

南 華 大 學

資訊管理學系

碩士論文

運用模糊測度支援電腦適性化評量機制

A mechanism to support a adaptive assessment system
by apply fuzzy measure.

研 究 生：林 明 宏

指 導 教 授：王 昌 斌 教 授

中 華 民 國 九 十 八 年 六 月 三 十 日

南 華 大 學
資 訊 管 理 學 研 究 所
碩 士 學 位 論 文

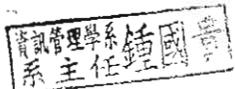
運用模糊測度支援電腦適性化評量機制

研究生：林明宏

經考試合格特此證明

口試委員：謝品霖
鍾國貴
馮文祥

指導教授：馮文祥

系主任(所長)：

口試日期：中華民國 98 年 6 月 30 日

誌 謝

古人說：光陰似箭、歲月如梭。在日復一日的流逝中，即將取得碩士學位。在這段日子裡要感謝所有上課的老師，因為寫作論文的訓練，不是像知識般的傳授，每位上課的老師都盡其所能的引導我們體會論文的寫作。尤其是指導教授王昌斌老師的諄諄指導，雖然說論文的寫作是要靠自己去完成的，但老師點撥一下，助益甚大。

還有口考老師鍾國貴老師、謝昆霖老師的指導，讓論文的完成改進不少。

也要感謝同師門的同學，英燦、嘉民的鼓勵及幫忙，還有純慧的大力協助，給了我很多的幫忙。在程式設計的部份，鄭宗信同學、魏嘉延同學及曾勁潔先生給了我很多的協助，研究過程才能順利的進展。

最後要感謝家人的支持，老婆彩燕辛苦的教導兩個幼兒，讓我無後顧之憂，尤其是我媽，她居然比我還高興。感嘆人生歲月苦短，稍縱即逝，自我的成長已達到一個階段，仍會利用零碎的時間自我充實，然而生活的重心要回歸家庭，感恩自己的親人，對社會做一些有益的事。

運用模糊測度支援電腦適性化評量機制

學生：林明宏

指導教授：王昌斌教授

南 華 大 學 資 訊 管 理 學 系 碩 士 班

摘 要

本研究設計支援適性化評量之電腦系統，目的在根據學生的表現提供合適的題目，並診斷學生的學習成果及提供教學上的建議。

在本文中以一組向量屬性來表示一道題目，這組屬性分成兩個部份，即主題概念和解題能力。這些屬性分別以模糊統計試驗及屬性空間測度的方式，利用教師對題目的敘述所隱含的概念及解題所需的能力加以判斷以獲得數值。然後再以教師對題目的敘述所隱含的概念所判斷的數值以模糊聚類分析及判斷屬性值強度的方式分別建立兩種題目群組以提供兩種選題策略的運用，然後根據學生的表現提供不同難度或不同概念題目的個別化施測。

本研究首先以分數為主題，從分數涵義的構面分成五個屬性，數學解題能力的構面則分成三個屬性，期望以階段性複習評量為前提下，建立評量題目可以自由增刪的電腦適性化評量系統。

關鍵詞：模糊理論、分數概念、電腦適性化評量

A mechanism to support a adaptive assessment system by apply fuzzy measure.

Student : Ming-hung Lin

Advisors : Dr. Chin-Bin Wang

Department of Information Management

The M.I.M. Program

Nan-Hua University

ABSTRACT

This research aims at designing computer system to support adaptive assessment with the purpose of tailoring the appropriate question based on the students' performance. Moreover, the learning performance of students is examined and suggestions are provided for teaching instructions.

In this research, a set of vector attribute is exploited to represent a single question. This set of vector attribute is categorized into two sections including the theme concept and problem-solving ability. Subsequently, fuzzy statistics testing and attribute-space measuring are performed on these attributes. By determining the implicated concept from the teacher's explanation for the question and ability required to solve the problem, values are acquired. Furthermore, the value acquired for the implicated concept from the teacher's explanation of the question is adopted for fuzzy cluster analysis and estimation of magnitude for the attribute value. Accordingly, two groups of questions are respectively established to yield the application for two types of item selection strategy. Hence, personalized testing with assorted difficulty levels or distinct question concept is administered based on the students' ability.

Initially, this research employs fraction as the theme and categorizes the dimension of fraction definition into four attributes. Besides, the dimension of mathematical problem-solving ability is divided into three attributes. With the phase-in revision assessment as the fundamental, computer adaptive assessment system which is capable of adding or removing assessment question freely can be constructed.

Keywords: fuzzy theory, fraction concept, Computer Adaptive Assessment (CAA)

目 錄

論文口試合格證明	iv
誌謝	v
中文摘要	vi
英文摘要	vii
目錄	viii
表目錄	x
圖目錄	xi
第一章 緒論	1
第一節 研究動機及背景	1
第二節 研究目的	3
第三節 研究限制	4
第四節 研究流程	5
第五節 論文架構	8
第二章 文獻探討	9
第一節 電腦適性化評量	9
第二節 分數概念的探討	11
壹、從分數的數學建構與應用涵義看分數概念	11
貳、從單位概念的發展與分數的學習看分數概念	12
參、從教學單元看分數概念	14
第三節 數學解題歷程	16
第四節 模糊理論的探討	18
壹、模糊集合	19
貳、歸屬函數的建立	22
參、題目向量屬性值的測度	38
肆、模糊聚類分析在選題策略上的應用	42
第三章 研究方法	48
第一節 問卷設計	48
第二節 運用模糊測度建立題目群組	49
壹、建立題目向量屬性值	49
貳、選題策略 I 的題目群聚	50
參、選題策略 II 的題目群聚	50
第三節 選題流程的探討	51
第四節 系統建置	56
第四章 實作及解釋	59
第一節 試題的聚類分析	59
壹、選題策略 I 的群聚	59

貳、選題策略II的群聚·····	65
參、題目的群聚示例·····	67
第二節 施測結果與分析·····	70
壹、施測結果·····	70
貳、以整體答對率來看·····	76
參、以資料庫內容分析個別的學習概念·····	78
第五章 結論與省思·····	80
第一節 結 論·····	80
第二節 研究過程的省思·····	81
壹、研究方法上的省思·····	81
貳、研究結果上的省思·····	81
參考書目·····	84
附錄一：問卷說明一·····	86
附錄二：問卷說明二·····	88
附錄三：計算模糊等價矩陣之 Matlab 程式·····	89

表 目 錄

表 1	分數題目的七個屬性	18
表 2	129 人對”青年人”最適宜年齡範圍估計的歸屬度試驗.....	23
表 3	n 個人對 27 歲是否是” 青年人”的統計.....	25
表 4	傳統一人一票之投票情形	27
表 5	以歸屬函數求出之投票情形.....	28
表 6	本文中五點量表之三角模糊數.....	32
表 7	8 人中只勾選□3、□4 時本研究方法對模糊德菲法的誤差百分率.....	33
表 8	8 人中只勾選□3、□4、□5 時本研究方法對模糊德菲法的誤差百分.....	35
表 9	『分數概念』的題目屬	39
表 10	『解題能力』的題目屬性	40
表 11	三年級困難程度題目問卷資料.....	59
表 12	三年級困難程度題目之相似矩.....	60
表 13	三年級困難程度題目之模糊等價矩陣.....	61
表 14	選題策略 II 的群聚編.....	65
表 15	三年級困難程度題目在『分數概念』的題目屬性值.....	65
表 16	六年級中等程度題庫在選題策略 I 時形成之題目群聚.....	67
表 17	六年級中等程度題庫選題策略 I 群聚編號 C2 之題目.....	67
表 18	六年級中等程度題庫選題策略 I 群聚編號 C3 之題目.....	68
表 19	六乙施測結果.....	71
表 20	六甲施測結果.....	74

圖 目 錄

圖 1	研究流程圖.....	7
-----	------------	---

圖 2	129 人對”青年人”最適宜年齡範圍估計的歸屬度試驗……	23
圖 3	n 個人對 27 歲是否是” 青年人”的統計……	26
圖 4	三角模糊數……	30
圖 5	8 人中只勾選□3、□4 時本研究方法對模糊德菲法的誤差百分率……	34
圖 6	8 人中只勾選□3、□4、□5 時本研究方法對模糊德菲法的誤差百分率……	38
圖 7	以年級為單位的選題流程圖……	53
圖 8	選題流程演算法……	55
圖 9	網路測驗之三層次遠距架構……	56
圖 10	題目編輯畫面……	56
圖 11	題目施測畫面……	58
圖 12	六年級中等程度題目在 $\lambda=0.3475$ 時形成之題目群……	64
圖 13	六乙 13 號與 16 號在資料庫中的答題狀……	78

第一章 緒 論

第一節 研究背景及動機

隨著電腦的普及，將可利用電腦所提供之互動學習的指導，幫助學生自行學習或複習。因此，探討如何利用電腦做適性化評量將是一個值得研究的方向。對於電腦適性化評量的探討，本文則以階段性複習評量為探討對象。

在九年一貫的課程設計中，將學生的學習過程分成不同的學習階段，以數學領域為例，國小一至三年級為第一個學習階段，四至五年級為第二個學習階段，六至七年級為第三個學習階段，而在同一個學習階段必須使用同一個課程版本，進入不同的學習階段才能考慮是否要更改版本，這是為了避免如果在同一個學習階段的不同年級使用不同的課程版本，有可能漏失需要學習的課程內容概念，也就是說不同的課程版本在同一個學習階段中，可能有不同的課程結構及學習順序，但就同一個學習階段來說，要達成的學習目標是一致的。

學習的過程是總是需要加以複習，當學生完成一個階段的學習，準備要進入下一個階段的學習前，針對前一個階段應有的學習概念再加以檢測及適度的複習以建立清楚的概念。由於成熟的因素，對於學生能解決一道題目，當初可能只知道如何做，現在也許能更了解為何這麼做，就傳統文化的用語來說，這是溫故知新，就認知心理學來說，這是調整認知結構重新理解一件事物。因此階段性的複習評量可提供學生一個學習機會，以期建立較好的基礎以進入下一個階段的學習。本文所探討的成果，預期對大約在中等程度附近的學生幫助較大。

至於方法的選用上，模糊理論可有以下的特點：

一、模糊理論可用於電腦系統的設計。

題目可在電腦中建立適合的群組以供選用。

二、模糊理論模仿人類的推理方式。

在自然和社會現象中，差異往往要通過一個過渡的形式，而處於過渡中的差異，便具有“亦此亦彼”的性質（馮國臣，2007），而學習概念的建立同樣處於一個過渡的形式，因此學生對概念瞭解及熟練的程度，其實都具有中間過渡的不明確性。另外參考模糊理論的發展源起，可說是對於複雜數學模型的反動，查德教授因為看到他的同事競相提出愈趨複雜的數學模型，查德教授避開競爭以常識研究而提出模糊集的觀念（林基興譯，1994）。Bart Kosko 在所著“模糊思考”一書中自敘與查德教授為多年相交的好友，Bart Kosko 認為查德教授的最大貢獻是他在模糊集合的觀念和研究而不是後來的數學。查德教授看出系統越複雜時，精確描述就更沒意義，後來稱之為「不相容原理」(principle of incompatibility)：越精確越不相干 (Precision up, relev)。查德教授在 1972 年底之前已這麼描述不相容原理：

系統複雜度增加時，我們精確與有意義地說明的程度就遞減，直到某個門檻值，過此則精確與有意義（或關聯）變成幾乎相互排斥特性。……另外角度的說法是：「越仔細看現實世界問題，答案就越模糊。」（林基興譯，1994）

在“模糊思考”一書中以下面的例子詮釋適應模糊系統，以倒車入庫為例，司機將車子倒車入庫，在司機的頭腦中並非建立

複雜的數學模型，只是簡單的判斷大約向左轉多少或向右轉多少，只要能把車停進車庫便可，在這個基礎上再慢慢調整，以致後來能精確的倒車入庫。因此“模糊思考”有先追求“差不多”再逐漸追求“精確”的思維。因此從以上的巨觀思維，嘗試如何運用模糊理論來探討電腦適性化評量。

三、從應用的角度思考。

本研究則從應用的角度著手，不探討細節的內部認知歷程。例如概念與概念之間、概念與題目之間、題目與題目之間，有可能形成複雜的連結關係，或是複雜的參數估計的問題。這類論文有知識發現的價值，可能找出內部隱而未顯的關係或是影響概念學習的因素，本文則從其他的方向思考，運用模糊理論來直接處理系統的複雜性（指概念與概念之間、概念與題目之間、題目與題目之間，有可能形成複雜的連結關係），將既有的題目直接納入評量題庫中，並且允許評量題庫能自由的增刪題目，在這個條件下建立動態評量的方法，根據學生不同的表現給予合適的題目，以判斷學生的學習狀況。

第二節 研究目的

本文利用給予題目一組向量屬性的方式，建立一個可適合不同科目的電腦適性化評量系統。目的在試圖提高對個別學生在已學習過的概念中找出需要加強部份的效率。

利用電腦適性化評量，能依據個別學生不同的表現給予不同評量題目，以判斷個別學生的學習狀況並提出建議，不僅節省老師在施測上的心力，施測後對每位學生都可加以指導，有些學生可針對不會的

概念加以指導，學生在這些概念可能須要重新學習。有些學生可能是有些部分不夠熟練，找出學生較不熟練的概念讓學生自行加強練習，使得學生複習的部份處於已有但尚未完全成熟的概念，一點點的挑戰性更容易建立學習的信心並維持學生學習動機。藉由上述個別化指導指導的方式達成教師補救教學及學生自行學習上的效率。

在本文中則實作一個分數的電腦化適性評量系統，評量五年級學生升上六年級，也就是在數學學習領域完成第二學習階段將進入第三學習階段時，在分數方面的學習狀況，以作為補救教學或學生自行學習的參考。

第三節 研究限制

實驗的效果至少考慮以下四項因素，而這些因素與方法無關。

一、屬性值歸屬度的穩定性是否足夠

由於問卷的填答不易，因此填答的份數不多，這將影響屬性值歸屬度的穩定性，造成題目在分群上的差異。

二、題目的難易程度歸類是否恰當

題目難易程度根據命題光碟的分類而加以歸類，難易程度的分類是否恰當，尚需驗證。

三、題目形式的多樣性及題數是否充足

本研究的預設立場在於希望能處理有大量題目的題庫，在探討的過程以人工隨機方式挑選 262 題，分布在三、四、五、六上四個年級，而每個年級有簡單、中等、困難三種難易度，因此 256 題分布在 12 個範圍中，每個範圍的題目數目不多，題目做分群時，

有的群聚內只有一題。

註：

1. 數學領域第二階段為四、五年級，因為考慮程度差的學生可能退至三年級，所以題庫範圍為三年級至六上。

四、演算法中的參數設定僅是大約估計

例如在選題策略 I，一次測驗大概要幾題較合適，以及表現良好而進級，依據的答對率是 85%，如果改成 90% 是否會更好，這些參數如何微調以達到更好的效率。

以上的誤差因素皆與方法無關，因為如果挑選的題目不同，在相同的方法下給學生測驗的題目自然不同，另外題目難易度的歸類不同及題目屬性值有所差異，這都會影響實驗的效果。因此在研究過程的嚴謹性方面並不足夠，只是嘗試提出一個可行的方向。

對於電腦化適性評量發展，在研究團隊中應包含學科、測驗、資訊系統專家及實務教學的中小學老師，共同開發評量系統。本研究在個人心力、資源有限的情況下，無法建立大量題目的題庫，只能提出構想並做小型的模擬，並說明小型題庫所遭遇的問題。

第四節 研究流程

首先由文獻資料探討適合分數這個主題的概念分類方法，起初由數學能力指標著手，後來發現數學能力指標可能較適合小範圍的概念分類，最後由分數涵義的建構著手，找出 1. 除法 2. 比的概念 3. 單位分數 4. 等值分數等四個構面，作為第三學習階段前，對於有關分數的題目建立概念分類方法。

這四個構面除了可以建構對分數涵義的了解，也是進一步學習所需的基石。然後將題目的屬性分成兩個部份，即主題概念和解題能力，主題概念的部份以上述的四個構面形成四個屬性，解題能力的部份，則參考 Mayer 的解題歷程，以問題的表達、解題策略能力、計算能力形成三個屬性。尋找題目的概念分類方法這個部份最為重要，是後續設計的基礎。茲將研究流程圖示如下：

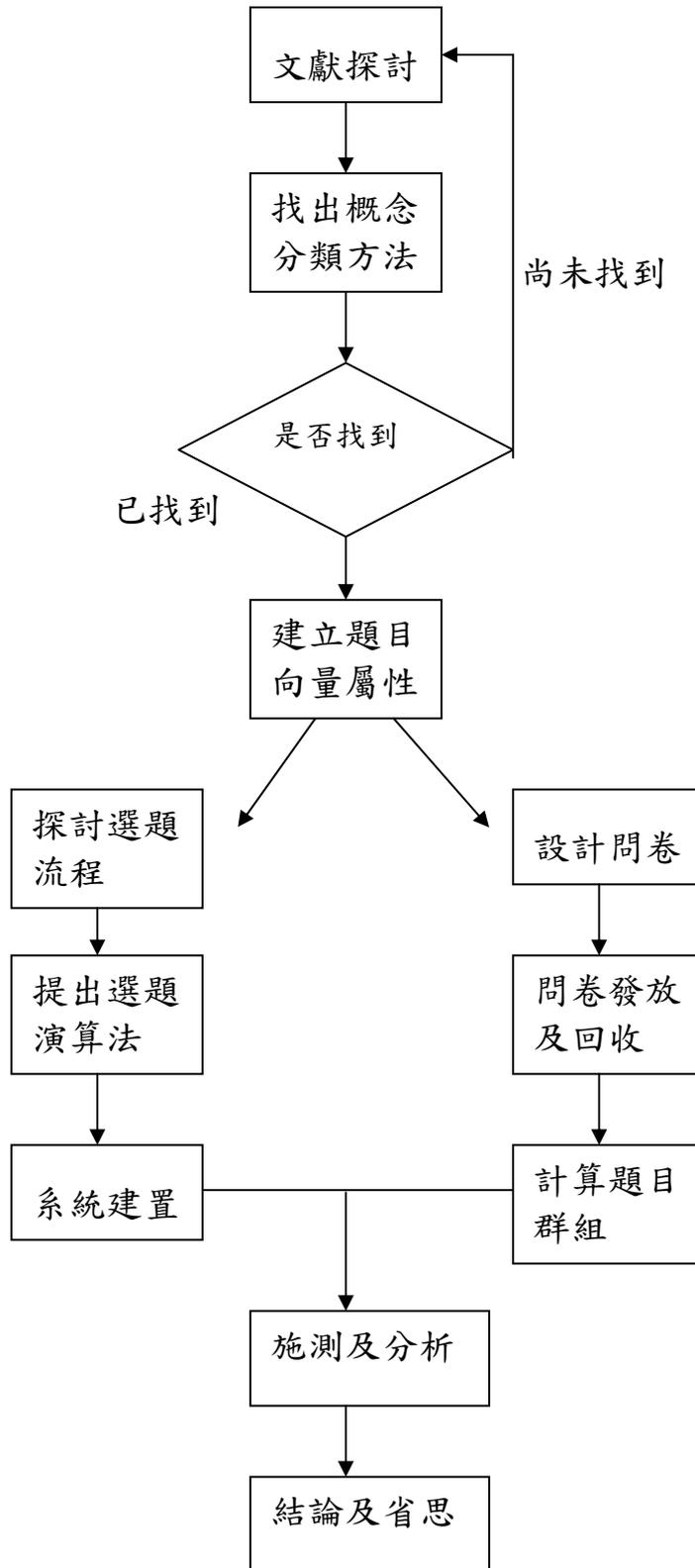


圖 1：研究流程圖

資料來源：本研究建置

第五節 論文架構

- 第一章 說明研究動機及背景、研究目的、研究限制、研究流程及論文架構。
- 第二章 在文獻探討中說明本研究中對電腦適性化評量的定位、找出設計題目向量屬性的方法及如何運用模糊測度的方法。
- 第三章 說明研究方法，其步驟如下
設計問卷、運用模糊測度的方法、提出選題流程，根據選題流程提出演算法及系統建置。
- 第四章 實際計算題目群組並解釋所遭遇的問題，實施測驗及測驗結果的分析。
- 第五章 結論及省思
說明研究的結果以及對研究方法及研究結果的省思。
找出適合的學科主題之概念分類是應用本研究所提出的方法之關鍵。

