_2(T_3-T_1)}{4c_1}\right](t-T_1)+B_1 & ,t\in[T_1,T_3] \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \frac{c_2}{4c_1}t^2+\left[\frac{B_1}{T_1}-\frac{c_2T_1}{4c_1}\right]t & ,t\in[0,T_1] \\ W=B_1 & ,t\in[T_1,T_1+t_{w_2^*}] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_1-t_{w_2^*})^2+B_1 & ,t\in[\,T_1+t_{w_2^*},T_3] \quad ,t_{w_2^*}=(T_3-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1(B_2+B_3)}{c_2}} \end{cases}$ 4. $\begin{cases} W=0 & ,t\in[0,t_{w_1^*}] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-t_{w_1^*})^2 & ,t\in[t_{w_1^*},T_1] \quad ,t_{w_1^*}=T_1-2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}} \\ W=B_1 & ,t\in[T_1,T_1+t_{w_2^*}] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_1-t_{w_2^*})^2+B_1 & ,t\in[T_1+t_{w_2^*},T_3] \quad ,t_{w_2^*}=(T_3-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1(B_2+B_3)}{c_2}} \end{cases}$
3	$W^*(t)=\begin{cases} W_1^*(t) & ,t\in[(t_{w_1^*})^+,T_2] \\ W_2^*(t)+B_1+B_2 & ,t\in[(t_{w_2^*})^++T_2,T_3] \end{cases}$ ， $(x)^+=Max\{0,x\}$ ，其中 1. $\begin{cases} \frac{c_2}{4c_1}t^2+\left[\frac{B_1+B_2}{T_2}-\frac{c_2T_2}{4c_1}\right]t & ,t\in[0,T_2] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_2)^2+\left[\frac{B_3}{T_3-T_2}-\frac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}\right](t-T_2)+B_1+B_2 & ,t\in[T_2,T_3] \end{cases}$

類型	最佳生產計畫函數
	2. $\begin{cases} W=0 & ,t\in[0,t_{w_1^*}] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-t_{w_1^*})^2 & ,t\in[t_{w_1^*},T_2] \quad ,t_{w_1^*}=T_2-2\sqrt{\frac{c_1(B_1+B_2)}{c_2}} \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_2)^2+\left[\frac{B_3}{T_3-T_2}-\frac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}\right](t-T_2)+B_1+B_2 & ,t\in[T_2,T_3] \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \frac{c_2}{4c_1}t^2+\left[\frac{B_1+B_2}{T_2}-\frac{c_2T_2}{4c_1}\right]t & ,t\in[0,T_2] \\ W=B_1+B_2 & ,t\in[T_2,T_2+t_{w_2^*}] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_2-t_{w_2^*})^2 & ,t\in[T_2+t_{w_2^*},T_3] \quad ,t_{w_2^*}=(T_3-T_2)-2\sqrt{\frac{c_1B_3}{c_2}} \end{cases}$ 4. $\begin{cases} W=0 & ,t\in[0,t_{w_1^*}] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-t_{w_1^*})^2 & ,t\in[t_{w_1^*},T_2] \quad ,t_{w_1^*}=T_2-2\sqrt{\frac{c_1(B_1+B_2)}{c_2}} \\ W=B_1+B_2 & ,t\in[T_2,T_2+t_{w_2^*}] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_2-t_{w_2^*})^2+B_1+B_2 & ,t\in[T_2+t_{w_2^*},T_3] \quad ,t_{w_2^*}=(T_3-T_2)-2\sqrt{\frac{c_1B_3}{c_2}} \end{cases}$
4	$W^*(t)=\begin{cases} W_1^*(t) & ,t\in[(t_{w_1^*})^+,T_1] \\ W_2^*(t)+B_1 & ,t\in[(t_{w_2^*})^++T_1,T_2] \\ W_3^*(t)+B_1+B_2 & ,t\in[(t_{w_3^*})^++T_2,T_3] \end{cases}$ ，$(x)^+=Max\{0,x\}$ ，其中 1. $\begin{cases} \frac{c_2}{4c_1}t^2+\left[\frac{B_1}{T_1}-\frac{c_2T_1}{4c_1}\right] & ,t\in[0,T_1] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_1)^2+\left[\frac{B_2}{T_2-T_1}-\frac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}\right](t-T_1)+B_1 & ,t\in[T_1,T_2] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_2)^2+\left[\frac{B_3}{T_3-T_2}-\frac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}\right](t-T_2)+B_1+B_2 & ,t\in[T_2,T_3] \end{cases}$ 2. $\begin{cases} W=0 & ,t\in[0,t_{w_1^*}] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-t_{w_1^*})^2 & ,t\in[t_{w_1^*},T_1] \quad ,t_{w_1^*}=T_1-2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}} \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_1)^2+\left[\frac{B_2}{T_2-T_1}-\frac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}\right](t-T_1)+B_1 & ,t\in[T_1,T_2] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_2)^2+\left[\frac{B_3}{T_3-T_2}-\frac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}\right](t-T_2)+B_1+B_2 & ,t\in[T_2,T_3] \end{cases}$