第二章 文獻探討

首先從相關文獻中探討本研究的各個要素，如電腦適性化評量、分數概念的涵義、數學解題歷程及模糊理論的探討。以作為後續研究設計的基礎。

第一節 電腦適性化評量

電腦化適性測驗(computerized-adaptive test, CAT)的提出也就是利用電腦的快速計算能力，針對學生的不同程度給予不同能力的測驗，目的在於準確的找出學生能力值。

適性(adaptive)測驗是量身訂製(tailored)的測驗，也是個別化測驗(individualized test)。意指給予符合受試者能力水準的題目最能反映的受試者的能力。實施適性測驗的原理很簡單，當受試者做第一個試題後，如果答對，則下一題會比較難一點；反之，則下一題會容易一些(何榮桂，?)。

郭伯臣(2004)的國科會專題研究「國小數學科電腦化適性診斷測驗(II)」提到，一般而言，電腦化適性測驗可分為二大類：

- (一) 以試題反應理論(Item Response Theory, IRT)為基礎的適性測驗。
- (二) 以知識或試題結構為基礎的適性測驗。

但 IRT 需要大量的樣本，每一個題目都必須經過多次的測試後，才能表示出題目的有效性，更進一步的才可用來表現受測者的能力指標。當受測者完成測試後，施測的結果為一能力值或是量尺分數，故使用以 IRT 為基礎的電腦化適性測驗來進行學習診斷，所提供的訊息並不是用於錯誤類型診斷，IRT 本身較適合於成就測驗的環

境，如大學學力測驗（劉育隆等，2006）。

以知識及試題結構為基礎具有診斷學生錯誤概念，Airasian & Bart 的「順序理論」(ordering theory, OT)及 Takaya 的「試題關聯結構法」(item relationship structure, IRS)，此二者是常用來定義試題間順序性的方法；早期這些方法常用於比較不同教學方法或不同版本教材，是否造成學生知識結構不同，主要是以紙筆測驗結果來進行知識結構之估計（劉育隆等，2006）。

如果以知識為基礎的適性測驗應用於形成性評量，則牽涉到學生的學習流程不見得相同，因此本文以階段性複習評量為探討對象，選擇國小學童最感迷惑的分數為主題，當學生於小五升上小六後，數學學習領域將結束第二階段進入第三階段時，不管過去的學習流程或版本如何，評量學生對於分數概念的表現情況，以作為六年級教師的參考。

此外，英國數學教育家 Skemp 在數學學習心理一書中提到，當我們理解一件事物時，表示把這件事情同化入一個適當的知識結構中（陳澤民譯，1995）。因此在本文中對電腦適性化評量的目的不在訂定許多的細目以瞭解學生不會的概念，而是找出學習概念不熟的範圍，在這個範圍可能有答對及答錯的題目，學生可作統整性的複習。

另外，從電腦測驗的趨勢來看，現今測驗專家們也正積極地發展電腦化測驗(CBT)。電腦測驗在教育上的應用，依類型來說Ferraris (1991)認為電腦使用在教育上的施測大約可以分為以下三大類：

一、電腦管理測驗(Computer Managed Testing, CMT)：檢查學生的答案、計分並計算有關的統計數。

二、電腦實施測驗(Computer Administered Testing, CAT)：電腦與學生直接對話以測驗學生所具備的知識，電腦不僅自動進行施測，並分析測驗的結果，且可根據學生的答題反應自行選擇試題，組織測驗的題目。

三、組織測驗(Test Synthesis, TS)：只要給予測驗的特徵(如水準、主題)，電腦就會自動從資料庫中提取所需要的試題，自行組織試題。

因此在本文中針對上述電腦測驗發展的趨勢，嘗試以組織試題的方式，實施電腦適性化評量。

第二節分數概念的探討

本節中探討分數的概念分類。

壹、從分數的數學建構與應用涵義看分數概念

有不少學者分析分數在生活情境中所表現的意義，Ohlsson (1988) 及 Kieren (1988) 認為分數有四種建構：商的函數、有理數、二元向量、合成函數(劉秋木, 1996)。

一、分數是商的函數：分數基本的性質是兩個數之間除的關係。

二、有理數： x/y 不表示關係，亦即不表示函數，而是表示一個對象(object)或代表商的函數的一個不變值，例如 $3/6$ ， $2/4$ ， $1/2$ 若從有理數觀點來看是相同的，代表相同的值。

三、二元向量：一個量若含有大小與斜度(slope)，稱為二元向量。 x/y 可以看成是斜度，也表示兩個量之間的比較關係。

(一) 比(ratio)

比表示兩個量之間的比較關係，例如班上男生 21 個女生 16 個，則男生、女生的比是 21：16，比值為 21/16。

(二) 比例 (proportion)

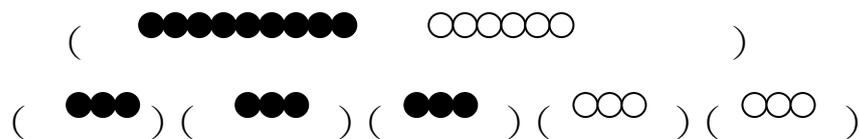
表示兩個比之間的等值，例如速率是一個量與時間的比， p/q 表示為一速率時，代表兩種量數的函數關係：時間增加工作量也增加。

四、合成函數： p/q 可看成一個複合函數，若某數 x 乘以 p/q ，表示某數 x 經過兩次變化：先增加 p 倍再縮小 q 倍。

貳、從單位概念的發展與分數的學習看分數概念

Steffe (1991) 認為兒童在形成分數概念時，必須形成相當有彈性或變通性的單位概念。Behr et al. (1992) 特別強調「單位型態」與「複合單位」的重要性，認為這是連結有理數與全數的關鍵。當我們把單一物體當成一個單位時，這種單位稱為單項單位 (singleton unit)，把幾個物體當成一個單位，稱為複合單位，例如五個一數便是一種複合單位 (composite unit)。他們認為有理數的各種涵義，如分數、商、運算子等，都可以從複合單位的概念加以理解。

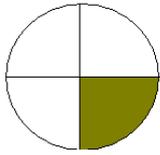
以 $9/15$ 為例，理解 $9/15 = 3/5$ 的等值關係所要建構的單位概念如下：在以下的圈圈中，黑色圈圈佔全部圈圈的 $9/15$ ，如將 3 視為一個子單位 (subunit)，可表示成 $3/5$ 。



Saenz-Ludlow, A. (1994) 認為兒童先具有彈性運用複合單位以解決整數問題之後才建構分數概念。分數概念的發展則經過三個水準，每個水準建構一個基模。

一、測量的部份整體基模 (metric part-whole scheme)

能將一個不可數的連續量如長度、面積、容積等看成一個整體，並將整體等分成幾個部份，理解部分與整體的關係，並將部份或幾個部份看成一個複合單位。如下圖



1 (有一份)

4 (等分成 4 份)

二、多重等分的協調基模 (multiple-partitioning coordinating scheme)

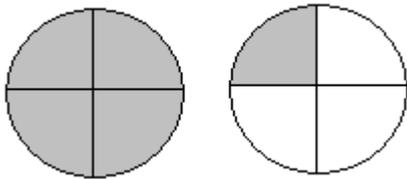
一個量可以作不同的等分，例如 5000 元的四十分之三十九大或是百分之九十九大的問題。並且漸漸能脫離自然數的參照，而能比較抽象的分數的大小。例如 $2/7$ 和 $2/14$ 那一個大，能直接說 $1/7$ 是兩個 $1/14$ ，所以 $2/7$ 比較大。

三、部分等分的協調基模 (part-partitioning coordinating scheme)

一個量無論是連續量或分離量都可以等分成幾個部份，每個部

份又可以等分，例如用所有錢的 $\frac{3}{10}$ 買菜，用剩餘錢的 $\frac{1}{4}$ 買蛋，共用去多少元，這兩個分數是不同的單位，兒童須能彈性地協調不同單位。

Mack (1990) 所發現的個案，發現學生通常認為分數都是小於 1 的數，以下面的例子說明，學生通常認為陰影部份為 $\frac{5}{8}$ 而非 $\frac{5}{4}$ 。這是由於不了解整數「1」的單位是怎樣的緣故。



叁、從教學單元看分數的概念

一、分數概念和分數加法過程 (鄭振初, 2006)

(一) 明白變動的基數「1」

例一：有24箱汽水，其中 $\frac{1}{2}$ 是橙汁， $\frac{1}{4}$ 是豆奶，橙汁和豆奶共有幾箱？(本題中有相同的基數「1」， $\frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{4}$ 是參考相同的整體「1」，整體「1」是指24箱)。

例二：貨倉有100箱橙汁和200箱豆奶，從中提取 $\frac{1}{2}$ 的橙汁和 $\frac{1}{4}$ 的豆奶，共提取多少箱？

(本題中有不相同的基數「1」， $\frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{4}$ 是參考不同的整體「1」， $\frac{1}{2}$ 所參考的整體「1」是指100箱， $\frac{1}{4}$ 所參考的整體「1」是指200箱)。

學生有變動的「1」的概念，才能充分理解分數加法，因此計算「 $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ 」時可用6或12或其他數值作基數。

(二) 有一對多和比例的概念，24的 $\frac{1}{8}$ 是3，即是1對3（1份有3個），24的 $\frac{5}{8}$ 是15（5份有 5×3 個）。

(三) 簡易分數的倍數概念及合併，3個 $\frac{1}{8}$ 是 $\frac{3}{8}$ ，5個 $\frac{3}{8}$ 是 $1\frac{7}{8}$ 。

分數的倍數是一個很重要的概念，學生應能比較分數的大小，才有分數的運算能力，而做倍數運算是最簡單的要求，可把分數寫成同分母單位分數的倍數，用倍數分母運算，例如 $\frac{3}{4} + \frac{3}{8}$ 。

$$(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + \frac{3}{8} = (\frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8}) + \frac{3}{8} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$$

(四) 有擴分的操作概念和能夠比較分數大小

(五) 合一過程，例如 $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$ 或 $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{5}{8} = 1$ 。

分數的加法的計算過程都可利用擴分和以單位分數作為單

二、分數乘法的基本知識（鄭振初，2006）

(一) 單位分數的乘法具有除的概念。

$$8 \times (\frac{1}{4}) \text{ 也是 } 8 \div 4$$

(二) 分數乘法是連加或倍數，可以用單位分數操作。

$$8 \times (\frac{1}{4}), \text{ 是 } 8 \text{ 個 } (\frac{1}{4})。$$

(三) 分數乘法也是比例的概念。

$$\begin{aligned} 8 \times (\frac{1}{4}) &= 8 \div 4 \times 1 \text{ (分成四份中的一份)}, 8 \times (\frac{3}{4}) \\ &= 8 \div 4 \times 3 \text{ (分成四份中的三份)} \end{aligned}$$

(四) 分數乘法是由每一個基數「1」抽出一個分數（量），然後相加。 $8 \times (\frac{1}{4})$ 相當於每個1抽出 $\frac{1}{4}$ 。

(五) 分數乘法可以類比放大與縮小的概念。

$$12 \times (\frac{3}{4}) \text{ 把 } 12 \text{ 放大了 } 3 \text{ 倍在縮小 } 4 \text{ 倍。}$$

綜合以上的探討，把分數題目所隱含的概念列舉如下：

1. 除法：能表現出日常生活中等分除的觀念。

例如一包糖果有 12 顆，小華得到 $\frac{1}{3}$ 包，小華得到多少顆。

在本題中， $\frac{1}{3}$ 的涵義是等分成三份中的一份

2. 比的概念：能表現出一對多的對應。

如果 $\frac{1}{8}$ 代表有 3 個， $\frac{5}{8}$ 代表有 15 個。 $(3 \times 5 = 15)$

3. 單位分數：能將一個分數視為一個可操作的單位。

$\frac{1}{8}$ 視為一個可操作的單位。 $\frac{2}{8}$ 是 $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ 。

4. 等值分數：有擴分或約分的操作概念，能夠比較分數大小。與比的概念比較在於能利用比的相等關係。

例如 $\frac{1}{6}$ 和 $\frac{1}{8}$ 哪一個大？

5. 是否應用相同的基數「1」

學生需要了解分數所對應的「整體 1」是什麼？

以下圖為例，對於下圖的表示應為 $1\frac{2}{4}$ 還是 $\frac{6}{8}$ ，這就要了解分數所對應的「整體 1」是什麼？



此外，比例推理是分數的重要概念，但屬於數學學習領域第三階段，所以在本文中未列入考慮。在本文中對於數學學習領域第二階段的分數概念的概念分類如下：1. 除法 2. 比的概念 3. 單位分數 4. 等值分數

第三節 數學解題歷程

過去心理學家比較強調探討跨學科的學習原則，而目前的認知心

理學家則重視特定學科領域的學習歷程。Mayer(1993)對解決應用問題的歷程進行分析，將數學解題歷程分為問題表徵及問題解決兩步驟，問題表徵又細分為問題轉譯與問題整合兩個子步驟，問題解決則劃分為計畫及監控與執行兩部份（涂金堂等，2000）。解題的四個基本認知過程如下：

1. 問題轉譯：將問題的語句轉化為內在的表徵。解題首先必須要先能了解題目的文句，然後能透過語言及事實知識了解題意，能將題目的語句化為個人能理解的內在符號或訊息。
2. 問題整合(problem integration)：以基模(schematic)知識，統整連貫(coherent)題目中各條件間的關係。換言之，應用基模知識將問題中的每一個文句貫通整合，對問題的概念是整體的、連貫的，而非片段的，在此過程中解題者必須具有分辨問題類型的能力。
3. 解題計畫及監控(solution planning and monitoring)：運用策略(strategic)知識，幫助學生設計和監控解題計畫。能夠將問題的目標分成幾個次要的子目標，然後逐步達成，並在達成的過程中意識到自己的解題步驟過程。
4. 解題執行(solution execution)：利用程序性(procedural)知識，讓學生能順利運算出題目的答案。解題者操作數學規則以運算的程序求得解答。

根據以上解題的四個基本認知過程，思考如何將教師對題目的判斷轉為電腦可以處理的方式，可藉由這四個基本認知過程賦予題目產生屬性，再根據教師的意見給予這些屬性產生數值，就可成為電腦判斷的依據。

對於「問題整合」的部份，原來所指的意思是學生應用基模知識能分辨問題類型的能力，由於本文所探討的範圍是第三學習階段前的分數概念，因此利用第二節中對分數涵義的探討所形成的概念分類，給予題目四個屬性。當產生概念分類後，一道題目在這四個屬性中可能同時具有一種以上的概念。

而「問題轉譯」、「解題計畫及監控」及「解題執行」是數學題目解題過程所共同具有的因素。對於「問題轉譯」的部份，可以判斷題目的表達方式是以數字符號為主或以文字描述為主。對於「解題計畫及監控」及「解題執行」的部份則由教師判斷這道題目的解題需使用解題策略的程度有多高及計算上的困難度有多高。

第四節 模糊理論的探討

對通常集合論進行擴充之後而形成的模糊集合論、具有概率擴充意味的模糊測度論以及把模糊概念 (fuzziness) 導入通常邏輯而形成的模糊邏輯，總稱為模糊理論 (程乾生等, 2007)。模糊測度論所處理的是在對事務進行判斷時所表現出的主觀不確定。我們用介於 0 和 1 之間的數來表示其隸屬程度 (程乾生等, 2007)。

根據前面的討論，在分數概念部分建立四個屬性，在解題能力部分建立三個屬性。

表 1：分數題目的七個屬性

屬性項目	屬性名稱
屬性 1	除法
屬性 2	比的概念

屬性 3	單位分數
屬性 4	等值分數
屬性 5	題意表示方式
屬性 6	解題計畫及監控
屬性 7	計算能力

資料來源：本研究建置

對於每一道題目給予七個屬性，每一個屬性即是一個模糊集合，歸屬度用介於 0 和 1 之間的數來表示。歸屬度的數值利用模糊統計試驗及屬性空間測度的方式獲得，再利用模糊聚類的方法根據題目的前四個屬性形成題目群聚。

在以下的內容先討論模糊集合、歸屬函數的建立，然後提出兩道題目做實例的說明，最後說明模糊聚類的方法。

壹、模糊集合

所謂模糊集合是指用來表示界限不分明具有特定性質事物的集合。設 U 是論域， A 是論域上的某一個模糊子集，是以其歸屬函數 $\mu_A(x)$ 來特徵化。給定 $x \in U$ ， $\mu_A(x)$ 稱為 x 對於 A 的歸屬程度。

$\mu_A : U \rightarrow [0,1]$ $[]$ 代表連續實數所成的集合

模糊集合的表示法

令論域 $U = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$

模糊子集 $A = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}$

「+」號非相加之意，只是當作連結符號。

在電腦中如何表達模糊集合，可用向量形式表示模糊子集，但歸屬度為 0 的項不能略去 (Michael.N, 2005)。

$$A = ((x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), \dots, (x_n, \mu_A(x_n)))$$

$$\text{或 } A = (\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \dots, \mu_A(x_n))$$

以上所描述的模糊集合的表示法是在一個論域上的表示法。

即論域中所有元素 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 在模糊子集 A 中的歸屬度。

海洋大學郭副教授信川先生應用模糊集合來探討學習成效的分析（郭信川等，2007），對於大學數控工具機課程的學習成效，首先經由文獻之探討及訪談專家老師之意見，認為學生應具備的學習概念包含有五項，分別是：1. 基本知識 2. 製造特徵 3. CNC 車床 4. CNC 銑床 5. 製造程序。

將每道題目根據以上的五個學習概念，由專家對於一道題目中關於這五個學習概念的重要性，利用模糊德菲法給予權重值。例如題目 002 (0.61, 0.78, 0.17, 0.92, 0.92) 與題目 004 (0.78, 0.17, 0.92, 0.17, 0.61) 相比，題目 002 較屬於 CNC 銑床及製造程序的學習概念（第四個及第五個學習概念），題目 004 較屬於 CNC 車床的學習概念（第三個學習概念）。利用對題目給予向量屬性的表示方法，即使兩個人的總分相近，因為在不同的學習概念有不同的得分，可解釋他們在不同的學習概念了解的程度不同。以上的想法是本研究思想上的啟發。

本文中再以數學的形式表達上述模糊集合的觀念，模糊子集 A1 到 A5 代表五個學習概念，001、002、...、到 040 代表論域中的 40 到題目。

模糊子集	學習概念
A1	基本知識

A2	製造特徵
A3	CNC 車床
A4	CNC 銑床
A5	製造程序

模糊子集 A1、A2 的表現形式如下：

$$A1 = (\mu_{A1}(001), \mu_{A1}(002), \dots, \mu_{A1}(040))$$

$$A2 = (\mu_{A2}(001), \mu_{A2}(002), \dots, \mu_{A2}(040))$$

模糊子集 A3、A4、A5 以此類推。

模糊子集 A1 所代表的意思是 40 道題目在”基本知識”這個學習概念上所形成的模糊集合。

題目 001、002 的向量形式如下：

$$\text{題目 001} (\mu_{A1}(001), \mu_{A2}(001), \mu_{A3}(001), \mu_{A4}(001), \mu_{A5}(001))$$

$$\text{題目 002} (\mu_{A1}(002), \mu_{A2}(002), \mu_{A3}(002), \mu_{A4}(002), \mu_{A5}(002))$$

題目 001 的五個歸屬度是題目 001 在五個有關學習概念的模糊集合上分別得到五個數值，其餘題目以此類推，這樣的表示方法顯示出一道題目分別在五個模糊子集上所顯示的權重。

根據前述文獻探討所建立之分數概念的分類，是隨著認知發展過程而有階層性，但是因為題目的解題方式的解釋方式而使得一道題目可具有一種或以上的概念，例如：一盒糖果有 10 粒，10 粒的 $\frac{1}{5}$ 是 2 粒，10 粒的 $\frac{2}{5}$ 是 4 粒，10 粒平分成 5 份中的兩份是 4 粒，有「除」的概念，一份有 2 粒，兩份有 4 粒，這是「比」的概念。題目解題方式的解釋影響到分數概念意義的建構，因此本研究利用題目解題方式的解釋給予其適當的概念分類，利用教師對一道題目所顯現出的概念

或者解決這一道題目所需的概念，測量教師的心理強度，將一道題目根據概念分類表示為一組向量數值。

貳、歸屬函數的建立

正確建構歸屬函數是應用模糊理論關鍵所在，這個問題至今尚未得到令人滿意的解決方法，使得歸屬函數的確定帶有主觀因素，在本文中歸屬函數以統計試驗（馮國臣，2007）和屬性測度（程乾生等，2007）加以確定。

一、模糊統計試驗

一般機率統計試驗，多是對某個物理量進行觀測，很少依賴於人的心理反應，而模糊統計卻與人的心理過程密切相關，往往通過心理測量來進行，研究的也是事物本身的模糊性。

一般的機率統計中，事件 A 發生的機率 $P(A)$ 定義為

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{A 發生的次數}}{n}$$

實際應用中，只要 n 求足夠大就可以了

與此類似定義模糊統計試驗

$$\mu(\mu_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 \text{ 屬於 } A^* \text{ 的次數}}{n}$$

A^* 是模糊子集

模糊統計試驗具有歸屬頻率穩定性的特點。

以下用一個實例加以說明模糊統計試驗歸屬頻率穩定性的特點。

專家們在某三所大學的 329 名學生，進行關於“青年人”歸屬度函數曲線的統計試驗，結果三處所統計出來的曲線，形狀雷同，曲線下所圍成的總面積相差不大，這說明模糊統計試驗具有歸屬頻

率穩定性的特點。下圖是某一研究，從 129 人對“青年人”最適宜年齡範圍估計的歸屬度試驗中所得的資料繪出的曲線。

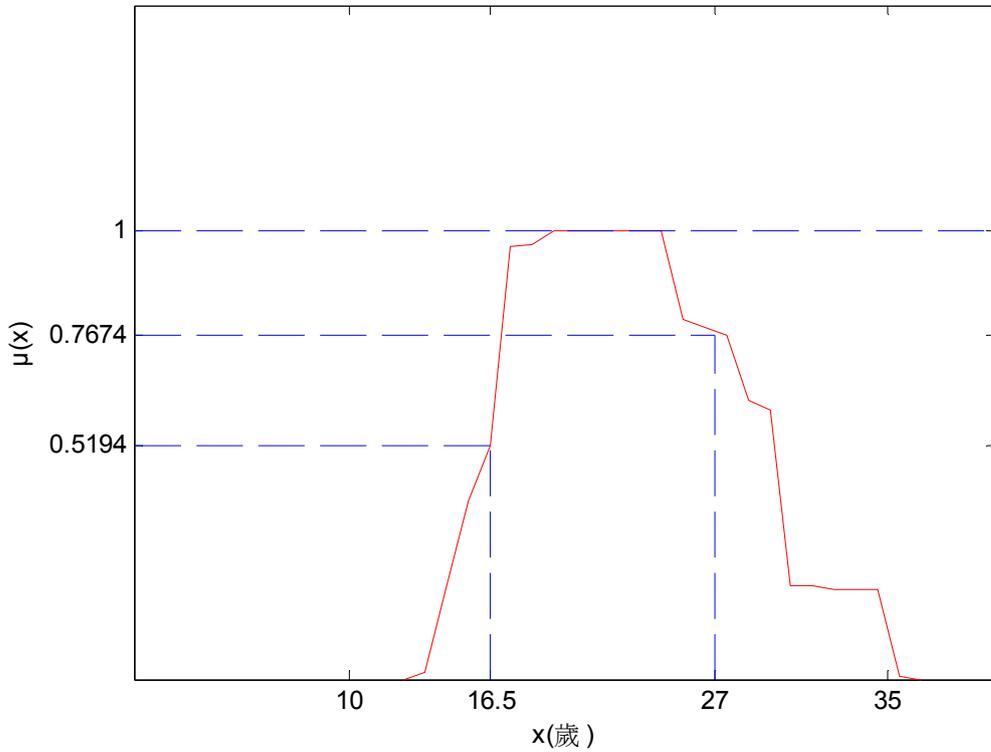


圖 2：129 人對“青年人”最適宜年齡範圍估計的歸屬度試驗

資料來源： 模糊理論基礎與應用，2007
以 MatLab 重新繪圖

表 2：129 人對“青年人”最適宜年齡範圍估計的歸屬度試驗

序號	年齡分組	出現次數	相對出現次數
1	13.5-14.5	2	0.0155
2	14.5-15.5	27	0.2093
3	15.5-16.5	51	0.3953
4	16.5-17.5	67	0.5194

5	17.5-18.5	124	0.9612
6	18.5-19.5	125	0.9690
7	19.5-20.5	129	1
8	20.5-21.5	129	1
9	21.5-22.5	129	1
10	22.5-23.5	129	1
11	23.5-24.5	129	1
12	24.5-25.5	128	1
13	25.5-26.5	103	0.7984
14	26.5-27.5	101	0.7829
15	27.5-28.5	99	0.7674
16	28.5-29.5	80	0.6202
17	29.5-30.5	77	0.5969
18	30.5-31.5	27	0.2093
19	31.5-32.5	27	0.2093
20	32.5-33.5	26	0.2016
21	33.5-34.5	26	0.2016
22	34.5-35.5	26	0.2016
23	35.5-36.5	1	0.0078

資料來源： 模糊理論基礎與應用，2007

從上圖或表中的資料，可知 27 歲對於“青年人”的歸屬度約為 0.78。如果隨機抽取幾個人對 27 歲是否是“青年人”做出回答的結

果加以統計，也可得到類似結果。

表 3：n 個人對 27 歲是否是“青年人”的統計

n	肯定回答次數	相對出現次數
10	6	0.6
20	14	0.7
30	23	0.77
40	31	0.78
50	39	0.78
60	47	0.78
70	53	0.76
80	62	0.78
90	68	0.76
100	76	0.76
110	85	0.75
120	95	0.79
129	101	0.78

資料來源： 模糊理論基礎與應用，2007

繪製曲線如下，可以看出 n 足夠大時，曲線漸趨穩定

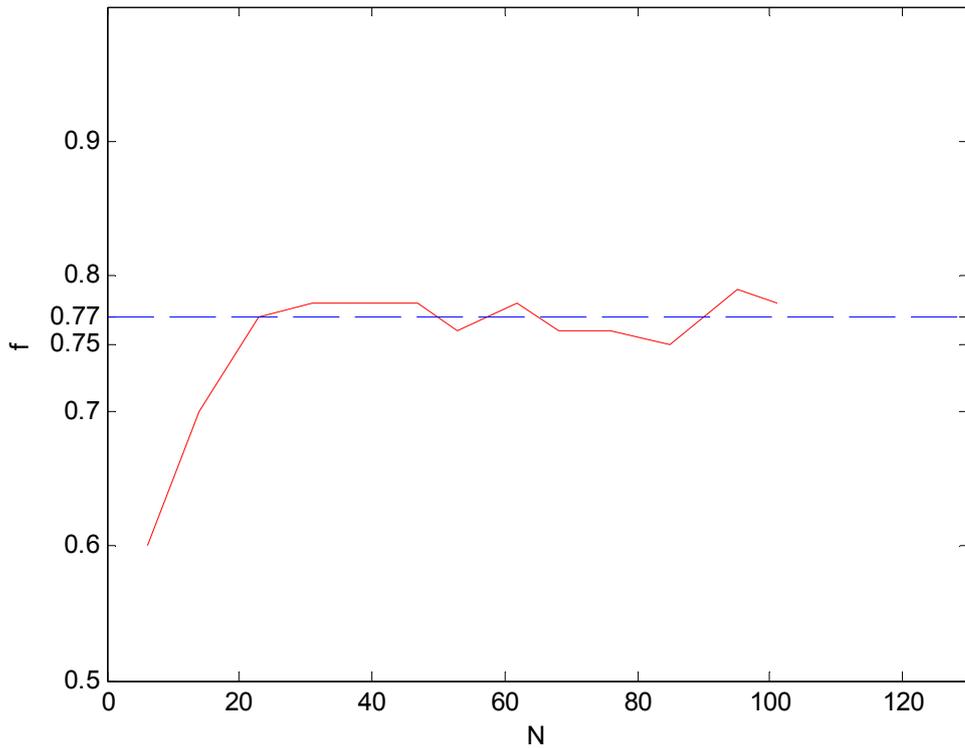


圖 3：n 個人對 27 歲是否是“青年人”的統計

資料來源： 模糊理論基礎與應用，2007
以 MatLab 重新繪圖

二、屬性測度

屬性測度的意義舉例如下：

設 F 為 X 中的某類屬性空間， $C_1, C_2, \Lambda C_K$ 為屬性空間中的各屬性集，
如果 $\{ C_1, C_2, \Lambda C_K \}$ 滿足 $F = \bigcup_{i=1}^K C_i$ ， $C_i \cap C_j = \psi$ ($i \neq j$)，則稱 $\{ C_1, C_2, \Lambda C_K \}$
為屬性空間 F 的分割。

例如設 F 為消費者對某種商品的滿意度，把 F 分為五類， $C_1 = \{ \text{很滿意} \}$ $C_2 = \{ \text{滿意} \}$ $C_3 = \{ \text{中等} \}$ $C_4 = \{ \text{不滿意} \}$ $C_5 = \{ \text{很不滿意} \}$ ，
這五類彼此不相交， $\{ C_1, C_2, \Lambda C_5 \}$ 為屬性空間。

$x \in C_i$ 表示 x 具有屬性 C_i ，，記為 $\mu_x(C_i)$ ，屬性測度在 $[0,1]$ 之間取值。

須滿足以下的規則。

1. $\mu_x(C_i) \geq 0, i=1 \sim 5$

2. $\mu_x(F)=1$

3. $C_i \cap C_j = \emptyset (i \neq j), \mu_x(\cup_i C_i) = \sum_i \mu_x(C_i)$

即消費者對某種商品的滿意度，在屬性空間 $\{ C_1, C_2, \dots, C_5 \}$ 中， $\mu_x(C_i) \geq 0$ ($i=1 \sim 5$)， $\sum_{i=1}^5 \mu_x(C_i) = 1$ 。

另外以一個例子做說明（吳柏林，政大通俗數學講座，2002）。

假設有 10 個人計畫利用週休二日到戶外郊遊，旅遊選擇地點有陽明山、淡水、烏來與九份四處。下表中的方法為傳統一人一票的投票情形，每個人對於四個地點僅能選擇其中一個。

表 4：傳統一人一票之投票情形

投票者 \ 地點	陽明山	淡水	烏來	九份
A		V		
B	V			
C				V
D			V	
E		V		
F			V	
G		V		
H	V			
I		V		
J			V	

資料來源：政大通俗數學講座，2002

下表中的方法為模糊眾數的給分方式，每個人將 100% 分配到四個選項中。

表 5：以隸屬度函數求出之投票情況

投票者 \ 地點	陽明山	淡水	烏來	九份
A	0.45	0.55		
B	0.5		0.4	0.1
C	0.1		0.4	0.5
D	0.45		0.55	
E		0.55	0.45	
F	0.45		0.55	
G		0.55	0.45	
H	0.5		0.4	0.1
I	0.45	0.55		
J			0.55	0.45

資料來源：政大通俗數學講座，2002

若以傳統眾數選擇旅遊地點，統計得票結果為淡水 4 票、烏來 3 票、陽明山 2 票、九份 1 票，則最佳的旅遊地點應為「淡水」。其次是烏來。若以模糊眾數之觀點來看，當顯著水準為 0.55 時，旅遊地點為「淡水」，與傳統眾數求得的結果相同。當顯著水準為 0.45 時，旅遊地點為「陽明山」，有 6 個人能接受，顯著水準為 0.4 時，旅遊地點為「烏來」，有 8 個人能接受，由此結果發現，模糊眾數較傳統

眾數更能表現出民意之所在，且能找出一個令大家都可接受並且較不極端的結果。

將屬性測度的方法運用在對題目的判斷上，若以五個項目來表示計算能力的難度：1 2 3 4 5。數字越高表示難度越高，然而若每一題都將 100% 分配到五個選項中，將造成心力的負荷，因此每個人在五個項目中只勾選一個。這時假設某人勾選2，對某人來說，如果將 100% 分配到1、2、3、4、5 五個選項中，在某人的心中，

項目2，應是獲得最大的百分比。

設 p_1 表勾中「1」的比例

p_2 表勾中「2」的比例

p_3 表勾中「3」的比例

p_4 表勾中「4」的比例

p_5 表勾中「5」的比例

$$\text{此時 } p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \quad (p_i \geq 0, i=1 \sim 5, \sum_{i=1}^5 p_i = 1)$$

符合屬性測度的規則。這好像是把眾人的意見變成一個「整體人」的意見。

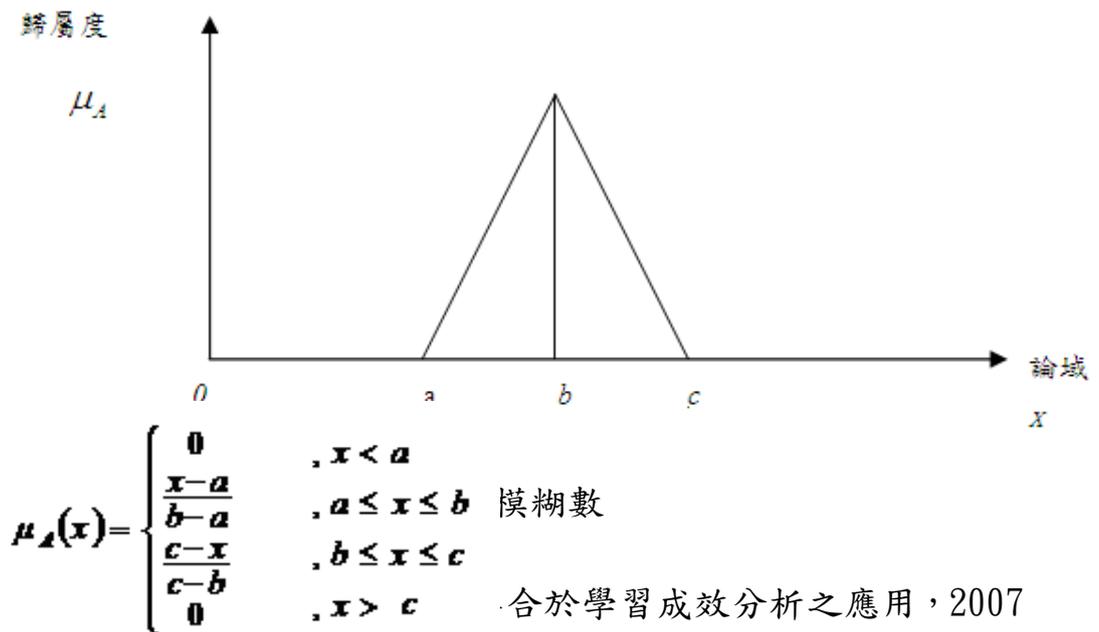
另外對於1、2、3、4、5 等五個項目歸屬度的設置如下，項目5：表示此題難度很高，模糊歸屬數為 1，項目1：表示此題難度很低，模糊歸屬數為 0，項目3：表示此題難度不高又不低，最為模糊，模糊歸屬數為 0.5，項目2 及項目4 模糊歸屬數由內插法分別為 0.25 及 0.75。

利用屬性測度的方法對於計算五點量表歸屬度的方法，在直覺上

提出以下數學式：

$$p_1 \times 0 + p_2 \times 0.25 + p_3 \times 0.5 + p_4 \times 0.75 + p_5 \times 1$$

將以上算式與模糊德菲法中利用三角形歸屬函數來計算五點量表度的方法做簡單的比較。模糊德菲法亦稱為專家法，是利用專家集體智慧來確定各因素在評判問題或決策問題中重要程度係數的有效方法之一。此理論最早於 1985 由 Murray 將模糊理論與德菲法相結合所提出，1993 年 Ishikawa 等人提出 Max-Min 法與模糊整合法解決反覆式問卷調查的缺點，以 Max-Min 法來整合問卷資料並採用三角形歸屬函數（郭信川等，2007）。三角形歸屬函數(Triangular Membership Function)如下：



模糊德菲法中三角形模糊數的公式如下

模糊德菲法中三角形模糊數： $\tilde{W}_i = \{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}, i = 1, 2, 3, \Lambda \Lambda k$