類型	最佳生產計畫函數
	3. $\begin{cases} \frac{c_2}{4c_1}t^2+\left[\frac{B_1}{T_1}-\frac{c_2T_1}{4c_1}\right]t & ,t\in[0,T_1] \\ W=B_1 & ,t\in[T_1,T_1+t_{w_2^*}] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_1-t_{w_2^*})^2+B_1 & ,t\in[T_1+t_{w_2^*},T_2] \quad ,t_{w_2^*}=(T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}} \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_2)^2+\left[\frac{B_3}{T_3-T_2}-\frac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}\right](t-T_2)+B_1+B_2 & ,t\in[T_2,T_3] \end{cases}$
	4. $\begin{cases} \frac{c_2}{4c_1}t^2+\left[\frac{B_1}{T_1}-\frac{c_2T_1}{4c_1}\right]t & ,t\in[0,T_1] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_1)^2+\left[\frac{B_2}{T_2-T_1}-\frac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}\right](t-T_1)+B_1 & ,t\in[T_1,T_2] \\ W=B_1+B_2 & ,t\in[T_2,T_2+t_{w_3^*}] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_2-t_{w_3^*})^2+B_1+B_2 & ,t\in[T_2+t_{w_3^*},T_3] \quad ,t_{w_3^*}=(T_3-T_2)-2\sqrt{\frac{c_1B_3}{c_2}} \end{cases}$
	5. $\begin{cases} W=0 & ,t\in[0,t_{w_1^*}] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-t_{w_1^*})^2 & ,t\in[t_{w_1^*},T_1] \quad ,t_{w_1^*}=T_1-2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}} \\ W=B_1 & ,t\in[T_1,T_1+t_{w_2^*}] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_1-t_{w_2^*})^2+B_1 & ,t\in[T_1+t_{w_2^*},T_2] \quad ,t_{w_2^*}=(T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}} \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_2)^2+\left[\frac{B_3}{T_3-T_2}-\frac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}\right](t-T_2)+B_1+B_2 & ,t\in[T_2,T_3] \end{cases}$
	6. $\begin{cases} W=0 & ,t\in[0,t_{w_1^*}] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-t_{w_1^*})^2 & ,t\in[t_{w_1^*},T_1] \quad ,t_{w_1^*}=T_1-2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}} \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_1)^2+\left[\frac{B_2}{T_2-T_1}-\frac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}\right](t-T_1)+B_1 & ,t\in[T_1,T_2] \\ W=B_1+B_2 & ,t\in[T_2,T_2+t_{w_3^*}] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_2-t_{w_3^*})^2+B_1+B_2 & ,t\in[T_2+t_{w_3^*},T_3] \quad ,t_{w_3^*}=(T_3-T_2)-2\sqrt{\frac{c_1B_3}{c_2}} \end{cases}$

類型	最佳生產計畫函數
	7. $\begin{cases} \frac{c_2}{4c_1}t^2+\left[\frac{B_1}{T_1}-\frac{c_2T_1}{4c_1}\right]t & ,t\in[0,T_1] \\ W=B_1 & ,t\in[T_1,T_1+t_{w_2^*}] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_1-t_{w_2^*})^2+B_1 & ,t\in[T_1+t_{w_2^*},T_2] \quad ,t_{w_2^*}=(T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}} \\ W=B_1+B_2 & ,t\in[T_2,T_2+t_{w_3^*}] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_2-t_{w_3^*})^2+B_1+B_2 & ,t\in[T_2+t_{w_3^*},T_3] \quad ,t_{w_3^*}=(T_3-T_2)-2\sqrt{\frac{c_1B_3}{c_2}} \end{cases}$
	8. $\begin{cases} W=0 & ,t\in[0,t_{w_1^*}] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-t_{w_1^*})^2 & ,t\in[t_{w_1^*},T_1] \quad ,t_{w_1^*}=T_1-2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}} \\ W=B_1 & ,t\in[T_1,T_1+t_{w_2^*}] \\ \frac{c_2}{4c_1}(t-T_1-t_{w_2^*})^2 & ,t\in[T_1+t_{w_2^*},T_2] \quad ,t_{w_2^*}=(T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}} \\ W=B_1+B_2 & ,t\in[T_2,T_2+t_{w_3^*}] \\ W_3^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}(t-T_2-t_{w_3^*})^2+B_1+B_2 & ,t\in[T_2+t_{w_3^*},T_3] \quad ,t_{w_3^*}=(T_3-T_2)-2\sqrt{\frac{c_1B_3}{c_2}} \end{cases}$

為了簡化符號起見，定義下列決策準則(Decision Function)函數：

$$DF_1=DF_1(c_1,c_2,T_1,B_1)=B_1-\frac{c_2T_1^2}{4c_1}\ ，$$

$$DF_2=DF_2(c_1,c_2,T_1,T_2,B_2)=B_2-\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}\ ，$$

$$DF_3=DF_3(c_1,c_2,T_2,T_3,B_3)=B_3-\frac{c_2(T_3-T_2)^2}{4c_1}$$

1. 當 $DF_1\geq 0$ ，$DF_2\geq 0$ ，$DF_3\geq 0$

當 T_1 、T_2 、T_3 三個時間點，三階段皆為立即生產情況之下，則會有以下四種生產計畫：

①$\frac{B_2}{T_2-T_1}-\frac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}<\frac{B_1}{T_1}+\frac{c_2T_1}{4c_1}$ 且 $\frac{B_3}{T_3-T_2}-\frac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}<\frac{B_2}{T_2-T_1}$ $+\frac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}$，可用類型 4-1 來生產。

第二階段所需交貨數量小於第一階段，產量仍可以應付，所以第一階段交貨前不需要額外再多生產，以供第二階段交貨。第三階段所需交貨數量小於第二階段，產量仍可以應付，所以第一階段交貨前不需要額外再多生產，以供第二階段交貨，三個階段不需合併，各自生產即可。

②$\frac{B_2}{T_2-T_1}-\frac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}<\frac{B_1}{T_1}+\frac{c_2T_1}{4c_1}$ 且 $\frac{B_3}{T_3-T_2}-\frac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}\geq\frac{B_2}{T_2-T_1}$ $+\frac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}$