其中, $\alpha_i = \text{Min}\{\alpha_{p_i}\}, p = 1, 2, 3 \wedge \wedge q$

$$\beta_i = \left(\prod_{p=1}^q \beta_{p_i} \right)^{\frac{1}{q}}, p = 1, 2, 3 \wedge \wedge q$$

$$\gamma_i = \text{Max}\{\gamma_{p_i}\}, p = 1, 2, 3 \wedge \wedge q$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$: 專家三角形歸屬函數之左端點、頂點(幾何平均數)及右端點。 α_i : 決策者評價之極小值。 β_i : 專家之意見之幾何平均數。 γ_i : 決策者評價之極大值。

p_i : 第 P 個專家對第 i 個概念的看法及意見。

k : 概念數。

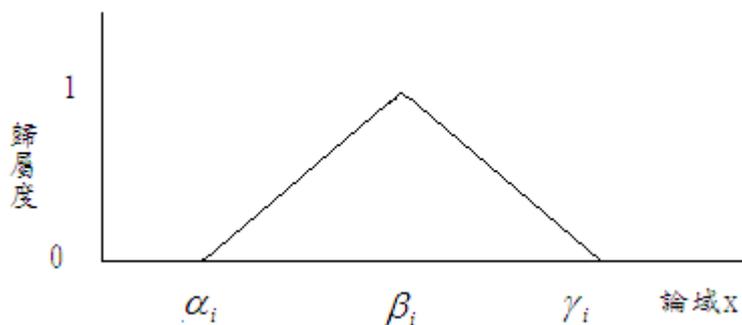
q : 專家數。

模糊系統中之模糊資料需作解模糊化(defuzzication)的處理，才有明確的特性，模糊德菲法之三角形歸屬函數採重心法：

$$W_i = \frac{\alpha_i + \beta_i + \gamma_i}{3}$$

W_i : 第 i 個概念解模糊化後之權重值。

一位專家對第 i 個概念的看法



假設三角模糊數歸屬數如下：

表 6：本文中五點量表之三角模糊數

困難程度	三角模糊數 $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$
<input type="checkbox"/> 5	(0.75, 1, 1.25)
<input type="checkbox"/> 4	(0.5, 0.75, 1)
<input type="checkbox"/> 3	(0.25, 0.5, 0.75)
<input type="checkbox"/> 2	(0, 0.25, 0.5)
<input type="checkbox"/> 1	(0, 0, 0.25)

資料來源：本研究修訂

根據運算的結果要將困難程度：5 的三角模糊數 $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ 設為 $(0.75, 1, 1.25)$ ，那麼當所有人都勾選5 時歸屬函數才為 1。

以下做簡單的數學比較

如果全部的人都勾選項目3

$$p_1 \times 0 + p_2 \times 0.25 + p_3 \times 0.5 + p_4 \times 0.75 + p_5 \times 1$$

$$= 0 \times 0 + 0 \times 0.25 + 1 \times 0.5 + 0 \times 0.75 + 0 \times 1 = 0.5$$

以模糊德菲法中三角形模糊數計算歸屬度

$$\alpha_i = \text{Min}\{\alpha_{p_i}\} = 0.25$$

$$\beta_i = \left(\prod_{p=1}^q \beta_{p_i} \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(0.5)^n} = 0.5$$

$$\gamma_i = \text{Max}\{\gamma_{p_i}\} = 0.75$$

$$W_i = \frac{\alpha_i + \beta_i + \gamma_i}{3} = \frac{0.25 + 0.5 + 0.75}{3} = 0.5$$

兩種算法數值相同。

如果全部的人都勾選項目4

$$p_1 \times 0 + p_2 \times 0.25 + p_3 \times 0.5 + p_4 \times 0.75 + p_5 \times 1$$

$$= 0 \times 0 + 0 \times 0.25 + 0 \times 0.5 + 1 \times 0.75 + 0 \times 1 = 0.75$$

以模糊德菲法中三角形模糊數計算歸屬度

$$\alpha_i = \text{Min}\{\alpha_{p_i}\} = 0.5$$

$$\beta_i = \left(\prod_{p=1}^q \beta_{p_i}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[4]{(0.75)^4} = 0.75$$

$$\gamma_i = \text{Max}\{\gamma_{p_i}\} = 1$$

$$W_i = \frac{\alpha_i + \beta_i + \gamma_i}{3} = \frac{0.5 + 0.75 + 1}{3} = 0.75$$

兩種算法數值相同。

如果四個人中，兩人勾選項目□3，兩人勾選項目□4

$$p_1 \times 0 + p_2 \times 0.25 + p_3 \times 0.5 + p_4 \times 0.75 + p_5 \times 1$$

$$= 0 \times 0 + 0 \times 0.25 + (2/4) \times 0.5 + (2/4) \times 0.75 + 0 \times 1 = 0.625$$

以模糊德菲法中三角形模糊數計算歸屬度

$$\alpha_i = \text{Min}\{\alpha_{p_i}\} = 0.25$$

$$\beta_i = \left(\prod_{p=1}^q \beta_{p_i}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[4]{0.5 \times 0.5 \times 0.75 \times 0.75} \approx 0.612$$

$$\gamma_i = \text{Max}\{\gamma_{p_i}\} = 1$$

$$W_i = \frac{\alpha_i + \beta_i + \gamma_i}{3} = \frac{0.25 + 0.612 + 1}{3} \approx 0.62$$

兩種方法計算的數值相差不大，而 $p_1 \times 0 + p_2 \times 0.25 + p_3 \times 0.5 + p_4 \times 0.75 + p_5 \times 1$ 的計算方法較為容易。

現在假設有 8 個人，如果只勾選□3 和□4，那麼將所有情形列

表如下：

表 7：8 人中只勾選□3、□4 時本研究方法對模糊德菲法的誤差百分率

	模糊德菲法	本研究的方法	誤差百分比
8 人全勾選□3	0.5	0.5	0%
7 人勾選□3，1 人勾選□4	0.592	0.531	約-10%

6 人勾選□3，2 人勾選□4	0.601	0.563	約 -6%
5 人勾選□3，3 人勾選□4	0.611	0.594	約 -3%
4 人勾選□3，4 人勾選□4	0.621	0.625	約 1%
3 人勾選□3，5 人勾選□4	0.631	0.656	約 4%
2 人勾選□3，6 人勾選□4	0.643	0.688	約 7%
1 人勾選□3，7 人勾選□4	0.654	0.719	約 10%
8 人全勾選□4	0.75	0.75	0%

資料來源：本研究建置

以模糊德菲法的數值為基準，當模糊德菲法的數值遞增的過程中本文的方法產生的數值與模糊德菲法的數值誤差百分率如下圖所示。

當 8 人全勾選□3 或 8 人全勾選□4 時以及 4 人勾選□3，4 人勾選□4 時誤差百分比等於 0 或接近 0，當 8 人之中比較多的人傾向勾選□4 時誤差百分比等於 0 或接近 0，當 8 人之中比較多的人傾向勾選□3 時，歸屬度的數值應傾向減少，本研究使用的方法所得數值比模糊德菲法較低，當 8 人之中比較多的人傾向勾選□4 時，歸屬度的數值應傾向增加，本研究使用的方法所得數值比模糊德菲法較高。

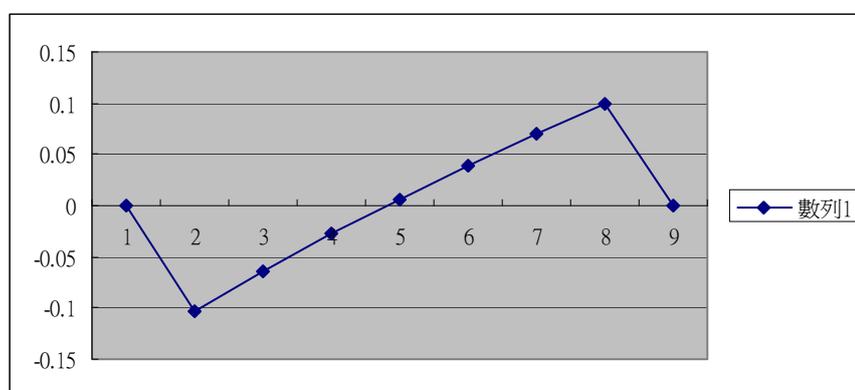


圖 5：8 人中只勾選□3、□4 時本研究方法對模糊德菲法的誤差百分率
資料來源：本研究建置

現在假設有 8 個人，如果只勾選□3、□4 和□5，那麼將所有情形列表如下：下表的排列方法以模糊德菲法數值的遞增為順序

表 8：8 人中只勾選□3、□4、□5 時本研究方法對模糊德菲法的誤差百分率

勾選□3 的人數	勾選□4 的人數	勾選□5 的人數	模糊德菲 法	本研究的方法	誤差百分比 (%)
8	0	0	0.5	0.5	0.00
7	1	0	0.591998	0.53125	-10.26
6	2	0	0.601114	0.5625	-6.42
5	3	0	0.610703	0.59375	-2.78
4	4	0	0.620791	0.625	0.68
3	5	0	0.631403	0.65625	3.94
2	6	0	0.642567	0.6875	6.99
1	7	0	0.654312	0.71875	9.85
7	0	1	0.681751	0.5625	-17.49
6	1	1	0.6912	0.59375	-14.10
6	0	2	0.698201	0.625	-10.48
5	2	1	0.701141	0.625	-10.86
5	1	2	0.708506	0.65625	-7.38
4	3	1	0.711598	0.65625	-7.78
5	0	3	0.71614	0.6875	-4.00
4	2	2	0.719346	0.6875	-4.43

3	4	1	0.722599	0.6875	-4.86
4	1	3	0.727377	0.71875	-1.19
3	3	2	0.730749	0.71875	-1.64
2	5	1	0.734172	0.71875	-2.10
4	0	4	0.735702	0.75	1.94
3	2	3	0.739198	0.75	1.46
2	4	2	0.742746	0.75	0.98
1	6	1	0.746346	0.75	0.49
3	1	4	0.747956	0.78125	4.45

0	8	0	0.75	0.75	0.00
---	---	---	------	------	------

2	3	3	0.751634	0.78125	3.94
1	5	2	0.755366	0.78125	3.43
3	0	5	0.757035	0.8125	7.33
2	2	4	0.760847	0.8125	6.79
1	4	3	0.764716	0.8125	6.25
2	1	5	0.770398	0.84375	9.52
1	3	4	0.774409	0.84375	8.95
2	0	6	0.780299	0.875	12.14
1	2	5	0.784456	0.875	11.54
1	1	6	0.794871	0.90625	14.01

1	0	7	0.805668	0.9375	16.36
---	---	---	----------	--------	-------

0	7	1	0.842487	0.78125	-7.27
---	---	---	----------	---------	-------

0	6	2	0.851976	0.8125	-4.63
---	---	---	----------	--------	-------

0	5	3	0.861812	0.84375	-2.10
0	4	4	0.872008	0.875	0.34
0	3	5	0.882578	0.90625	2.68
0	2	6	0.893535	0.9375	4.92
0	1	7	0.904893	0.96875	7.06
0	0	8	1	1	0.00

資料來源：本研究建置

8 個人中，4 人勾選□3，4 人勾選□4 時誤差百分比接近 0，7 人勾選□3，1 人勾選□4 時誤差百分比 -10.26%，1 人勾選□3，7 人勾選□4 時誤差百分比 9.85%，歸屬度的數值應傾向減少時，本研究使用的方法所得數值比模糊德菲法較低，歸屬度的數值應傾向增加時，本研究使用的方法所得數值比模糊德菲法較高。

8 人皆勾選□4 時誤差百分比 0，7 人勾選□3，1 人勾選□5 時誤差百分比 -17.49%，7 人勾選□3，1 人勾選□5 時誤差百分比 16.36%。

4 人勾選□4，4 人勾選□5 時誤差百分比接近 0，7 人勾選□4，1 人勾選□5 時誤差百分比 -7.27%，7 人勾選□5，1 人勾選□4 時誤差百分比 7.06%。

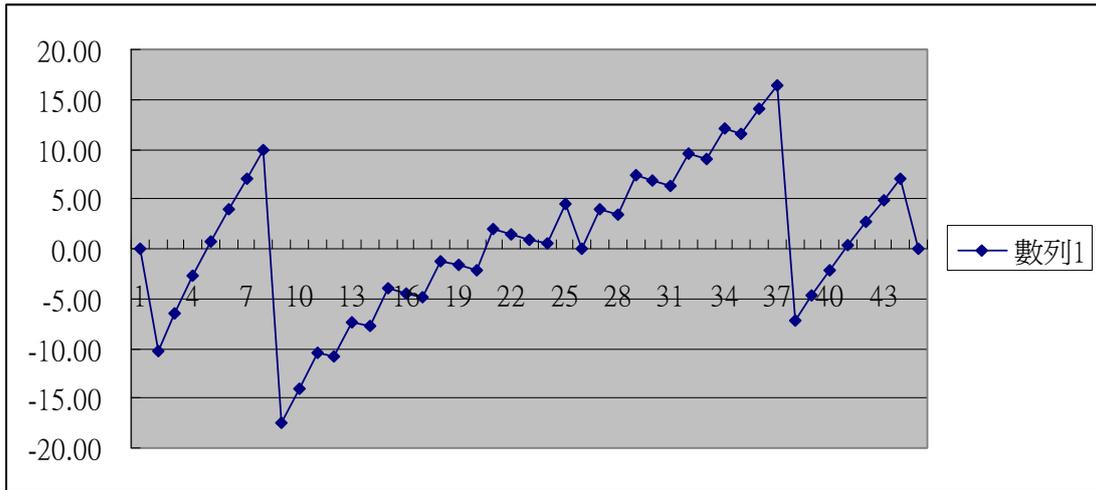


圖 6： 8 人中只勾選□3、□4、□5 時本研究方法對模糊德菲法的誤差百分率

資料來源：本研究建置

由於本研究使用的方法計算上更為便利，所以「計算能力」、「解題策略能力」及「題意表達方式」的歸屬度亦由以下數學式表示。

$$p_1 \times 0 + p_2 \times 0.25 + p_3 \times 0.5 + p_4 \times 0.75 + p_5 \times 1$$

其中「題意表達方式」的數字越高表示越傾向於文字及圖形說明，數字越低表示越傾向於數字及符號的表示。

叁、題目向量屬性值的測度

綜合上述文獻的探討，將題目兩組向量屬性分成兩部分，即（分數概念，解題知識能力）

目的在了解學生在分數數學知識和解題能力的表現。再將分數概念分成四個屬性，解題能力分成三個屬性。

以（屬性 1，屬性 2，屬性 3，屬性 4，屬性 5，屬性 6，屬性 7，）來表示題目的向量屬性。

分數題目的七個屬性

屬性項目	屬性名稱
------	------

屬性 1	除法
屬性 2	比的概念
屬性 3	單位分數
屬性 4	等值分數
屬性 5	題意表示方式
屬性 6	解題計畫及監控
屬性 7	計算能力

資料來源：本研究建置

對於每個屬性如何獲得歸屬度，則使用問卷調查，對具有「教師」這個特性的人作心理測量。

其中『分數概念』的部份

表 9：『分數概念』的題目屬性

屬性項目	屬性名稱
屬性 1	除法
屬性 2	比的概念
屬性 3	單位分數
屬性 4	等值分數

資料來源：本研究建置

以模糊統計試驗的頻率獲得歸屬度。以（屬性 1，屬性 2，屬性 3，屬性 4）為聚類分析的依據。

『解題知識能力』的部份，較屬於數學題目的共同因素部分，則以屬性測度的方式獲得歸屬度。

表 10：『解題能力』的題目屬性

屬性項目	屬性名稱
屬性 6	題意表示方式
屬性 7	解題計畫及監控
屬性 8	計算能力

資料來源：本研究建置

『解題知識能力』的部份說明如下

題意表達方式：1 2 3 4 5

數字愈小表示題意表達方式主要是數字符號，數字愈大表示題意表達方式主要是文字。

解題策略：1 2 3 4 5

數字愈大表示越需要解題策略。

計算難度：1 2 3 4 5

數字愈大表示計算難度越高，越需要使用計算能力。

以兩道題目舉例說明如下

例如，某人對以下兩道題目可能勾選的選項如下

1. () 兩個真分數相乘，所得的積必為 ①整數②真分數③假分數
④帶分數。

(以下選項可以複選)

除法 比的概念 單位分數 等值分數

題意表達方式：1 2 3 4 5

解題策略：1 2 3 4 5

計算難度：1 2 3 4 5

2. () $9 \times \frac{5}{8} =$ ① $9 \times 5 \times 8$ ② $9 \div 5 \times 8$ ③ $5 \div 8 \div 9$ ④ $9 \times 5 \div 8$ 。

(以下選項可以複選)

除法 比的概念 單位分數 等值分數

題意表達方式： 1 2 3 4 5

解題策略難度： 1 2 3 4 5

計算難度： 1 2 3 4 5

某人勾選的解釋如下

第一題純為文字說明；真分數即有單位分數的概念；了解的方式可用實際數字來驗算。真分數的乘法中第二個真分數以前一個真分數為整體的「1」，故本題的題意中有兩個不同的基數「1」。

第二題純為數字符號； $9 \times \frac{5}{8}$ 可視為 9 個 $\frac{5}{8}$ ，有單位分數的概念；又可視為一條八格的積木，其中五格有記號，如此相同的積木共有九條，總共有 9×5 個有記號的格子，這是比的概念； 9×5 個有記號的格子可形成 $(9 \times 5) \div 8$ 條積木，有除法的概念。

兩題皆不需實際運算，計算難度勾選最小的數值。

對於一道題目可以有不同解題方式的解釋，這在每個教師心中直覺的強度不一定相同，當教師勾選某一個概念時，表示這一題具有此一概念的直覺強度夠強，教師未勾選某一個概念時，表示這一題具有此一概念的直覺強度不夠。對於同一道題目，甲教師可能勾選三個概念，因為甲教師認為從這三個概念都可以解題，乙教師可能勾選一個概念，因為乙教師直覺上從這一個概念解題。而同一位教師在不同時間勾選的概念也不一定相同。甲教師原先勾選三個概念，後來憑直覺

只想一下，只勾選一個概念，但這一個概念應是原先所勾選三個概念的其中之一，乙教師原先只勾選一個概念，後來多想一下，勾選二個概念，而這二個概念包含原先勾選的一個概念。基於以上常理的假設，如果某一個概念獲得的歸屬度高，表示這一道題目對大多數的人容易從此一概念作解釋，因此學生若回答錯誤，對大多數的人來說可能是缺乏此一概念。

肆、模糊聚類分析在選題策略上的應用

聚類分析就是使用數學方法對事物進行分類，在 Fuzzy 產生之前，聚類分析已是數理統計多元分析的一支，從數學上來說，一個明確的分類要由等價關係來確定，有了等價關係就可把原來的集合分成互不相交的子集，不同的子集就相應不同的類，這就叫聚類分析。

在本文中每道題目以（除法，比的概念，單位分數，等值分數）這四個屬性作聚類分析，目的在將題目分成不同群聚，使同一群聚中的題目有較高的相關性，不同群聚中的題目有較低的相關性。

Fuzzy 聚類分析的步驟首先要建立 Fuzzy 相似關係，然後構造 Fuzzy 等價關係。

（一）建立 Fuzzy 相似關係

設為 $U = \{ u_1, u_2, u_3, \dots, u_n \}$ 待分類的全體

每一待分類物由一組資料表示， $u_i = \{ x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im} \}$ 如何建立之間的相似關係，有許多方法：

數量積法

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \frac{1}{M} \sum_{k=1}^m x_{ik} \cdot x_{jk} & i \neq j \end{cases}$$

算數平均最小法 $r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^m \min(x_{ik}, x_{jk})}{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (x_{ik} + x_{jk})}$

幾何平均最小法 $r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^m \min(x_{ik}, x_{jk})}{\sum_{k=1}^m \sqrt{x_{ik} \cdot x_{jk}}}$

相關係數法

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^m |x_{ik} - \bar{x}_i| \cdot |x_{jk} - \bar{x}_j|}{\sqrt{\sum_{k=1}^m (x_{ik} - \bar{x}_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_{jk} - \bar{x}_j)^2}} \quad \text{其中} \quad \bar{x}_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{ik} \quad , \quad \bar{x}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{jk}$$

本文中使用的數量積法

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \frac{1}{M} \sum_{k=1}^m x_{ik} \cdot x_{jk} & i \neq j \end{cases}$$

相關係數的使用是為了計算題目之間的距離，將題目做分群。使用數量積法在數學上的說明較為簡單，假設一道題目在屬性 k=1 的數值為 0，那麼這道題目在屬性 k=1 的部份就不會與其它題目產生數值，如果這道題目在屬性 k=1 的數值很小，那麼這道題目在屬性 k=1 的部份與其它題目產生的數值就很小，兩道題目之間如果有較大的數值，這

是由於在個別屬性 $k=1, 2, 3, 4$ 之間的計算累積而來。因此若相關係數有較大的數值可能有以下的情形：

1. 表示兩道題目之間在某一個屬性有很強的相關，那麼這兩題屬於這一個屬性的概念。
2. 或是兩道題目之間有較多的屬性具有不強的相關，此時可猜測兩道題目的形式給予人的感覺可能較為相近。

如果數值又更大可能有以下的情形：

1. 表示兩道題目之間在某兩個屬性有很強的相關，那麼這兩題屬於這兩個屬性的概念。
2. 兩道題目之間在某一個屬性有很強的相關，其他屬性具有不強的相關。這兩題屬於這一個屬性的概念。
3. 兩道題目之間沒有在某一個屬性有很強的相關，有較多的屬性具有一定程度的相關，此時可猜測兩道題目的形式給予人的感覺可能較為相近。

所以聚成同一群聚的題目，可能在屬於某一個屬性的概念，或者可猜測題目之間的形式較為相近。

u_i 與 u_j 的相似關係 $r_{ij} = R(u_i, u_j)$ 由上述方法給定。

(二) 構造 Fuzzy 等價關係

由第一步得到的矩陣 R 一般只滿足自身反性和對稱性， R 只是相似矩陣，需將 R 改造成 Fuzzy 等價矩陣。

若 U 為 n 元有限論域，則 U 上的 Fuzzy 等價關係 R 可以使用 Fuzzy 矩陣加以表示，並稱 R 為 Fuzzy 等價矩陣，可表示如下

1 自身性 $r_{ii} = 1$ 即 $I \subseteq R$ 或 $R(u, u) = 1$

2 對稱性 $r_{ij} = r_{ji}$ 即 $R = R^T$

3 傳遞性 $r_{ij} \geq \bigvee_{K=1}^n (r_{ik} \wedge r_{kj})$ 即 $R \circ R \subseteq R$

相似矩陣 R 不一定滿足傳遞性，此時 $R^2 = R \circ R = [r_{ij}^{(2)}] = [\bigvee_{K=1}^n (r_{ik} \wedge r_{kj})]$

為 Fuzzy 關係合成，如果 $R^2 = R$ ，則 R 為 Fuzzy 等價矩陣，不然則繼

續檢查是否 $R^4 = R^2$ ，以此類推下去。在形成 Fuzzy 等價矩陣後則根

據 R_λ 來分類，Fuzzy 等價矩陣中的數值大於 λ 所設定的範圍，設為 1，

否則為 0。

$R_\lambda = (r_{ij}^{(\lambda)})_{m \times n}$ ， R_λ 稱為 R 的 λ 截矩陣

$$r_{ij}^{(\lambda)} = \begin{cases} 1, & r_{ij} \geq \lambda \\ 0, & r_{ij} < \lambda \end{cases}$$

以一個例子做說明

假設 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ 表示由父親、兒子、女兒、鄰居

及母親五人組成的一個集合，請陌生人對這五人按相貌相似程度

進行 Fuzzy 分類，於是得到 Fuzzy 相似矩陣。

	父親	兒子	女兒	鄰居	母親
父親	1	0.8	0.6	0.1	0.2
兒子	0.8	1	0.8	0.2	0.85
女兒	0.6	0.8	1	0	0.9
鄰居	0.1	0.2	0	1	0.1
母親	0.2	0.85	0.9	0.1	1

自己與自己的相貌完全相像，所以對角線上的元素值皆為 1

$r_{35} = r_{53} = 0.9$ ，表示母女相貌相像程度為 90%

$r_{14} = r_{41} = 0.1$ ，表示父親與鄰居相貌相像程度為 10%

由於相似矩陣不是等價矩陣，必須先轉成等價矩陣才能分類

$$R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.85 \\ 0.6 & 0.8 & 1 & 0 & 0.9 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & 1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.85 & 0.9 & 0.1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.85 \\ 0.6 & 0.8 & 1 & 0 & 0.9 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & 1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.85 & 0.9 & 0.1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.8 & 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.85 & 0.2 & 0.85 \\ 0.8 & 0.85 & 1 & 0.2 & 0.9 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 1 & 0.2 \\ 0.8 & 0.85 & 0.9 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

R^2 中第三列第二行元素的計算方式如下

$$\begin{aligned} & (0.6 \wedge 0.8) \vee (0.8 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.8) \vee (0 \wedge 0.2) \vee (0.9 \wedge 0.85) \\ & = 0.6 \vee 0.8 \vee 0.8 \vee 0 \vee 0.85 = 0.85 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.8 & 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.85 & 0.2 & 0.85 \\ 0.8 & 0.85 & 1 & 0.2 & 0.9 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 1 & 0.2 \\ 0.8 & 0.85 & 0.9 & 0.2 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.8 & 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.85 & 0.2 & 0.85 \\ 0.8 & 0.85 & 1 & 0.2 & 0.9 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 1 & 0.2 \\ 0.8 & 0.85 & 0.9 & 0.2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.8 & 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.85 & 0.2 & 0.85 \\ 0.8 & 0.85 & 1 & 0.2 & 0.9 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 1 & 0.2 \\ 0.8 & 0.85 & 0.9 & 0.2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= R^2 \end{aligned}$$

所以 R^4 為等價矩陣

當 $0 \leq \lambda \leq 0.2$ 時

$$R_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

將 U 分成 1 類： $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$

當 $0.4 < \lambda \leq 0.5$ 時

$$R_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

將 U 分成 2 類： $\{u_1, u_2, u_3, u_5\}, \{u_4\}$

當 $0.5 < \lambda \leq 0.8$ 時，將 U 分成 3 類： $\{u_2, u_3, u_5\}, \{u_1\}, \{u_4\}$

當 $0.8 < \lambda \leq 0.85$ 時，將 U 分成 4 類： $\{u_3, u_5\}, \{u_1\}, \{u_2\}, \{u_4\}$

當 $0.85 < \lambda \leq 1$ 時，將 U 分成 5 類： $\{u_1\}, \{u_2\}, \{u_3\}, \{u_4\}, \{u_5\}$

λ 由 0 遞增到 1 時，所分的類由粗變細，這樣形成一個動態的聚類過程，利用電腦處理有關大批文件或圖片的分類或者聽懂人的口頭指示，就可借用這方面的理論（楊重駿等，1991）。

那麼運用在題目之間如下：

設 $U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ 為待分類的題目全體，每一題由一組資料表示， $u_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}\}$ ，如何建立之間的相似關係，有許多方法，在得到題目間的相關係數並形成 Fuzzy 等價矩陣後，便可以根據 λ 值分成數個群聚，同一群聚中題目間的相似度較高，不同群聚的題目之間的相似度較低，從各群聚中出題。使得在較少的題目選取下，選出的題目間有較大的差異性，以判斷學生的整體程度。

第三章 研究方法

根據文獻探討的內容，將題目屬性分成兩組，一組為主題概念，一組為數學解題能力，在本文中主題概念為第三學習階段前的分數概念。首先以問卷調查取得每道題目的向量屬性值，然後以模糊聚類分析及判斷屬性值強度的方法建立兩種題目群組，接著配合兩種題目群組提出選題流程及系統實作，以建置出電腦適性化評量機制。

第一節 問卷設計

問卷設計是利用自然語言來測量對問題的看法，而自然語言的一個重要特性為具有模糊性，這種詞義上的模糊性有明確的中心概念，只是邊界的界限較不明確。因此在填答問卷前需先作問卷說明，本研究的問卷說明根據文獻探討的內容加以整理，除了簡短文字說明並輔以例題說明以協助填答者建立直接而整體的概念。(見附錄一、二)

由於小學有六個年級，不同年段間學生的身心發展差異大，教師的教學經驗不同，問卷應以高年級教師或對數學領域有研究的教師為對象。

問卷具有以下常理的假設

- 當教師勾選某一個概念時，表示這一題具有此一概念的直覺強度夠強，教師未勾選某一個概念時，表示這一題具有此一概念的直覺強度不夠。
- 對於同一道題目，甲教師可能勾選三個概念，因為甲教師認為從這三個概念都可以解題，乙教師可能勾選一個概念，因為乙

教師直覺上從這一個概念解題。

- 而同一位教師在不同時間勾選的概念也不一定相同。甲教師可能先勾選三個概念，後來直覺的認為只要勾選一個概念便可，而這一個概念應為原先勾選的三個概念之一，乙教師可能原先只勾選一個概念，後來又直覺的勾選兩個概念，而這兩個概念可能包含之前所勾選的概念。
- 如果某一個概念獲得的歸屬度高，表示這一道題目對大多數的人容易從此一概念作解釋，因此學生若回答錯誤，對大多數的學生來說可能是缺乏此一概念。

第二節 運用模糊測度建立題目群組

根據問卷的回收，建立題目向量屬性值，再由題目向量屬性值以模糊等價矩陣形成選題策略 I 題目群聚及依據屬性值強度形成選題策略 II 題目群聚。選題策略 I 的目的：判斷學生整體的程度適合哪一個年級及哪一個難易程度。選題策略 II 的目的：用來判斷學生在學習概念的表現情形。

壹、建立題目向量屬性值

一、以模糊統計試驗建立題目第一至四個向量屬性值

屬性值（歸屬度）= 勾選人數 / 全部人數

例如題目 A 的屬性 1 在 10 人中有 3 人勾選，則屬性 1 在題目

A 的屬性值（歸屬度）= 3/10

二、以屬性測度建立題目第五至七個向量屬性值

屬性值（歸屬度）= $p_1 \times 0 + p_2 \times 0.25 + p_3 \times 0.5 + p_4 \times 0.75 + p_5 \times 1$

例如題目 A 的屬性 6 在 10 人中有 3 人勾選□1，5 人勾選□2，2 人勾選□3，則屬性 6 題目 A 的屬性值（歸屬度） $=0.3 \times 0 + 0.5 \times 0.25 + 0.2 \times 0.5 + 0 \times 0.75 + 0 \times 1 = 0.225$

貳、選題策略 I 的題目群聚

依據題目前四個屬性以模糊聚類分析建立選題策略 I 的題目群組，在同一年級同一難度的所有題目間以數量積法計算相關係數形成相似矩陣，再經 MatLab 的計算形成模糊等價矩陣（附錄三），接著設定 λ 值，以形成題目群聚。選題策略 I 的目的：試圖以較少的題目判斷學生整體的程度適合哪一個年級及哪一個難易程度。因此以題目前四個屬性作整體考量，將較為相似的題目聚為一群，從不同的群聚出題，使得所出的題目間較能產生較大的差異性，當學生在選題策略 I 有偏向極端的表現時，便可形成電腦評量進退級的判斷。

參、選題策略 II 的題目群聚

依據屬性值強度形成選題策略 II 題目群聚，選題策略 II 的目的：用來判斷學生在個別學習概念的表現情形。

同一年級同一難度的所有題目接以題目前四個向量屬性值作為判斷的依據，例如題目在屬性 1 的歸屬度超過某一個閾值，便判斷這道題目具有屬性 1 的概念。

例如僅有屬性 1 的強度超過 0.6 的題目，形成群聚 G1，G1 內的題目可用來判斷學生是否具有屬性 1 的概念。屬性 1 和屬性 3 的強度皆超過 0.6 的題目，形成群聚 G13。G13 內的題目可用來判斷學生是否具有屬性 1 或屬性 3 的概念。

第三節 選題流程的探討

根據上一節所建立的兩種題目群組，探討運用這兩種題目群組的選題流程，首先建立選題流程圖並做整體說明，然後根據選題流程圖提出演算法，再由演算法成為程式撰寫的媒介。

壹、選題流程圖

選題流程圖是指一個年級的選題流程，每個年級的題庫都依難易度分成三個等級：簡單、中等、困難。

一、處於選題策略 I 時

情況一：

首先以選題策略 I 選出的數道題目作測驗，如果表現優異則進入同一年級困難程度題庫，再根據選題策略 I 選出的數道題目作測驗，如果又表現優異，則進入下一年級中等程度題庫，再根據選題策略 I 選出的數道題目作測驗，以此類推。

情況二：

在某一年級中等程度題庫以選題策略 I 選出的數道題目作測驗，如果表現很差則進入同一年級簡單程度題庫，再根據選題策略 I 選出的數道題目作測驗，如果又表現很差，則退回前一年級中等程度題庫，再根據選題策略 I 選出的數道題目作測驗，以此類推。

這一個階段的目的是判斷學生整體的程度適合哪一個年級及哪一個難易程度。

情況三：

如果學生在某一個年級及某一個難易程度的表現沒有呈現極端的現象，則開始進入選題策略 II。

二、進入選題策略Ⅱ之後

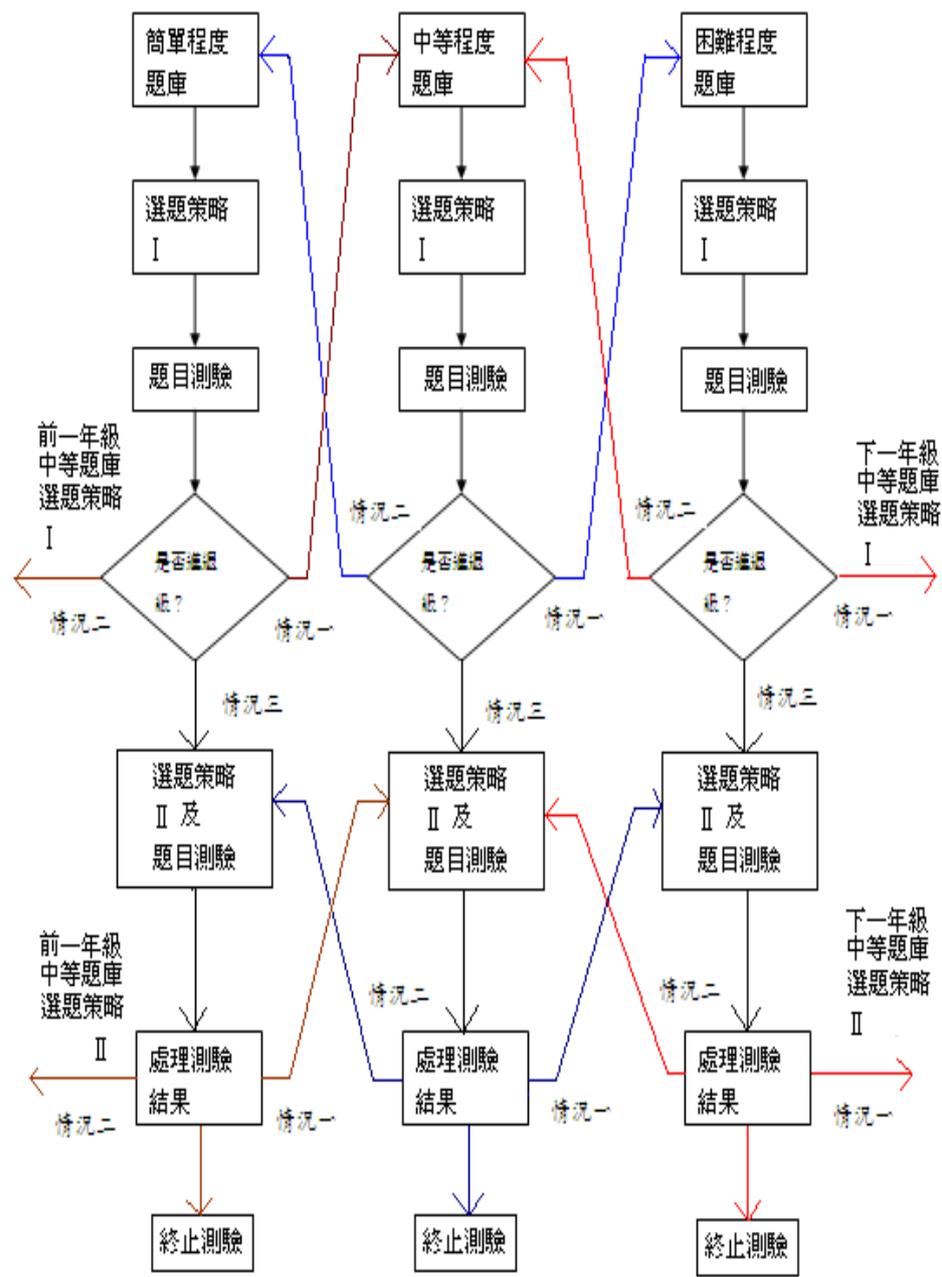
選題策略Ⅱ的每個群聚都表示某一個或同時數個較強烈的學習概念。可以用來判斷學生在學習概念的表現情形，在同一年級同一難度中，選題策略Ⅱ與選題策略Ⅰ使用相同的題目，只是題目有不一樣的分群，另外選題策略Ⅱ採一次測驗一題，如果選到的那一題在選題策略Ⅰ已測驗過，則這一題不測驗，當作這一題已在選題策略Ⅱ測驗了，接著再重新選一題。（這樣作法可減少測驗題數）

情況一：

當學生在選題策略Ⅱ及選題策略Ⅰ的整體表現良好則產生進級，進入下一個難易度或下一年級中等程度題庫，在進級後根據選題策略Ⅱ測驗，此時只考慮選題策略Ⅱ的表現，一直到測驗的整體表現低於某一個閾值或無法再前進則終止測驗。

情況二：

當學生在選題策略Ⅱ及選題策略Ⅰ的整體表現不佳則產生退級，退回前一個難易度或前一年級中等程度題庫，在退級後根據選題策略Ⅱ做測驗，此時只考慮選題策略Ⅱ的表現，一直到測驗的整體表現高於某一個閾值或無法再後退則終止測驗。