第二階段所需交貨數量小於第一階段，第三階段所需交貨數量大於第二階段，又可分為以下兩種生產計畫：

(1)$\frac{B_2+B_3}{T_3-T_1}-\frac{c_2(T_3-T_1)}{4c_1}<\frac{B_1}{T_1}+\frac{c_2T_1}{4c_1}$，可用類型 2-1 來生產。

又因 T_2、T_3 兩個時點，第三階段所需交貨數量大於第二階段，產量會應付不足，所以第二階段交貨前需額外再多生產，以供第三階段交貨，第二、三階段需合併生產。

(2)$\frac{B_2+B_3}{T_3-T_1}-\frac{c_2(T_3-T_1)}{4c_1}\geq\frac{B_1}{T_1}+\frac{c_2T_1}{4c_1}$，可用類型 1-1 來生產。

又因 T_2、T_3 兩個時點，第三階段所需交貨數量大於第二階段，產量會應付不足，所以第二階段交貨前需額外再多生產，以供第三階段交貨，第二、三階段需合併生產。

③$\frac{B_2}{T_2-T_1}-\frac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}\geq\frac{B_1}{T_1}+\frac{c_2T_1}{4c_1}$ 且 $\frac{B_3}{T_3-T_2}-\frac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}<\frac{B_2}{T_2-T_1}$

$+\frac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}$

第二階段所需交貨數量大於第一階段，第三階段所需交貨數量小於第二階段，又可分為以下兩種生產計畫：

(1) $\frac{B_3}{T_3-T_2}-\frac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}<\frac{B_1+B_2}{T_2}+\frac{c_2T_1}{4c_1}$ ，可用類型 3-1 來生產。

又因 T_1、T_2 兩個時點，第二階段所需交貨數量大於第一階段，產量會應付不足，所以第二階段交貨前需額外再多生產，以供第三階段交貨，第二、三階段需合併生產。

(2) $\frac{B_3}{T_3-T_2}-\frac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}\geq\frac{B_1+B_2}{T_2}+\frac{c_2T_1}{4c_1}$ ，可用類型 1-1 來生產。

又因 T_1、T_2、T_3 三個時點，第二階段所需交貨數量大於第一階段，產量會應付不足，所以第一階段交貨前需要額外再多生產，以供第二階段交貨。第三階段所需交貨數量大於第二階段，產量會應付不足，所以第一階段交貨前需額外再多生產，以供第二階段交貨，三個階段需合併生產。

④ $\frac{B_2}{T_2-T_1}-\frac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}\geq\frac{B_1}{T_1}+\frac{c_2T_1}{4c_1}$ 且 $\frac{B_3}{T_3-T_2}-\frac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}\geq\frac{B_2}{T_2-T_1}$

$+\frac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}$ ，可用類型 1-1 來生產。

第二階段所需交貨數量大於第一階段，產量會應付不足，所以第一階段交貨前需要額外再多生產，以供第二階段交貨。第三階段所需交貨數量大於第二階段，產量會應付不足，所以第一階段交貨前需額外再多生產，以供第二階段交貨，三個階段需合併生產。

2. 當 $DF_1<0$ ，$DF_2\geq 0$ ，$DF_3\geq 0$

當T_1、T_2、T_3三個時間點，第一階段為延後生產，第二、第三階段皆為立即生產情況下，則會有以下四種生產方式：

①$\dfrac{B_2}{T_2-T_1}-\dfrac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}<\sqrt{\dfrac{c_2B_1}{c_1}}$ 且 $\dfrac{B_3}{T_3-T_2}-\dfrac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}<\dfrac{B_2}{T_2-T_1}+\dfrac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}$，可用類型 4-2 來生產。

第二階段所需交貨數量小於第一階段，但產量仍可以應付，所以第一階段交貨前不需額外再多生產，以供第二階段交貨。第三階段所需交貨數量小於第二階段，但產量仍可以應付，所以第一階段交貨前不需額外再多生產，以供第二階段交貨，三個階段各自生產即可。

②$\dfrac{B_2}{T_2-T_1}-\dfrac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}<\sqrt{\dfrac{c_2B_1}{c_1}}$ 且 $\dfrac{B_3}{T_3-T_2}-\dfrac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}\geq\dfrac{B_2}{T_2-T_1}+\dfrac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}$

第二階段所需交貨數量小於第一階段，第三階段所需交貨數量小於第二階段，又可分為以下兩種生產計畫：

(1)$\dfrac{B_2+B_3}{T_3-T_1}-\dfrac{c_2(T_3-T_1)}{4c_1}<\sqrt{\dfrac{c_2B_1}{c_1}}$，可用類型 2-2 來生產。

又因T_2、T_3兩個時點，第三階段所需交貨數量大於第二階段，產量會應付不足，所以第二階段交貨前需額外再多生產，以供第三階段交貨，第二、三階段需合併生產。

(2)$\dfrac{B_2+B_3}{T_3-T_1}-\dfrac{c_2(T_3-T_1)}{4c_1}\geq\sqrt{\dfrac{c_2B_1}{c_1}}$

又因T_2、T_3兩個時點，第三階段所需交貨數量大於第二階段，以供第三階段交貨，又可分為以下兩種生產計畫：

(i) $B_1+B_2+B_3<\dfrac{c_2T_3^2}{4c_1}$ ，可用類型 1-2 來生產。

三個階段需合併生產。

(ii) $B_1+B_2+B_3\geq\dfrac{c_2T_3^2}{4c_1}$ ，可用類型 1-1 來生產。

三個階段需合併生產。

③ $\dfrac{B_2}{T_2-T_1}-\dfrac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}\geq\sqrt{\dfrac{c_2B_1}{c_1}}$ 且 $\dfrac{B_3}{T_3-T_2}-\dfrac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}<\dfrac{B_2}{T_2-T_1}$ $+\dfrac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}$