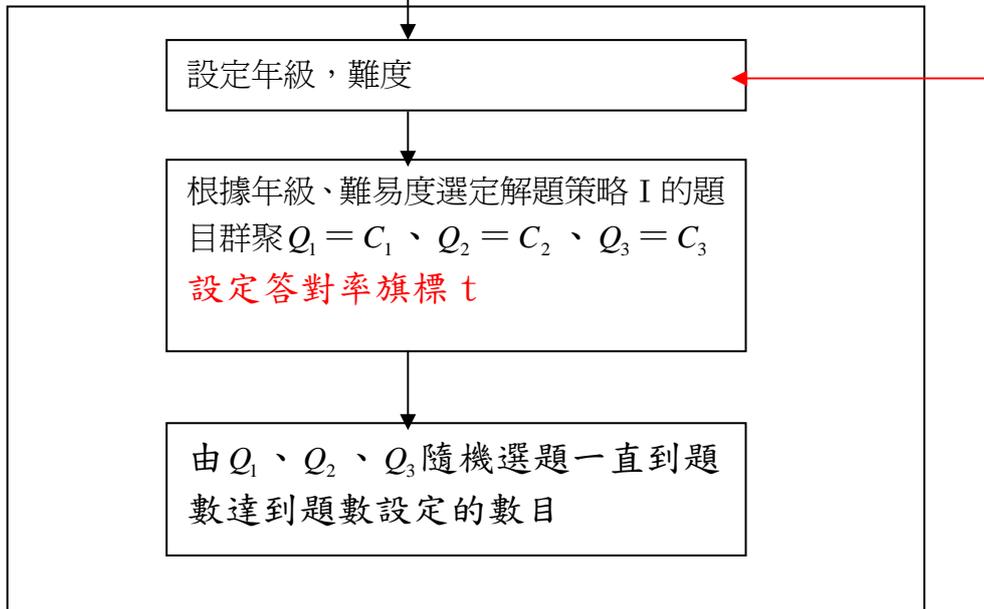
以年級為單位的選題流程圖

圖 7：以年級為單位的選題流程圖

資料來源：本研究建置

貳、選題流程演算法

選題策略 I



題目測驗

- 1 以選題策略 I 選出的數道題目，藉由互動網頁提供測驗
- 2.紀錄測驗狀況
 - 2.1 比對這些題目屬於選題策略 II 的哪些群聚，將答對題號及答錯題號紀錄到學習者資料庫 I
 - 2.2 偵測這些題目後三個屬性值，紀錄到學習者資料庫 II

是否進退級

計算答對率

答對率超過 85%

如果 難度 = 中等，設定 難度 = 困難，回到選題策略 I

如果 難度 = 困難，設定 年級 = 下一個年級， 難度 = 中等
回到選題策略 I

答對率低過 15%

如果 難度 = 中等，設定 難度 = 簡單，回到選題策略 I

如果 難度 = 簡單，設定 年級 = 前一個年級， 難度 = 中等
回到選題策略 I

答對率介於 85% 與 15% 之間，則以目前的年級及難易度進入選題策略 II。
年級及難度無法再前進或後退者進入選題策略 II。

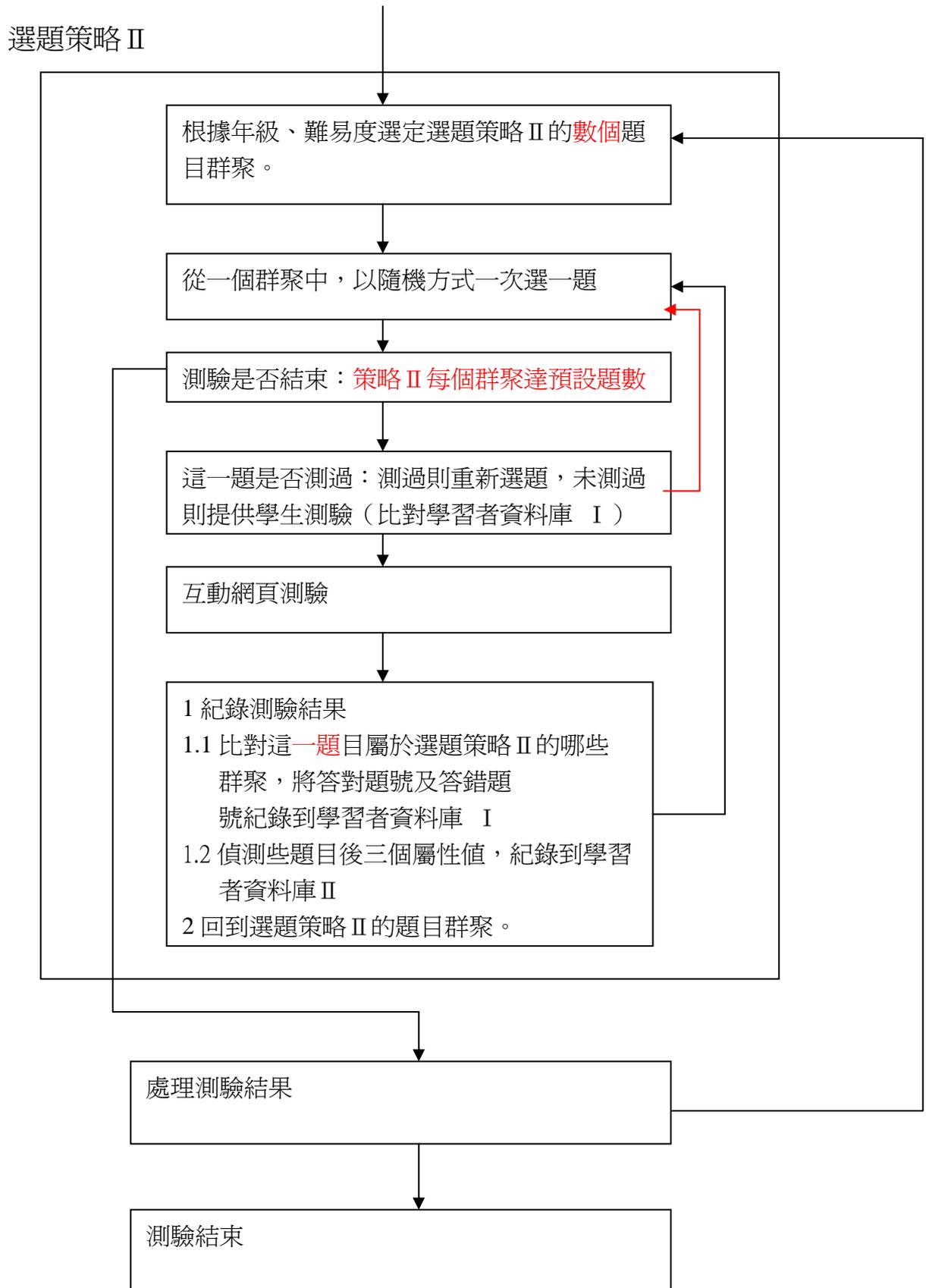


圖 8：選題流程演算法 資料來源：本研究建置

第四節 系統建置

本系統採用三層次主從遠距架構（何榮桂）

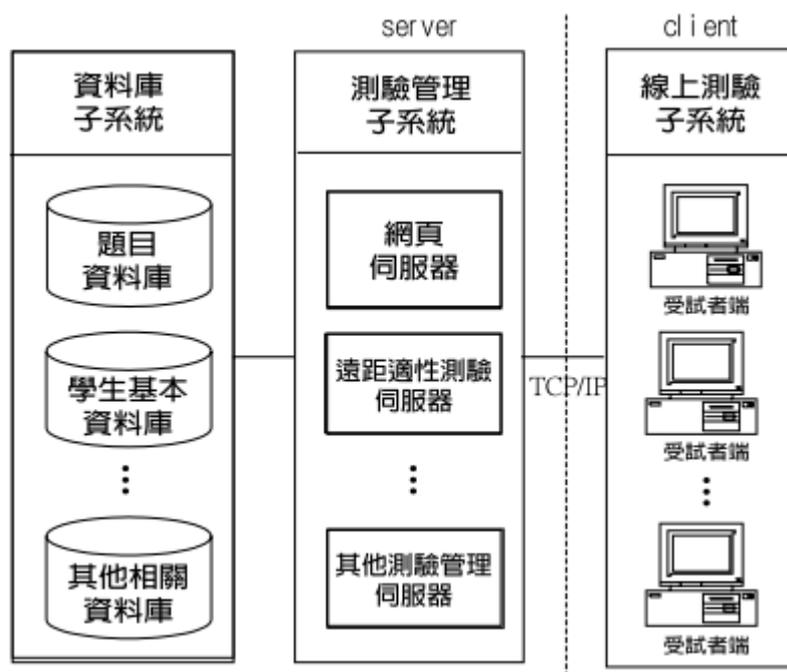


圖 9：線上測驗之三層次遠距架構

資料來源：網路環境題庫與測驗之整合系統，科學發展月刊，第 28 卷第 7 期

網頁伺服器由 ASP 程式撰寫，資料庫採用 MySQL。

顯示所有群組分類
顯示所有題目
編輯題目

檢視所有題目

新增題目成功!

題號	題目			
14	算算看，並把答案化為最簡分數 $(4/10) = ?$ (1) $2/5$ (2) $5/2$			
			<input checked="" type="checkbox"/> 有圖檔	
年級	難度	策略1 群組	策略2 群組	答案
6年級	簡單	C2	G34	1
選項1	選項2	選項3	選項4	選項5
<input type="button" value="新增題目"/> <input type="button" value="重新輸入"/>				

圖 10：題目編輯畫面

資料來源：本研究建置

以上面為例，題號 14 號的題目屬於六年級簡單程度題目，選題策略 I 的群聚編號為 C2，選題策略 II 的群聚編號為 G4。



請選擇身份登入系統

[我是老師](#)
[我是學生](#)

[未登入](#)



年級:6
程度:2
策略:1

題號	題目	選項
1	用 >、<、= 的符號填入 () 裡。 $5 \div (9/20)$ () $5 \div (99/100)$ 。(1) > (2) < (3) =	1
2	下圖中填入正確答案 () $\frac{乙 \times 丁}{甲 \times 丙} =$ ① $\frac{乙 \times 丁}{甲 \times 丙}$ ② $\frac{乙 \times 丙}{甲 \times 丁}$ ③ $\frac{丙 \times 丁}{甲 \times 乙}$ ④ $\frac{甲 \times 丁}{乙 \times 丙}$ 。	1
3	六年級男女學生比為 18 : 19，若女生有 323 人，請問六年級學生共有多少人？(1) 629 (2) 639 (4) 705	1
4	$13/52$ 不是下列哪一個數？(1) $1/4$ (2) $2/8$ (3) $3/12$ (4) $4/15$	1
5	和 8 : 15 相等的比有幾個？(1) 1 個 (2) 10 個 (3) $8/15$ 個 (4) 無限多個。	1
6	5 公尺長的鐵管重 18 公斤，相同的鐵管 27 公尺長重幾公斤？(1) $97 \frac{1}{5}$ (2) $97 \frac{1}{6}$ (3) $97 \frac{1}{7}$	1
7	某數乘以 $1/2$ 是 $4/6$ ，某數是多少？(1) $4/12$ (2) 6/8 (3) $4/3$	1
8	下圖中填入正確答案 () $\frac{3}{4} =$ ① $\frac{1}{4} + 3$ ② $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ ③ $3 + \frac{1}{4}$ ④ 以上皆是。	1
9	下圖中填入正確答案 () $a \cdot b$ 皆為整數。 $b \div a =$ ① $a \times \frac{1}{b}$ ② $b \times \frac{1}{a}$ ③ $\frac{1}{b} \times \frac{1}{a}$ ④ $a \div \frac{1}{b}$ 。	1
10	算式中的答案是多少？ $12 \frac{4}{7} \div 1 \frac{1}{14} - 11 \frac{1}{2} \div 1 \frac{1}{14} =$ ()	1

圖 11： 題目施測畫面

資料來源：本研究建置

第四章 實作及解釋

首先說明題目如何形成分類，再舉出題目聚類的實例，接著說明施測的結果及可能的解釋。

第一節 試題的聚類分析

以題數最少的三年級困難程度的題庫為例，共有 12 題。由原始問卷資料經由數量積法計算相關係數形成相似矩陣，再由 MatLab 程式的計算獲得模糊等價矩陣（修改自李國勇，2009），由模糊等價矩陣設定 λ 值，找出題目選題策略 I 的群聚。接著判斷原始問卷資料的數值大小，以形成選題策略 II 的群聚。

壹、選題策略 I 的群聚

一、原始問卷資料

表 11：三年級困難程度題目問卷資料

題號	除法	比的概 念	單位分 數	等值分 數
251	1	0	0	0.3
252	0.6	0	0.4	0.3
253	1	0	0.3	0
254	0.6	0.4	0	0.3
255	0.6	0	0.4	0.3
256	0.6	0	0.4	0.3
257	0.6	1	0.4	0
258	0.7	0	0	0.3
259	0.6	0	0.7	0.3
260	1	0.3	0	0
261	0.6	0	0.4	0.3
262	0.3	0	0.7	0.3

資料來源：本研究建置

表格內的數值由模糊統計試驗獲得，

$$\mu(\mu_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 \text{ 屬於 } A^* \text{ 的次數}}{n}$$

以題號 251 為例，回答問卷的人有 100%想到可用說明除法的概念來解題，30%想到可用說明等值分數的概念來解題。題號 251 的第一組向量屬性可表示成 (1, 0, 0, 0.3)

二、相關係數矩陣

題目自己與自己的相關係數設為 1，不同題目間的相關係數則利用數量積法獲得。

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \frac{1}{M} \sum_{k=1}^m x_{ik} \cdot x_{jk} & i \neq j \end{cases}$$

相似矩陣 R 表 12：三年級困難程度題目之相似矩陣

	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262
251	1	0.1725	0.25	0.1725	0.1725	0.1725	0.15	0.1975	0.1725	0.25	0.1725	0.0975
252	0.1725	1	0.18	0.1125	0.1525	0.1525	0.13	0.1275	0.1825	0.15	0.1525	0.1375
253	0.25	0.18	1	0.15	0.18	0.18	0.18	0.175	0.2025	0.25	0.18	0.1275
254	0.1725	0.1125	0.15	1	0.1125	0.1125	0.19	0.1275	0.1125	0.18	0.1125	0.0675
255	0.1725	0.1525	0.18	0.1125	1	0.1525	0.13	0.1275	0.1825	0.15	0.1525	0.1375
256	0.1725	0.1525	0.18	0.1125	0.1525	1	0.13	0.1275	0.1825	0.15	0.1525	0.1375
257	0.15	0.13	0.18	0.19	0.13	0.13	1	0.105	0.16	0.225	0.13	0.115
258	0.1975	0.1275	0.175	0.1275	0.1275	0.1275	0.105	1	0.1275	0.175	0.1275	0.075
259	0.1725	0.1825	0.2025	0.1125	0.1825	0.1825	0.16	0.1275	1	0.15	0.1825	0.19
260	0.25	0.15	0.25	0.18	0.15	0.15	0.225	0.175	0.15	1	0.15	0.075
261	0.1725	0.1525	0.18	0.1125	0.1525	0.1525	0.13	0.1275	0.1825	0.15	1	0.1375
262	0.0975	0.1375	0.1275	0.0675	0.1375	0.1375	0.115	0.075	0.19	0.075	0.1375	1

資料來源：本研究建置

三、模糊等價矩陣

相似矩陣 R 一般只滿足自身反性和對稱性，不一定滿足傳遞性。需將 R 改造成 Fuzzy 等價矩陣。

此時 $R^2 = R \circ R = [r_{ij}] = [\bigvee_{k=1}^n (r_{ik} \wedge r_{kj})]$ 為 Fuzzy 關係合成，如果 $R^2 = R$ ，則 R 為 Fuzzy 等價矩陣，不然則繼續檢查是否 $R^4 = R^2$ ，以此類推下去。

表 13：三年級困難程度題目之模糊等價矩陣

	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262
251	1	0.1825	0.25	0.19	0.1825	0.1825	0.225	0.1975	0.2025	0.25	0.1825	0.19
252	0.1825	1	0.183	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825
253	0.25	0.1825	1	0.19	0.1825	0.1825	0.225	0.1975	0.2025	0.25	0.1825	0.19
254	0.19	0.1825	0.19	1	0.1825	0.1825	0.19	0.19	0.19	0.19	0.1825	0.19
255	0.1825	0.1825	0.183	0.1825	1	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825
256	0.1825	0.1825	0.183	0.1825	0.1825	1	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825
257	0.225	0.1825	0.225	0.19	0.1825	0.1825	1	0.1975	0.2025	0.225	0.1825	0.19
258	0.1975	0.1825	0.198	0.19	0.1825	0.1825	0.1975	1	0.1975	0.1975	0.1825	0.19
259	0.2025	0.1825	0.203	0.19	0.1825	0.1825	0.2025	0.1975	1	0.2025	0.1825	0.19
260	0.25	0.1825	0.25	0.19	0.1825	0.1825	0.225	0.1975	0.2025	1	0.1825	0.19
261	0.1825	0.1825	0.183	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	1	0.1825
262	0.19	0.1825	0.19	0.19	0.1825	0.1825	0.19	0.19	0.19	0.19	0.1825	1

資料來源：本研究建置

λ value: 0.1825 0.1900 0.1975 0.2025 0.2250
 0.2500 1.0000
 count: 76 26 10 8 6 6 12

四、設定 λ 值形成的題目群聚

在形成 Fuzzy 等價矩陣後則根據 R_λ 來分類，Fuzzy 等價矩陣中的

數值大於 λ 所設定的範圍，設為 1，否則為 0。

設定 λ 值的目的是在將題目分成數個群聚以配合選題策略 I，

Fuzzy 等價矩陣中行向量相同的題目為同一類。

$\lambda = 0.25$ 時（註：矩陣中行向量相同的題號聚成一類）

	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262
251	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
252	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
253	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
254	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
255	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
256	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
257	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
258	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
259	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
260	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
261	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
262	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

可以看到 { 251, 253, 260 } 三題聚成一類，其餘各題自成一類

$\lambda = 0.225$ 時（註：矩陣中行向量相同的題號聚成一類）

	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262
251	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
252	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
253	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
254	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
255	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
256	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
257	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
258	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
259	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
260	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
261	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

262

0

 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1

可以看到 { 251, 253, 257, 260 } 四題聚成一類，其餘各題自成一類

$\lambda = 0.19$ (註：矩陣中行向量相同的題號聚成一類)

	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262
251	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
252	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
253	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
254	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
255	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
256	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
257	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
258	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
259	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
260	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
261	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
262	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1

可以看到 { 251, 253, 254, 257, 258, 259, 260, 262 } 八題聚成一類，其餘各題自成一類。

針對少量題目只形成一個大的群聚中心的情形，提出修正的方法，以上面為例，將最先形成群聚的 { 251, 253, 257, 260 } 當成一個群聚， $\lambda = 0.19$ 時尚未進入群聚的 252, 255, 256, 261 四題形成一個群聚，剩下的 254, 258, 259, 262 形成一個群聚。

$$C1 = \{ \boxed{251}, \boxed{253}, \boxed{257}, \boxed{260} \}$$

$$C2 = \{ \underline{254}, \underline{258}, \underline{259}, \underline{262} \}$$

$$C3 = \{ 252, 255, 256, 261 \}$$

因為選題策略 I 的群聚，目的是在利用少量題目來猜測學生的整體程度，因此希望這少量題目之間有較小的相關，在以上的修正方法中，在少量的題庫內只形成一個大的群聚，C1 的題目間最早形成群

聚，應比較具有一點點的整體相關性，C3 的題目最晚進入群聚，與群聚的整體相關性距離最遙遠，剩下的題目成為 C2 的群聚。假設選取五題，則選題順序由 C3 開始，依次為 C3、C2、C1、C3、C2。這是因為 C1 的題目才較具有整體相關性，選中的次數應較低。

再以六年級中等程度的題庫為例，共 27 題（題號由 32 至 58），重複以上的步驟得到模糊等價矩陣並設定 $\lambda = 0.3475$ 之 λ 截矩陣如下：

		$\lambda = 0.3475$																										
B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	A	
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58		
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

圖 12：六年級中等程度題目在 $\lambda = 0.3475$ 時形成之題目群聚

資料來源：本研究建置

$\lambda = 0.3475$ 時

題號 (35, 49, 51, 52, 55, 56, 58) 及題號 (37, 42, 44, 45, 53)、題號 (47, 48) 先各自形成一個群聚。也就是說，題數要較多才有機會形成不同的群聚中心。

貳、選題策略 II 的群聚

選題策略 I 的群聚只是為了選題的技巧而產生，選題策略 II 的群聚才具有判斷學習概念的意義。

表 14 選題策略 II 的群聚編號

選題策略 II 的群聚編號	對應的學習概念
G1	除法
G2	比的概念
G3	單位分數
G4	等值分數

資料來源：本研究建置

說明：Gab 表示同時具有 Ga 與 Gb 的學習概念。例如 G12 表示同時具有 G1 與 G2 的學習概念。G24 表示同時具有 G2 與 G4 的學習概念。G134 表示同時具有 G1、G3、G4 的學習概念，其餘以此類推。以三年級困難程度的題目為例。

表 15：三年級困難程度題目在『分數概念』的題目屬性值

題號	(除法 G1, 比的概念 G2, 單位分數 G3, 等值分數 G4)
251	(1, 0, 0, 0.3)
252	(0.6, 0, 0.4, 0.3)
253	(1, 0, 0.3, 0)
254	(0.6, 0.4, 0, 0.3)
255	(0.6, 0, 0.4, 0.3)
256	(0.6, 0, 0.4, 0.3)
257	(0.6, 1, 0.4, 0)
258	(0.7, 0, 0, 0.3)
259	(0.6, 0, 0.7, 0.3)
260	(1, 0.3, 0, 0)
261	(0.6, 0, 0.4, 0.3)
262	(0.3, 0, 0.7, 0.3)

資料來源：本研究建置

以上為三年級困難程度的題目，可以發現題目較傾向於除法的概念，不過填問卷者只知道題號，不知道題號所相對應的年級及難度。由以上的資料，三年級有關分數的概念是以除法的概念為主，這些以除法的概念為主的題目有些也可用來理解單位分數（題號 259，262）

當依據屬性值強度來形成群聚時，比較選擇不同屬性值強度所造成的情況。

（屬性值 ≥ 0.6 ，才判定題目具有此一屬性的概念）

選題策略 II	題號
G1	251 ，252， 253 ， <u>254</u> ，255，256， <u>258</u> ， 260 ，261
G12	257
G13	<u>259</u>
G3	<u>262</u>

（屬性值 ≥ 0.7 ，才判定題目具有此一屬性的概念）

選題策略 II	題號
G_1	251 ， 253 ， <u>258</u> ， 260
G_2	257
G_3	<u>259</u> ， <u>262</u>
無法分類	252， <u>254</u> ，255，256，261

叁、題目的群聚示例

以六年級中等程度選題策略 I 群聚中的 C2 及 C3 為例

表 16：六年級中等程度題庫在選題策略 I 時形成之題目群聚

	聚類過程中產生一個以上的群聚中心 ($\lambda=0.3475$) (共 27 題)
C1 (共 14 題)	32, 33, 34, 36, 38, 39, 40, 41, 43, 46, 50, 52, 54, 57
C2 (共 6 題)	35, 49, 51, 55, 56, 58
C3 (共 5 題)	37, 42, 44, 45, 53
C4 (共 2 題)	47, 48

資料來源：本研究建置

表 17：六年級中等程度題庫選題策略 I 群聚編號 C2 之題目
(對應的學習概念為選題策略 II 群聚編號)

題號	對應的學習概念	題目
35	G4	13/52 不是下列哪一個數？，(1) 1/4 (2) 2/8 (3) 3/12 (4) 4/15
49	G4	和 8:15 相等的比有幾個？(1) 1 個 (2) 10 個 (3) 8/15 個 (4) 無限多個。
51	G24	一打鉛筆是 12 枝，請完成下表：甲、乙、丙答案依序為 (1) 55, 84, 50 (2) 60, 84, 55 (3) 60, 84, 50
		打數 (打) 5 7 20 丙
		枝數 (枝) 甲 乙 240 600
52	G124	寫成最簡單整數比和比值： 26:65 = (): () 答案依序為 (1) 2, 5 (2) 2, 4 (3) 2, 3
55	G24	峻賢的手表 3 天快 15 秒，3 星期快幾秒？ 答：() 秒 (1) 95 (2) 105 (3) 110
56	G24	5 公尺長的鐵管重 18 公斤，相同的鐵管 27 公尺長重幾公斤？ (1) 97 又 1/5 (2) 97 又 1/6 (3) 97 又 1/7
58	G24	() 甲是 (1/5)，乙是 (1/6)，甲:乙=5:6。對的填 1，錯的填 2

資料來源：本研究建置

上面的題目多包含有 G4 或 G2 的學習概念，就回答問卷的教師意

見，這些題目的解題可由等值分數（即 G4）或比（即 G2）的概念來解題。換句話說，教師重新教學時，解題過程可強調等值分數（即 G4）或比（即 G2）的理解。

表 18：六年級中等程度題庫選題策略 I 群聚編號 C3 之題目
（對應的學習概念為選題策略 II 群聚編號）

題號	對應的學習概念	題目
37	G13	某數除以 4，所得的商是 $\frac{3}{20}$ ，某數乘以 10 的積是多少？(1) 6 (2) 8 (3) 12
42	G13	$() \frac{3}{4} =$ ① $\frac{1}{4} \div 3$ ② $\frac{1}{4} \div \frac{1}{3}$ ③ $3 \div \frac{1}{4}$ ④ 以上皆是。
44	G13	下圖中填入正確答案 $() a、b$ 皆為整數， $b \div a =$ ① $a \times \frac{1}{b}$ ② $b \times \frac{1}{a}$ ③ $\frac{1}{b} \times \frac{1}{a}$ ④ $a \div \frac{1}{b}$ 。
45	G1	某數乘以 $\frac{1}{2}$ 是 $\frac{4}{6}$ ，某數是多少？(1) $\frac{4}{12}$ (2) $\frac{6}{8}$ (3) $\frac{4}{3}$
53	G134	3 杯咖啡賣 160 元，買 9 杯咖啡付 500 元，可找回 () 元。(1) 18 (2) 20 (3) 25 (4) 30

資料來源：本研究建置

上面的題目多包含有 G1 或 G3 的學習概念，就回答問卷的教師意見，這些題目的解題可由除法（即 G1）的概念或單位分數（即 G3）來解題。換句話說，教師重新教學時，解題過程可強調除法（即 G1）或單位分數（即 G3）的理解。

六年級中等程度題庫選題策略 I 群聚編號 C4 之題目
（對應的學習概念為選題策略 II 群聚編號）

題號	對應的學習概念	題目
47	G14	算式中的答案是多少？(1) $25 \div 4$ (2) $35 \div 4$ (3) $45 \div 4$ 算算看，並把答案化為最簡分數或整數： $\left(2\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{5} = (\quad)$
48	G14	算式中的答案是多少？ $12\frac{4}{7} \div 1\frac{1}{14} - 11\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{14} = (\quad)$

上面的題目多包含有 G1 或 G4 的學習概念，就回答問卷的教師意見，這些題目的解題需藉由除法（即 G1）及等值分數（即 G4）的概念來解題。

題號（32，33，34，36，38，39，40，41，43，46，50，52，54，57）則先當成一類，由以上四個群聚來出題，會造成題號 47、48 必有一題出現在考題中，因為這個群聚只有兩題。

在選題策略 I：根據模糊聚類分析的方法分成不同群聚，由不同的題目群聚來隨機選題。目的在運用題目間有較大的差異性來出題。以評量學生的整體表現。

選題策略 II：運用個別學習概念出題。針對具某一個學習概念較強的群聚來出題。

因此在同一個難度範圍的每道題目都有兩階段的群聚編號，在選題策略 I 的編號是為了從不同的題目群聚來隨機選題，在選題策略 II 的編號則說明此道題目所對應的學習概念。進入選題策略 II 後，一次只出一題施測，偵測題目是否已在選題策略 I 中施測過，以避免重

複出題，當對應的學習概念出題達預定題數，和選題策略 I 合計累積答對率以決定進退級。

當然對於題目如何分群可以有許多其他的方法，例如以專家的意見，直接對一些題目加以分群，或是其他方法。在本研究中，教師只要對單一題目給予數值，題目之間如何分成不同群聚，則經由電腦的計算加以整合。因此在實務推行上的假設，例如一群教師只需對 30 題提出判斷，四群教師便可提供 120 道不同題目的數值，這 120 道不同題目如何分成不同群聚，便交由電腦的計算加以整合。以這種方式來處理建立大型題庫的方法。

以上的題目群聚由計算獲得，如果回答問卷的人數增加，題目群聚可能會有所微調。對於群聚內的題目相似度如何？如果在題庫中本來就沒有相似度高的題目，那麼聚成一類的題目是因為相對的比較而產生。如果在大量題目的題庫中，可能在題庫中有一些相似度高的題目有可能聚成一類。

第二節 施測結果與分析

壹、施測結果

施測過程如下：

學生預設由六上中等程度的題庫施測，若在選題策略 I 的答對率超過 85% 則進入困難程度題庫施測，低於 15% 則進入簡單程度題庫施測，介於 85% 與 15% 之間則進入選題策略 II，選題策略 II 的作答情形合併選題策略 I 的作答情形計算答對率（因為這是屬於同一年級及難度的題庫），若答對率在 60% 以上則進入困難程度題庫施測，若答對

率在 40% 以下進入簡單程度題庫施測。由於程式設計的關係，把不同難度的答題情形合併計算，所以累積答對率是把所有的答題情形一併合計。例如六上困難程度累積答對率，是把六上中等程度和六上困難程度的答題情形一併合計。

六乙施測結果

作答時間約 30 分鐘，學生作答題數多半約在 15 題左右。

表 19：六乙施測結果

座號	選題策略 I	選題策略 II	施測結果解釋	參照五下數學學期成績
1	六上中等程度答對率 67%	四年級中等程度累積答對率 40%	四年級中等程度累積答對率 40%	68
2	六上中等程度答對率 67%	六上困難程度累積答對率 60%	六上中等程度答對率 67% 六上困難程度累積答對率 60%	86
3	六上中等程度答對率 56%	六上困難程度累積答對率 64%	六上中等程度答對率 56% 六上困難程度累積答對率 64%	91
4	六上中等程度答對率 89% 進級困難程度	六上困難程度累積答對率 56%	六上中等程度答對率 89% 六上困難程度累積答對率 56%	96
5	六上中等程度答對率 78%	六上困難程度累積答對率 60%	六上中等程度答對率 78% 六上困難程度累積答對率 60%	88

6	六上中等程度答對率 67%	六上困難程度累積答對率 66%	六上中等程度答對率 67% 六上困難程度累積答對率 66%	86
7	六上中等程度答對率 89% 進級困難程度	六上困難程度累積答對率 44%	六上中等程度答對率 89% 六上困難程度累積答對率 44%	96
8	六上中等程度答對率 56%	六上中等程度答對率 38%	六上中等程度答對率 38%	75
9	六上中等程度答對率 78%	六上困難程度累積答對率 64%	六上中等程度答對率 78% 六上困難程度累積答對率 64%	88
10	六上中等程度答對率 22%	六上中等程度答對率 20%	六上中等程度答對率 20%	36
11	六上中等程度答對率 78%	六上困難程度累積答對率 68%	六上中等程度答對率 78% 六上困難程度累積答對率 68%	90
12	六上中等程度答對率 100% 進級困難程度	六上困難程度累積答對率 56%	六上中等程度答對率 100% 六上困難程度累積答對率 56%	91
13	六上中等程度答對率 33%	六上中等程度答對率 27%	六上中等程度答對率 27%	41
14	六上中等程度答對率 89% 進級困難程度	六上困難程度累積答對率 33%	六上中等程度答對率 89% 六上困難程度累積答對率 33%	80

15	度 六上中等程 度答對率 89% 進級困難程 度	六上困難程 度累積答對 率 56%	% 六上中等程度 答對率 89% 六上困難程度 累積答對率 56%	89
16	六上中等程 度答對率 67%	六上困難程 度累積答對 率 68.75%	六上中等程度 答對率 67% 六上困難程度 答對率 68.75%	96
17	未測驗			85
18	六上中等程 度答對率 89% 進級困 難程度	六上困難程 度累積答對 率 78%	六上中等程度 答對率 89% 六上困難程度 累積答對率 78%	92
19	六上中等程 度答對率 56%	六上困難程 度累積答對 率 61%	六上中等程度 答對率 56% 六上困難程度 累積答對率 61%	93
20	六上中等程 度答對率 56%	六上困難程 度累積答對 率 64%	六上中等程度 答對率 56% 六上困難程度 累積答對率 64%	91
21	六上中等程 度答對率 22%	六上中等程 度答對率 35%	六上中等程度 答對率 35%	79

資料來源：本研究建置

六甲施測結果

作答時間約 30 分鐘，學生作答題數多半約在 15 題左右。

表 20：六甲施測結果

座號	選題策略 I	選題策略 II	施測結果解釋	參照五下數學學期成績
1	六上中等程度答對率 44%	五年級中等程度累積答對率 40%	五年級中等程度累積答對率 40% 未認真作答	84
2				
3	六上中等程度答對率 44%	未完成測驗		88
4	六上中等程度答對率 67%	六上困難程度累積答對率 75%	六上中等程度答對率 67% 六上困難程度累積答對率 75%	92
5	六上中等程度答對率 89%	系統跳出	六上中等程度答對率 89%	94
6	六上中等程度答對率 40%	六上困難程度累積答對率 60%	六上中等程度答對率 40% 六上困難程度累積答對率 60%	89
7	六上中等程度答對率 40% 退級六上簡單程度	三年級簡單程度累積答對率 54%	六上中等程度答對率 40% (作答 55 題, 有猜題)	89
8	六上中等程度答對率 89% 進級困難程度	六上困難程度累積答對率 61.7%	六上中等程度答對率 89% 六上困難程度累積答對率 61.7%	93
9	六上中等程度答對率 56%	三年級簡單程度累積答對率 54%	六上中等程度答對率 56% (作答 55 題, 有猜題)	86

10	未測驗			
11	六上中等程度答對率 44% 退級六上簡單程度	六上簡單程度程度累積答對率 40%	六上中等程度答對率 44% 六上簡單程度累積答對率 40% (作答 15 題)	85
12	六上中等程度答對率 33%	六上困難程度累積答對率 60%	六上中等程度答對率 33% 六上困難程度累積答對率 60%	90
13	六上中等程度答對率 33% 退級六上簡單程度	六上簡單程度程度累積答對率 40%	六上中等程度答對率 33% 六上簡單程度累積答對率 40%	91
14	六上中等程度答對率 100% 進級困難程度	六上困難程度累積答對率 89%	六上中等程度答對率 100% 六上困難程度累積答對率 89%	95
15	六上中等程度答對率 67%	六上困難程度累積答對率 60%	六上中等程度答對率 67% 六上困難程度累積答對率 60%	90
16	六上中等程度答對率 100%	未完成測驗	六上中等程度答對率 100% 未完成測驗	91
17	六上中等程度答對率 67%	未完成測驗		78
18	六上中等程度答對率 67%	系統跳出		90

19	六上中等程度答對率 78%	六上困難程度累積答對率 66%	六上中等程度答對率 78% 六上困難程度累積答對率 66%	92
20	六上中等程度答對率 33%	未完成測驗	六上中等程度答對率 33% 未完成測驗	88

資料來源：本研究建置

貳、以整體答對率來看

以五下的數學學期成績作為數學能力的參照，運用常理的假設，大部分的高分者在整體測驗的表現方面，應有較佳的傾向。六乙與六甲的施測結果與此一常理的假設尚能符合。而測驗的過程是假設學生能專心測驗，然而部份學生有猜題的現象，例如六甲的七號與九號在 30 分鐘作答題數 55 題，明顯的猜題。

以六乙為例：

學生 1 號在選題策略 I 時六上中等程度答對率 67%，進入選題策略 II，在選題策略 II 表現不佳退至四年級中等程度答對率 40%

(五下數學學期參照成績 41 分)

可能的猜測：亂猜題或四、五年級的分數基礎不佳。

學生 4 號在選題策略 I 時六上中等程度答對率 89%，在選題策略 I 時晉級至六上困難程度並且答對率 56%

施測結果：

六上中等程度答對率 89%，六上困難程度累積答對率 56%

(五下數學學期參照成績 96 分)

可能的猜測：中等程度題目表現佳，困難程度題目尚不熟。

學生 13 號在選題策略 I 時六上中等程度答對率 33%，進入選題策略 II，在選題策略 II 時六年級中等程度累積答對率降至 27%

施測結果：六年級中等程度答對率 27%

(五下數學學期參照成績 41 分)

可能的猜測：分數的基礎不佳。

學生 16 號在選題策略 I 時六上中等程度答對率 67%，進入選題策略 II，在選題策略 II 時累積答對率在 60% 以上晉級至六上困難程度並且累積答對率 68.75%

施測結果：六上困難程度累積答對率 68.75%

(五下數學學期參照成績 96 分)

可能的猜測：六上的分數基礎能有一定的程度。

學生 18 號在選題策略 I 時六上中等程度答對率 89%，在選題策略 I 時晉級至六上困難程度並且答對率 78%

施測結果：六上中等程度答對率 89% 六上困難程度累積答對率 78%

(五下數學學期參照成績 92 分)

可能的猜測：六上的分數基礎良好。

叁、以資料庫的內容來分析個別的學習概念（以六乙為例）

從資料庫匯出學生 13 號和學生 16 號的答題情況

圖 13：六乙 13 號與 16 號在資料庫中的答題狀況

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
1	right																										
2	std	C1	C2	G1	G2	C3	G3	C4	C5	G5	G6	01	02	G4	03	04	G12	G123	G134	G13	G24	G23	G34	G124	G14		
3	613	54;32;55;																									
4	616	52;41;49;			54;	53;45;37;									64;								56;74;				
5																											
6	worse																										
7	std	C1	C2	G1	G2	C3	G3	C4	C5	G5	G6	01	02	G4	03	04	G12	G123	G134	G13	G24	G23	G34	G124	G14		
8	613	52;	58;35;			53;37;45;									49;											43;	
9	616	57;	58;35;												65;											43;	
10																											
11																											

將上述資料整理如下：

學生 13 號的答題狀況

	答對	答錯
題號	54、32、55	52、58、35、53、37、45、49、43
題號的群聚編號	G2、G4、G24	G124、G24、G4、G134、G13、G1、G4、G14

學生 16 號的答題狀況

	答對	答錯
題號	56、74、38、64、53、45、37、54、49、52、41	57、58、35、65、43
題號的群聚編號	G24、G24、G12、G4、G134、G1、G13、G2、G4、G124、G12	G12、G24、G4、G4、G14