第二階段所需交貨數量大於第一階段，第三階段所需交貨數量小於第二階段，又可分為以下兩種生產計畫：

(1) $B_1+B_2\geq\dfrac{c_2T_2^2}{4c_1}$

第一、二階段需合併生產，又可分為以下兩種生產計畫：

(i) $\dfrac{B_3}{T_3-T_2}-\dfrac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}<\dfrac{B_1+B_2}{T_2}+\dfrac{c_2T_2}{4c_1}$ ，可用類型 3-1 來生產。

第一、二階段需合併生產。

(ii) $\dfrac{B_3}{T_3-T_2}-\dfrac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}\geq\dfrac{B_1+B_2}{T_2}+\dfrac{c_2T_2}{4c_1}$ ，可用類型 1-1 來生產。

三個階段需合併生產。

(2) $B_1+B_2<\dfrac{c_2T_2^2}{4c_1}$

第一、二階段需合併生產，又可分為以下兩種生產計畫：

(i) $\dfrac{B_3}{T_3-T_2}-\dfrac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}<\sqrt{\dfrac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}}$ ，可用類型 3-2 來生產。

第一階段為延後生產，第二階段為立即生產，第一、二階段需合併生產。

$$\text{(ii)}\frac{B_3}{T_3-T_2}-\frac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}\geq\sqrt{\frac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}}$$

第一階段為延後生產，第二階段為立即生產，又可分為以下兩種生產計畫：

(a) $B_1+B_2+B_3<\dfrac{c_2T_3^2}{4c_1}$ ，可用類型 1-2 來生產。

三階段合併生產。

(b) $B_1+B_2+B_3\geq\dfrac{c_2T_3^2}{4c_1}$ ，可用類型 1-1 來生產。

三階段合併生產。

④ $\dfrac{B_2}{T_2-T_1}-\dfrac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}\geq\sqrt{\dfrac{c_2B_1}{c_1}}$ 且 $\dfrac{B_3}{T_3-T_2}-\dfrac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}\geq\dfrac{B_2}{T_2-T_1}+\dfrac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}$

第二階段所需交貨數量大於第一階段，第三階段所需交貨數量大於第二階段，又可分為以下兩種生產計畫：

(1) $B_1+B_2+B_3<\dfrac{c_2T_3^2}{4c_1}$，可用類型 1-2 來生產。

三個階段合併生產。

(2) $B_1+B_2+B_3\geq\dfrac{c_2T_3^2}{4c_1}$ ，可用類型 1-1 來生產。

三個階段合併生產。

3. 當 $DF_1\geq 0$ ，$DF_2<0$ ，$DF_3\geq 0$

當T_1、T_2、T_3三個時間點，第一階段為立即生產，第二階段皆為延後生產，第三階段皆為立即生產情況下，則會有以下兩種生產方式：

①$\dfrac{B_3}{T_3-T_2}-\dfrac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}<\sqrt{\dfrac{c_2B_2}{c_1}}$，可用類型 4-3 來生產。

第三階段所需交貨數量小於第二階段，但產量仍可以應付，所以第二階段交貨前不需額外再多生產，以供第三階段交貨，三個階段各自生產即可。

②$\dfrac{B_3}{T_3-T_2}-\dfrac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}\geq\sqrt{\dfrac{c_2B_2}{c_1}}$

第三階段所需交貨數量大於第二階段，又可分為以下兩種生產計畫：

(1)$B_2+B_3<\dfrac{c_2(T_3-T_1)^2}{4c_1}$，可用類型 2-3 來生產。

第二階段所需交貨數量小於第一階段，但產量仍可以應付，所以第一階段交貨前不需額外再多生產，以供第二階段交貨。第三階段所需交貨數量大於第二階段，產量會應付不足，所以第三階段交貨前需額外再多生產，以供第二階段交貨，第二、三階段需合併生產。

(2)$B_2+B_3\geq\dfrac{c_2(T_3-T_1)^2}{4c_1}$

第二、三階段需合併生產，又可分為以下兩種生產計畫：

(i)$\dfrac{B_2+B_3}{T_3-T_1}-\dfrac{c_2(T_3-T_1)}{4c_1}<\dfrac{B_1}{T_1}+\dfrac{c_2T_1}{4c_1}$，可用類型 2-1 來生產。

第一階段為延後生產，第二階段為立即生產，第三階段為立即生產，第二、三階段需合併生產。

(ii)$\dfrac{B_2+B_3}{T_3-T_1}-\dfrac{c_2(T_3-T_1)}{4c_1}\geq\dfrac{B_1}{T_1}+\dfrac{c_2T_1}{4c_1}$，可用類型 1-1 來生產。

第一階段為立即生產，第二階段為立即生產，第三階段為立即生產，三個階段需合併生產。

4. 當 $B_1 - \frac{c_2 T_1^2}{4c_1} \geq 0$，$B_2 - \frac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1} \geq 0$，$B_3 - \frac{c_2 (T_3 - T_2)^2}{4c_1} < 0$

當 T_1、T_2、T_3 三個時間點，第一、第二階段皆為立即生產，第三階段為延後生產情況下，則會有以下兩種生產方式：

① $\frac{B_2}{T_2 - T_1} - \frac{c_2 (T_2 - T_1)}{4c_1} < \frac{B_1}{T_1} + \frac{c_2 T_1}{4c_1}$，可用類型 4-4 來生產。

第二階段所需交貨數量小於第一階段，但產量仍可以應付，所以第一階段交貨前不需額外再多生產，以供第二階段交貨，三個階段各自生產即可。

② $\frac{B_2}{T_2 - T_1} - \frac{c_2 (T_2 - T_1)}{4c_1} \geq \frac{B_1}{T_1} + \frac{c_2 T_1}{4c_1}$，可用類型 3-3 來生產。

第二階段所需交貨數量大於第一階段，但產量仍可以應付，所以第一階段交貨前不需額外再多生產，以供第二階段交貨，第一、二階段需合併生產。

5. 當 $DF_1 < 0$，$DF_2 < 0$，$DF_3 \geq 0$

當 T_1、T_2、T_3 三個時間點，第一、第二階段皆為延後生產，第三階段為立即生產情況下，則會有以下兩種生產方式：

① $\frac{B_3}{T_3 - T_2} - \frac{c_2 (T_3 - T_2)}{4c_1} < \sqrt{\frac{c_2 B_2}{c_1}}$，可用類型 4-5 來生產。

第三階段所需交貨數量小於第二階段，但產量仍可以應付，所以第二階段交貨前不需額外再多生產，以三第二階段交貨，三個階段各自生產即可。

② $\dfrac{B_3}{T_3-T_2}-\dfrac{c_2(T_3-T_2)}{4c_1}\geq\sqrt{\dfrac{c_2B_2}{c_1}}$

第三階段所需交貨數量大於第二階段，又可分為以下兩種生產計畫：

(1) $B_2+B_3<\dfrac{c_2(T_3-T_1)^2}{4c_1}$ ，可用類型 2-4 來生產。

第二階段所需交貨數量小於第一階段，但產量仍可以應付，所以第一階段交貨前不需額外再多生產，以供第二階段交貨。第三階段所需交貨數量大於第二階段，產量會應付不足，所以第三階段交貨前需額外再多生產，以供第二階段交貨，第二、三階段需合併生產。

(2) $B_2+B_3\geq\dfrac{c_2(T_3-T_1)^2}{4c_1}$

第三階段所需交貨數量大於第二階段，又可分為以下兩種生產計畫：

(i) $\dfrac{B_2+B_3}{T_3-T_1}-\dfrac{c_2(T_3-T_1)}{4c_1}<\sqrt{\dfrac{c_2B_1}{c_1}}$ ，可用類型 2-2 來生產。

第二、三階段需合併生產。

(ii) $\dfrac{B_2+B_3}{T_3-T_1}-\dfrac{c_2(T_3-T_1)}{4c_1}\geq\sqrt{\dfrac{c_2B_1}{c_1}}$

第二、三階段需合併生產，又可分為以下兩種生產計畫：

(a) $B_1+B_2+B_3<\dfrac{c_2T_3^2}{4c_1}$ ，可用類型 1-2 來生產。

第二、三階段合併生產。

(b) $B_1+B_2+B_3\geq\dfrac{c_2T_3^2}{4c_1}$ ，可用類型 1-1 來生產。

三階段合併生產。

6. 當 $DF_1<0$，$DF_2\geq 0$，$DF_3<0$

當 T_1、T_2、T_3 三個時點，第一階段為延後生產，第二階段為立即生產，第三階段為延後生產情況下，則會有以下兩種生產方式：

① $\dfrac{B_2}{T_2-T_1}-\dfrac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}<\sqrt{\dfrac{c_2B_1}{c_1}}$，可用類型 4-6 來生產。

第二階段所需交貨數量小於第一階段，但產量仍可以應付，所以第一階段交貨前不需額外再多生產，以供第二階段交貨。第三階段所需交貨數量小於第二階段，但產量仍可以應付，所以第一階段交貨前不需額外再多生產，以供第二階段交貨，三個階段各自生產即可。

② $\dfrac{B_2}{T_2-T_1}-\dfrac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}\geq\sqrt{\dfrac{c_2B_1}{c_1}}$

第二階段所需交貨數量大於第一階段，又可分為以下兩種生產計畫：

(1) $B_1+B_2<\dfrac{c_2T_2^2}{4c_1}$，可用類型 3-4 來生產。

又因 T_1、T_2 兩個時點，第二階段所需交貨數量雖大於第一階段，但產量仍可以應付，所以第一階段交貨前不需要額外再多生產，以供第二階段交貨，第一、二階段則需合併。

(2) $B_1+B_2\geq\dfrac{c_2T_2^2}{4c_1}$，可用類型 3-3 來生產。

又因 T_1、T_2 兩個時點，第二階段所需交貨數量大於第一階段，產量會應付不足，所以第一階段改為立即生產，第一、二階段則需合併。

7. 當 $DF_1\geq 0$，$DF_2<0$，$DF_3<0$

當 T_1、T_2、T_3 三個時點，第一階段為立即生產，第二、第三階段皆為延後生產情況下，則生產計畫為，可用類型 4-7 來生產。

8. 當 $DF_1<0$，$DF_2<0$，$DF_3<0$

當T_1、T_2、T_3三個時點，三個階段皆為延後生產情況下，則生產計畫為，可用類型 4-8 來生產。

4.4 數值模擬

工廠的生產決策者與顧客簽訂合約，寫明在某約定時間點上要交足所訂購數量的產品，在制定生產計畫時要考慮生產與存貨兩種費用。生產費用通常取決於生產速率（單位時間的產量），生產速率越高費用越大，存貨費用自然由已經生產出來的產品數量來決定，數量越大則費用越大，所謂生產計畫這裡簡單是當作是到每一時刻所有的累積產量，它與每單位（如每天）的產量是可以推算。建立模型目的是要找尋出最佳化的生產計畫，使總費用（生產與存貨費用的總和）為最小。假設工廠需在交貨到期日時;需交出足夠貨品之數量給予顧客,依照訂單合約在R為每天可生產之乘數，第一期需交($T_1 * R = B_1$)單位的產品數量，第二期需交($T_2 * R = B_2$)單位的產品數量，第三期需交($T_3 * R = B_3$)單位的產品數量，c_2與c_1的比例關係為$c_2/c_1 = 0.5$，$c_2/c_1 = 1$，$c_2/c_1 = 2$，$c_2/c_1 = 5$，使用以下這四種比例來加以討論，其結果如以下四個表 4.2、表 4.3、表 4.4、表 4.5 所示。

表 4.2 數值模擬

$c_2/c_1 = 0.5$

T_1	T_2	T_3	R						
			1	2	3	4	5	10	100
1	2	3	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	2	4	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	2	5	3-1	3-1	3-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	2	10	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
1	2	100	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
1	3	4	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	3	5	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	3	10	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	1-1
1	3	100	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
1	4	5	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	4	10	3-1	3-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	4	100	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
1	5	10	3-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	5	100	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
1	10	100	4-4	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
2	3	4	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
2	3	5	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
2	3	10	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
2	3	100	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
2	4	5	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
2	4	10	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	1-1	1-1
2	4	100	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
2	5	10	3-1	3-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
2	5	100	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
2	10	100	4-4	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
3	4	5	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
3	4	10	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
3	4	100	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
3	5	10	3-1	3-1	3-1	1-1	1-1	1-1	1-1
3	5	100	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
3	10	100	4-4	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
4	5	10	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	1-1	1-1
4	5	100	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
4	10	100	4-4	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
5	10	100	4-4	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1

表 4.3 數值模擬

$c_2/c_1=1$

T_1	T_2	T_3	R						
			1	2	3	4	5	10	100
1	2	3	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	2	4	3-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	2	5	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	1-1	1-1
1	2	10	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
1	2	100	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
1	3	4	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	3	5	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	3	10	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	1-1
1	3	100	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
1	4	5	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	4	10	4-2	3-1	3-1	3-1	3-1	1-1	1-1
1	4	100	4-2	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
1	5	10	4-4	3-1	2-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	5	100	4-4	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
1	10	100	4-4	4-4	4-2	3-1	3-1	3-1	3-1
2	3	4	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
2	3	5	3-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
2	3	10	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
2	3	100	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
2	4	5	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
2	4	10	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	1-1
2	4	100	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
2	5	10	4-4	3-1	3-1	3-1	1-1	1-1	1-1
2	5	100	4-4	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
2	10	100	4-4	4-4	4-2	3-1	3-1	3-1	3-1
3	4	5	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
3	4	10	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
3	4	100	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
3	5	10	3-3	3-1	3-1	3-1	3-1	1-1	1-1
3	5	100	3-3	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
3	10	100	4-4	4-4	4-2	3-1	3-1	3-1	3-1
4	5	10	3-3	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	1-1
4	5	100	3-3	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
4	10	100	4-4	4-4	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
5	10	100	4-8	4-4	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1

表 4.4 數值模擬

$c_2/c_1=2$

T_1	T_2	T_3	R						
			1	2	3	4	5	10	100
1	2	3	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	2	4	3-1	3-1	3-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	2	5	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	1-1
1	2	10	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
1	2	100	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
1	3	4	4-4	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	3	5	4-4	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	3	10	4-4	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	1-1
1	3	100	4-4	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
1	4	5	4-4	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	4	10	4-4	4-2	3-1	3-1	4-1	3-1	1-1
1	4	100	4-4	4-2	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
1	5	10	4-4	4-4	4-2	3-1	4-1	1-1	1-1
1	5	100	4-4	4-4	4-2	3-1	3-1	3-1	3-1
1	10	100	4-4	4-4	4-4	4-4	4-2	3-1	3-1
2	3	4	3-3	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
2	3	5	3-3	3-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
2	3	10	3-3	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
2	3	100	3-3	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
2	4	5	4-4	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
2	4	10	4-4	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	1-1
2	4	100	4-4	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
2	5	10	4-4	4-4	3-1	3-1	3-1	1-1	1-1
2	5	100	4-4	4-4	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
2	10	100	4-4	4-4	4-4	4-4	4-2	3-1	3-1
3	4	5	4-8	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
3	4	10	4-8	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
3	4	100	4-8	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
3	5	10	4-8	3-3	3-1	3-1	3-1	3-1	1-1
3	5	100	4-8	3-3	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
3	10	100	4-8	4-4	4-4	4-4	4-2	3-1	3-1
4	5	10	4-8	3-3	3-1	3-1	3-1	3-1	1-1
4	5	100	4-8	3-3	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
4	10	100	4-8	4-4	4-4	4-4	4-2	3-1	3-1
5	10	100	4-8	4-8	4-4	4-4	3-1	3-1	3-1

表 4.5 數值模擬

$c_2/c_1 = 5$

T_1	T_2	T_3	R						
			1	2	3	4	5	10	100
1	2	3	4-8	4-4	1-1	1-1	1-1	1-1	1-1
1	2	4	4-8	4-4	3-1	3-1	3-1	1-1	1-1
1	2	5	4-8	4-4	3-1	3-1	3-1	3-1	1-1
1	2	10	4-8	4-4	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
1	2	100	4-8	4-4	3-1	3-1	3-1	3-1	3-1
1	3	4	4-8	4-4	4-4	1-1	1-1	1-1	1-1
1	3	5	4-8	4-4	4-4	4-2	1-1	1-1	1-1
1	3	10	4-8	4-4	4-4	4-2	3-1	3-1	3-1
1	3	100	4-8	4-4	4-4	4-2	3-1	3-1	3-1
1	4	5	4-8	4-4	4-4	4-4	1-1	1-1	1-1
1	4	10	4-8	4-4	4-4	4-4	4-2	3-1	1-1
1	4	100	4-8	4-4	4-4	4-4	4-2	3-1	3-1
1	5	10	4-8	4-4	4-4	4-4	4-4	3-1	1-1
1	5	100	4-8	4-4	4-4	4-4	4-4	3-1	3-1
1	10	100	4-8	4-4	4-4	4-4	4-4	4-4	3-1
2	3	4	4-8	4-8	3-3	1-1	1-1	1-1	1-1
2	3	5	4-8	4-8	3-3	3-1	3-1	1-1	1-1
2	3	10	4-8	4-8	3-3	3-1	3-1	3-1	3-1
2	3	100	4-8	4-8	3-3	3-1	3-1	3-1	3-1
2	4	5	4-8	4-8	4-4	4-4	1-1	1-1	1-1
2	4	10	4-8	4-8	4-4	4-4	3-1	3-1	1-1
2	4	100	4-8	4-8	4-4	4-4	3-1	3-1	3-1
2	5	10	4-8	4-8	4-4	4-4	4-4	3-1	1-1
2	5	100	4-8	4-8	4-4	4-4	4-4	3-1	3-1
2	10	100	4-8	4-8	4-4	4-4	4-4	4-4	3-1
3	4	5	4-8	4-8	4-8	3-3	1-1	1-1	1-1
3	4	10	4-8	4-8	4-8	3-3	3-1	3-1	3-1
3	4	100	4-8	4-8	4-8	3-3	3-1	3-1	3-1
3	5	10	4-8	4-8	4-8	4-4	3-3	3-1	1-1
3	5	100	4-8	4-8	4-8	4-4	3-3	3-1	3-1
3	10	100	4-8	4-8	4-8	4-4	4-4	4-4	3-1
4	5	10	4-8	4-8	4-8	4-8	3-3	3-1	1-1
4	5	100	4-8	4-8	4-8	4-8	3-3	3-1	3-1
4	10	100	4-8	4-8	4-8	4-8	4-4	4-4	3-1
5	10	100	4-8	4-8	4-8	4-8	4-8	4-4	3-1

從表 4.2 可知，R 為每天可生產之乘數，第一期需交($T_1 * R = B_1$)單位的產品數量，第二期需交($T_2 * R = B_2$)單位的產品數量，第三期需交($T_3 * R = B_3$)單位的產品數量，當 R 越大時會從三個階段合併生產，變成第一、二階段合併生產；第三階段獨自生產。

從表 4.3 可知，R 為每天可生產之乘數，第一期需交($T_1 * R = B_1$)單位的產品數量，第二期需交($T_2 * R = B_2$)單位的產品數量，第三期需交($T_3 * R = B_3$)單位的產品數量，當 R 越大時會從三個階段合併生產，變成第一、二階段合併生產；第三階段獨自生產。

從表 4.4 可知，R 為每天可生產之乘數，第一期需交($T_1 * R = B_1$)單位的產品數量，第二期需交($T_2 * R = B_2$)單位的產品數量，第三期需交($T_3 * R = B_3$)單位的產品數量，當 R 越大時會從三個階段各自生產，變成第一、二階段合併生產；第三階段獨自生產。

從表 4.5 可知，R 為每天可生產之乘數，第一期需交($T_1 * R = B_1$)單位的產品數量，第二期需交($T_2 * R = B_2$)單位的產品數量，第三期需交($T_3 * R = B_3$)單位的產品數量，當 R 越大時會從三個階段合併生產，變成三個階段各自生產。

由上述四個表可得知，當 c_2 與 c_1 的比值越大時，三個階段各自生產即可；R 越大時，第一、二階段需合併生產；第三階段獨自生產。

第五章 結論與建議

由於環境快速變遷以及科技時代的來臨，全球化市場競爭趨勢明顯使得企業面臨產品需求多變化的考驗，生產型式已由過去製程的大量標準化，逐漸轉變為客製化導向，因為顧客訂單趨於多樣化，他們的需求是無法先行預測；以及生產者的生產廠房設備規模大小等因素，為了吸引顧客來下訂單，需符合他們的需求，針對同型態的產品的訂單式生產，從成本的構面來建構在未考慮產能受限之三期交貨期生產計畫的數學模式中，然後利用變分法之尤拉方程式與微積分來尋求最佳解。生產決策者最注重的是最佳生產起始時點與在任何給定時點的最佳生產函數。此外，最佳解之目標值函數隨著主要參數的變動，也可以提供生產決策者作為其生產決策的參考依據，更能使公司獲得到最大產值，以達到生產管理的目的。

5.1 結論

本研究主要透過數學推導與資料模擬方式進行，在求出最佳解後，透過數值模擬，三階段訂單式生產之最佳生產函數$W^*(t)$共可區分為四大類型，在分別討論其中各種情形，綜合以上分析結果，本研究進一步建構最佳生產函數$W^*(t)$之決策準則，以提供相關生產決策者在實務應用上的決策參考。在本研究中討論考慮產能未受限之三期交貨期生產計畫，先寫出數學模式，使用變分法、微積分等相關數學方法，利用變數變換的方法，然後對應一組函數及給定一個可行解，會存在兩個實數a_1與a_2，在考慮一般式之後，在訂單式生產系統中，不一定即需立即生產，也可

延後生產；模式求解可知有八種可能的情形後求出最佳解a_1^*與a_2^*後，模式的最佳解即可求得。

5.2 後續研究建議

倘若某一廠商遇到同型態產品的三階段訂單式生產之產品生產問題時，可使用本論文所討論出最佳生產函數$W^*(t)$之決策準則結果；以供管理者做為參考之依據，從以前文獻中多數只討論產能未受限及產能受限之單期交貨期生產計畫，本研究擴充至討論產能未受限三期交貨期生產計畫，後續研究可以在繼續延伸至多期交貨期生產計畫，在從中加以討論產能受限及產能未受限情況為何，或同一訂單分多階段生產；及同一時期同時生產不同之訂單產品。

參考文獻

一、中文部分

1. 吳銘源（民 90），以利潤模式為基礎之緊急訂單策略分析，清華大學工業工程與工程管理系碩士論文。
2. 洪柏璿（民 96），干擾性插單之成本模型與決策系統建立－以半導體產為例，交通大學工業工程與管理學系碩士論文。
3. 陳俊龍（民 86），訂單式生產系統下承接緊急訂單之評估模式，屏東科技學院資訊管理技術碩士論文。
4. 陳美楝（民 89），訂單式生產系統之緊急訂單評估模式，義守大學管理科學碩士論文。
5. 陳舜源（民 84），承接緊急訂單之評估模式，交通大學工業工程碩士論文。
6. 陳淼勝、蔡福建 (民 97)，各時點產能未受限制之單一交貨期的最佳生產計畫，管理與資訊學報，第 13 卷，77-100 頁。
7. 陽念華（民 95），機械製造業生產排程與插單重排程之研究，樹德科技大學經營管理碩士論文。
8. 黃政喻（民 98），顧客滿意度與交易延遲對訂單式生產系統接單決策之影響，朝陽科技大學工業工程與管理系碩士論文。
9. 詹璨嶸（民 92），自行車產業供應鏈體系下緊急訂單承接評估研究，台灣大學機械工程學碩士論文。
10. 劉明恩（民 84），訂單式生產系統在製品延遲時之決策分析從生產成本觀點考量，台灣科技大學管理技術碩士論文。
11. 劉俊輝（民 96），訂單式生產環境下價格、交期與排程的決策，屏東科技大學資訊管理系碩士論文。
12. 劉豐榮（民 96），數學大師 ：尤拉(Leonhard Euler, 1707~1783)，正

修通識教育學報，第四期 2007 年 6 月， 267～306 頁。

13. 蔡福建（民 97），訂單式生產之最適控制模式的建構與分析，南華大學企業管理系管理科學博士論文。

14. 魏慶昌（民 94），訂單收受與否即時評估模式之研究，大葉大學資訊管理學系碩士論文。

二、英文部分

1. Chen, M.S. & Lan, C.H. (2001a), Dynamic Production Plan of Probabilistic Market Demand and Fixed Selling Time with Unreliable Machines and Fixed Selling Time with Unreliable Machines and Obtainable Working Hour Capacity, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.44, pp. 57-66.
2. Chen, M.S. & Lan, C.H. (2001b), Two-stage Production with Unreliable Machine and Finite Working Hour Capacity, International Journal of Information and Management Sciences, Vol. 12, pp. 11-24.
3. Chen, M.S. & Chu, M.C. (2003), The Analysis of Optimal Control in Matching Problem Between Manufacturing and Marketing, European Journal of Operational Research, Vol. 150, pp. 293-303.
4. Chen, M.S. & Tsai F.C. (2008), The Optimal Production Plan under Limited Production Capacity at Any Point in Time. Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.51, pp. 81-94.
5. Chiang, A. (1992), Dynamic optimization, McGraw-Hill, Inc., Singapore.
6. Feichtinger, G. & Harth, R. (1985), Optimal Pricing and Production in an Inventory Model, European Journal of Operational Research, Vol.19, pp. 45-56.
7. Flatto, L. (1979), Advanced Calculus, Second printing, Mei Ya Publications, Inc. Taipei, Taiwan.
8. Friendman, A. (1983), Advanced Calculus, Fifth printing, Mei Ya Publications, Inc. Taipei, Taiwan.
9. Gary M. K. & Hector H.G.（1990）, A conceptual model for demand management in the assemble-to-order environment, Journal of Operations Management, Vol 9, pp. 65-84.
10. Grubbstrom, R.W. & Wang, Z. (2003), A stochastic Model of

Multi-Level/Multi-stage Capacity Constrained Production-Inventory Systems, International Journal of Production Economics, Vol. 81, pp. 483-494.

11. Horiguchi, K., Raghavan, N., Uzsoy, R. & Venkateswaran, S. (2001), Finite Capacity Production Planning Algorithms for a Semiconductor wafer fabrication facility, International Journal of Production Research, Vol.39, pp. 825-842.

12. Jing, T.T., Hu Y., Feng Z., Hong, X.L., Hu X., Yan G.（2008）, A full-scale solution to the rectilinear obstacle-avoiding Steiner problem, Integration, the VLSI Journal, Vol 41, Issue 3, May 2008, pp. 413-425.

13. Kamien, M.I. & Schwartz, N.L. (1991), Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, Second Edition, Elsevier, North Holland.

14. Mohebbi, E. & Choobineh, F.(2005), The impact of component commonality in an assemble-to-order environment under supply and demand uncertainty. Omega, Vol.33, pp.472-482.

15. Soroush, H. (1999), Sequencing and due-date determination in the Stochastic single machine problem with earliness and tardiness costs, European Journal of Operational Research, Vol.113, pp. 450-468.

16. Sox, C. & Muckstadt, J. (1997), Optimization-based Planning for the Stochastic Lot-Scheduling Problem, IIE Transactions, Vol.29, pp. 349-357.

17. Wu, M.C. & Chen, S.Y. (1996), Cost model for justifying the acceptance of rush orders, International Journal of Production Research, Vol. 34, pp. 1963-1974.

18. Wu, M.C. & Chen, S.Y. (1997), A multiple criteria decision-making model for justifying the acceptance of rush orders, The Management of Operations, Vol 8, Issue 8 December, pp.753 – 761.