可能的猜測：學生 13 號較缺乏運用除法的性質的能力（題號的群聚編號包含有 G1 的題目答對率低），可能不清楚分數具有除法的概念。

學生 13 號在個別化教學上應加強分數具有除法的概念的再加強。

學生 16 號對於具有比的概念 (G2) 和等值分數的概念 (G4) 的題目，錯的少，對的多，對於比和等值分數的概念應具有一定的基礎，對於學生 16 號在個別化教學上，比的概念和等值分數的概念可挑選困難程度的題目給予練習。

在教師與學生的長期相處中，教師對學生的學習狀況逐漸熟悉而了解，上述的測試結果教師亦可由實際的教學經驗而獲得。因此藉由系統施測的提示，目的在加快或補強對學生學習狀況的判斷及實施個別化的教學的參考。

第五章 結論及省思

第一節 結論

本文中對於一道題目給予一組向量屬性的數值，向量屬性來自文獻探討中對於學習概念的分類，數值來自教師對題目的敘述所隱含的概念及解題所需能力的判斷。藉由題目的向量屬性值作為題目間聚類分析及判斷學習狀況的依據，以期建立電腦適性化評量機制。

在本文中首先以第三學習階段前的分數做為探討的對象，建立七個屬性，前四個屬性為分數的學習概念，作為題目聚類分析的依據。然後建置一個電腦適性化評量機制，在施測的過程中針對學生的整體答對率給予不同難度的施測題目。在施測的結果上，就個別學生整體答對率來看，以五下的數學學期成績作為數學能力的參照，運用常理的假設，大部分的高分者在整體測驗的表現方面，應有較佳的傾向。大部分的低分者在整體測驗的表現方面，應有較差的傾向。兩個班級的施測結果與此一常理的假設尚能符合。就個別的學習概念來看，不同學生的答題狀況可由資料庫顯示答對及答錯的題號，藉由題號相對的學習概念，作為實施個別化教學的參考。

至於題目的後三個屬性，是屬於解題能力的判斷，以五點量表的方式測量，目的原想為猜測的模糊語句給予數值，因心力有限未建置於系統中僅在文獻探討中根據屬性測度的概念提出 $p_1 \times 0 + p_2 \times 0.25 + p_3 \times 0.5 + p_4 \times 0.75 + p_5 \times 1$ 的測度方法並與模糊德菲法做簡單的數學上直觀的比較。

最後，電腦施測仍不可避免的遇到學生猜題的行為，因此如何讓

學生產生學習動機，是運用電腦施測需要處理的實務問題。

第二節 研究過程的省思

壹、研究方法上的省思

邏輯和直覺是研究的兩大利器，本文運用已發展出的資訊技術，研究如何產生應用的方法，因此在研究過程嘗試如何將巨觀的思維落實於可行的方法，由於之前並無相關的堅實理論作為根據，所以在邏輯上無法有理論上的辨證給予支持。驗證的方式需藉由實證的方式，而實證的方式亦有困難之處，首先必須真正建立大型題庫，在本次的施測結果上，由於同一個難度範圍中的題數不多，如果採用在不同難度中隨機選題的方式，在整體答對率上亦有可能獲得類似的施測結果。其次歸屬度的穩定需要較多數對數學教育有熱忱的教師提供寶貴的意見，最後還需大量的實驗組與對照組的比較。

因此本文是藉由實作過程的描述，探討一個想法上的可行性。

貳、研究結果上的省思

一、本研究的思考在於如何處理大型題庫的問題。

對於大型題庫的題目形成不同的群聚，在同一群聚中的題目就可以再分割為前測、後測及學習題庫的部分，使得大型題庫不僅用於施測，也是用來學習的教材。由於小學的學習範圍有限，如果應用在中學的學習範圍也許會更適合。

二、如何找出學習主題的概念分類是應用本方法的關鍵。

以社會科為例，亦可參考修訂後的 Bloom 教育目標分類系統認知領域之知識向度，作為概念分類的依據。修訂版

Bloom 認知領域教育目標分類之知識向度之理論介紹如下（鄭蕙如，2004）：

就知識向度而言，修訂版將知識分成事實知識

(factual knowledge)、概念知識(concept knowledge)、程序性知識(procedure knowledge)、及後設認知知識(metacognition knowledge)。

(一) 事實知識：指學生應了解的術語，或是可以進行問題解決的基本要素。例如：地圖中的等高線、GMP(國民生產毛額)。

(二) 概念知識：指基本要素與較大的結構共同發揮功能的互動關係。是可用於描述、預測、解釋或決定行動與採取的方向；例如：生活規範，法律，政府的結構與功能。

(三) 程序知識：指知道如何做某事的知識。例如：人際衝突的解決策略可以在何時運用、何時運用小記者的訪問蒐集資料。

(四) 後設認知知識：指一般認知以及自我知識的認知和覺察。例如：對自己認知與學習能力優缺點的知識、偏好的策略，個人動機、信念、興趣、目標的察覺等。

如果在一道題目中對上述四個知識向度上有或多或少的隸屬程度，便可建立題目具有向量屬性的基礎上加以改進本研究

的選題策略來設計電腦適性化評量。

三、與其他方法的結合

例如有關知識概念結構的分析，對概念結構下的子概念，找出子概念的概念分類以作為題目的向量屬性。以處理屬於這一個子概念的題目。

四、可嘗試建立模糊語句

可基於常理產生一些猜測的語句。例如在施測的過程中紀錄及處理題目的後三個屬性（屬於解題能力部分）對猜測的語句給予數值。例如：

1. 問題表達數值低於 0.3（以符號的表達為主）的部分答對率很高，而問題表達數值高於 0.7 的部分（以文字的表達為主）答對率低，那麼學生是否偏向於機械式理解？對文字的理解能力較差？
2. 如果整體答對率在中等程度，而解題策略數值高於 0.7 的部分答對率低，是否學生較缺乏解題策略的能力。

只要能建立一些可靠度夠高的命題，那麼這些句子便能組成模糊系統，運用模糊邏輯的推論產生新的選題策略。

參 考 文 獻

一、中文部份

1. 何榮桂，「國際電腦化測驗發展趨勢之研究」，國立臺灣師範大學資訊教育學系
<http://wwwc.moex.gov.tw/public/Attachment/7112311301471.doc>
2. 何榮桂，「網路環境題庫與測驗之整合系統」，科學發展月刊，第 28 卷第 7 期。
nr.stpi.org.tw/ejournal/NSCM/v28n7/Embag/534-540.pdf
3. 李國勇著，神經模糊控制理論及應用，北京電子工業出版社，2009。
4. 林基興譯，模糊思考：模糊邏輯的新科學（Bart Kosko 原著），初版，全華科技圖書股份有限公司，台北，1994。
5. 吳柏林，「91 學年度之通俗數學講座三」，政治大學應用數學系，2002。
6. 涂金堂、林佳蓉 著，如何協助學生解決數學應用問題，高雄復文圖書出版社，2000。
7. 郭伯臣，「國小數學科電腦化適應診斷測驗Ⅲ」，行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告，計畫編號 NSC93-2521-S-142-004，2005。
8. 郭信川，李朝宗，“模糊集合理論於學習成效評估”，台灣作業研究學會2007學術研討會暨年會，台灣花蓮
9. 陳澤民譯，數學學習心理學（Richard R. Skemp 原著），六版，九章出版社，1995。
10. 馮國臣，模糊理論基礎與應用，新文京開發出版股份有限公司，2007。
11. 程乾生、吳柏林，「模糊統計分析的數學原理及其應用」，量化研究學刊，第一卷第一期，2007。
12. 楊重駿、楊照崑著，現代應用數學，東華書局，1991。
13. 劉秋木著，國小數學科教學研究，五南圖書出版公司，1996 年。
14. 鄭振初著，分數教學分析：概念和運算，九章出版社，2006 年。
15. 鄭蕙如，林世華，「Bloom 認知領域教育目標分類修訂版理論與實務之探討——以九年一貫課程數學領域分段能力指標為例」，台東大學教育學報 15 卷 2 期，2004。

二、西文部份

1. Behr, Harel, Post, & Lesh (1992): "Rational number, ratio, and proportion." in Grouws, D. A. (1992, ed) : *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*. MacMillan
2. Mack, N. (1990), "Learning Fractions with Understanding : Building on informal knowledge." *Journal for Research in Mathematics Education*. 1990, Vol. 21, No. 1, 16-32
3. Ferraris, M. (1991). "An approach to the use of computers in instructional testing." In L. Dann, S.H. Irvine, & J.M. Collies(Eds.), *Advances in Computer- Based Human Assessment* (219-236). Boston: Kluwer.
4. Mack, N. (1990), "Learning Fractions with Understanding : Building on informal knowledge." *Journal for Research in Mathematics Education*. 1990, Vol. 21, No. 1, 16-32
5. Michael Negnevitsky (2005): *Artificial Intelligence : A Guide to Intelligent System*, p89-94
6. Steffe, L., & Olive, J. (1991). The problem of fractions in the elementary school. *The Arithmetic Teacher*, 38 (9)
7. Saenz-Ludlow, A. (1994): Michael' s Fraction Schemes. *Journal for research in mathematics education*, Vol. 35, NO. 1, 50-85

附 錄 一

問卷說明一（分數概念部分）

分數的計算常易形成機械化的過程，學生應用所學的計算規則處理所面臨的題目，而未必了解意義，而且相同的算式可能具有不同的意義。分數概念的建構需依靠對分數涵義的理解，請您針對以下題目的敘述過程是否具有以下的概念的表達或解題過程是否具有以下的概念的運用加以勾選：除法 比的概念 單位分數 等值分數 是否應用不同的基數「1」

每個概念說明如下：

除法的概念

例一：1 箱汽水有 12 瓶，其中 $\frac{1}{3}$ 箱有幾瓶？

這是把 1 箱汽水等分成三份中的一份($12 \div 3 = ?$)，有除法的概念。

比的概念

比：表示兩個量之間的比較關係，有「對應數數」的概念。

例一： $\frac{5}{8}$ 的 10 粒，圖形有 8 格，學生可由一一對應畫出 5 格，



圖形有 10 粒，學生可由一對二的對應畫出 10 格。



例二：一盒糖果有 10 粒，10 粒的 $\frac{1}{5}$ 是 2 粒，10 粒的 $\frac{2}{5}$ 是 4 粒，是比的概念，也具有「除法」的概念。

◎單位分數的概念

能夠視 $1/8$ 或 $3/8$ 為一獨立的單位，可做分數的整倍數運算，例如 2 個 $1/8$ 是 $2/8$ ，2 個 $3/8$ 是 $6/8$ 。

例一： $5 \times 2/3 = ?$

例二： $4 \div (1/3) = ?$ （整數除以分數）

例三：一杯檸檬汁需 $1/3$ 湯匙的糖，現有 4 湯匙的糖可供調配幾杯檸檬汁？（與例二有相同算式，但例三提供具體情境。）

◎等值分數的概念

需使用於擴分及約分的操作，有「商不變」的觀念。

例一： $1/6$ 與 $1/8$ 哪一個大？

例二： $24 \div 6 = 4$ $12 \div \square = 4$ $\square \div 8 = 4$

附 錄 二

問卷說明二（數學解題能力部分）

在本文中數學解題能力包含「題意表達」、「解題策略」、「計算能力」，這些因素是數學題目所具有的共同因素，以李克特式量表(likert Scale)來表示強度。

以下則對於解題所需的能力加以勾選

◎題意表達方式：1 2 3 4 5

數字愈小表示題意表達方式主要是數字符號，數字愈大表示題意表達方式主要是文字。

◎解題策略：1 2 3 4 5

數字愈大表示學生需要使用解題策略的方式越多或使用的強度越強。

解題策略的說明：

利用畫圖、數線圖：利用圖示的方式思考。

做表格、列出資料表、尋找組型（有條理的搭配規則或發現結構）

類推：例如用較小的數字代入運算再舉一反三。

簡化問題：建立次目標，需兩個以上的解題步驟才能獲得正確答案。

觀察能力：例如需觀察算式以決定計算的順序才容易算出。

需轉換題意的表徵以找出解題的方法……等方式。

◎計算能力：1 2 3 4 5

數字愈大表示越需計算能力或越需要了解運算的規則。

例如計算的數值較繁複或較需要知道運算規則的先後順序或分配律的運用，則這個選項的數字就勾選較大的數字。

附 錄 三

本文中所使用之 MatLab 程式

一、將相似矩陣經由模糊合成運算獲得模糊等價矩陣的程式（修改自李國勇，2009）

（一）尚未由 Excel 貼入數值的程式

```
R=[ [];
```

```
 [];
```

```
 [];
```

```
 [];
```

```
 [];
```

```
 [];
```

```
 [];
```

```
 [];
```

```
 [];
```

```
 [];
```

```
 [];
```

```
 [];
```

```
 [];
```

```
 [];
```

```
 [];
```

```

[];

[];

[];

[];

[];

[];

[];

[];

[];

[];

[];

];

T1=zeros(size(R,1),size(R,2));

for i=1:size(R,1)

    for j=1:size(T1,2)

        T1(i,j)=max(min(R(i,:),R(:,j)'));

    end

end

T1      %R^2

E1=T1-R

T2=zeros(size(T1,1),size(T1,2));

for i=1:size(T1,1)

```



```

    for j=1:size(T2,2)

        T2(i,j)=max(min(T1(i,:),T1(:,j)'));

    end

end

T2          %R^4

E2=T2-T1

T3=zeros(size(T2,1),size(T2,2));

for i=1:size(T2,1)

    for j=1:size(T3,2)

        T3(i,j)=max(min(T2(i,:),T2(:,j)'));

    end

end

T3          %R^8

E3=T3-T2

T4=zeros(size(T3,1),size(T3,2));

for i=1:size(T3,1)

    for j=1:size(T4,2)

        T4(i,j)=max(min(T3(i,:),T3(:,j)'));

    end

end

T4          %R^16

E4=T4-T3

```

(二) 以三年級困難題庫為例

函式名稱：`test33.m` (三年級困難題庫)

```
R=[ [1 0.1725 0.25 0.1725 0.1725 0.1725 0.15 0.1975 0.1725
0.25 0.1725 0.0975];
[0.1725 1 0.18 0.1125 0.1525 0.1525 0.13 0.1275 0.1825
0.15 0.1525 0.1375];
[0.25 0.18 1 0.15 0.18 0.18 0.18 0.175 0.2025
0.25 0.18 0.1275];
[0.1725 0.1125 0.15 1 0.1125 0.1125 0.19 0.1275 0.1125
0.18 0.1125 0.0675];
[0.1725 0.1525 0.18 0.1125 1 0.1525 0.13 0.1275 0.1825
0.15 0.1525 0.1375];
[0.1725 0.1525 0.18 0.1125 0.1525 1 0.13 0.1275 0.1825
0.15 0.1525 0.1375];
[0.15 0.13 0.18 0.19 0.13 0.13 1 0.105 0.16
0.225 0.13 0.115];
[0.1975 0.1275 0.175 0.1275 0.1275 0.1275 0.105 1 0.1275
0.175 0.1275 0.075];
[0.1725 0.1825 0.2025 0.1125 0.1825 0.1825 0.16 0.1275 1
0.15 0.1825 0.19];
[0.25 0.15 0.25 0.18 0.15 0.15 0.225 0.175 0.15
1 0.15 0.075];
```

```

    [0.1725 0.1525 0.18    0.1125 0.1525 0.1525 0.13    0.1275
0.1825 0.15    1    0.1375];

    [0.0975 0.1375 0.1275 0.0675 0.1375 0.1375 0.115 0.075 0.19
0.075 0.1375 1];

    ];

T1=zeros(size(R,1),size(R,2));

for i=1:size(R,1)

    for j=1:size(T1,2)

        T1(i,j)=max(min(R(i,:),R(:,j)'));

    end

end

T1      %T1=R^2

E1=T1-R

T2=zeros(size(T1,1),size(T1,2));

for i=1:size(T1,1)

    for j=1:size(T2,2)

        T2(i,j)=max(min(T1(i,:),T1(:,j)'));

    end

end

T2      %T4=R^4

E2=T2-T1

T3=zeros(size(T2,1),size(T2,2));

for i=1:size(T2,1)

```

```

for j=1:size(T3,2)

    T3(i,j)=max(min(T2(i,:),T2(:,j)'));

end

end

T3          %T3=R^8

E3=T3-T2

T4=zeros(size(T3,1),size(T3,2));

for i=1:size(T3,1)

    for j=1:size(T4,2)

        T4(i,j)=max(min(T3(i,:),T3(:,j)'));

    end

end

end

T4          %T4=R^16

E4=T4-T3    % 如果 E4=T4-T3=0 ，則 T4 為模糊等價矩陣

```

執行結果：

模糊等價矩陣

	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262
251	1	0.1825	0.25	0.19	0.1825	0.1825	0.225	0.1975	0.2025	0.25	0.1825	0.19
252	0.1825	1	0.183	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825
253	0.25	0.1825	1	0.19	0.1825	0.1825	0.225	0.1975	0.2025	0.25	0.1825	0.19
254	0.19	0.1825	0.19	1	0.1825	0.1825	0.19	0.19	0.19	0.19	0.1825	0.19
255	0.1825	0.1825	0.183	0.1825	1	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825	0.1825

```

256 0.1825 0.1825 0.183 0.1825 0.1825      1 0.1825 0.1825 0.1825 0.1825 0.1825 0.1825
257 0.225 0.1825 0.225 0.19 0.1825 0.1825      1 0.1975 0.2025 0.225 0.1825 0.19
258 0.1975 0.1825 0.198 0.19 0.1825 0.1825 0.1975      1 0.1975 0.1975 0.1825 0.19
259 0.2025 0.1825 0.203 0.19 0.1825 0.1825 0.2025 0.1975      1 0.2025 0.1825 0.19
260 0.25 0.1825 0.25 0.19 0.1825 0.1825 0.225 0.1975 0.2025      1 0.1825 0.19
261 0.1825 0.1825 0.183 0.1825 0.1825 0.1825 0.1825 0.1825 0.1825 0.1825      1 0.1825
262 0.19 0.1825 0.19 0.19 0.1825 0.1825 0.19 0.19 0.19 0.19 0.1825      1

```

二、將模糊等價矩陣內的數值做排序的程式

排序的目的在方便 λ 值的選擇

函式名稱：sorting33.m (三年級困難題庫)

```

test33; % 呼叫test33函式，產生T4變數

R = T4; % 再將T4變數指定給R

disp('-----sorting for R-----');

sort(R, 2) % 以row為單位做排序

%sort(R, 1) % 以column為單位做排序

disp('-----sorting statistic-----');

[row, col] = size(R);

val = [];

cnt = [];

num = 0;

for i=1:1:row % 找出有哪些數值

    for j=1:1:col

```

```

if num>0

    for k=1:1:num

        if R(i,j)~=val(k)

            %val = [val R(i,j)];

            %num = num+1;

        else

            break;

        end

    end

    if (k==num)&(R(i,j)~=val(k))

        val = [val R(i,j)];

        num = num+1;

    end

else

    val = R(i,j);

    num = 1;

end

end

end

val=sort(val);

for k=1:1:num                                % 開始統計

```

執行結果：

λ value:	0.1825	0.1900	0.1975	0.2025	0.2250		
	0.2500	1.0000					
count:	76	26	10	8	6	6	12

三、對模糊等價矩陣設定 λ 值的程式

函式名稱：cutMat33.m (三年級困難題庫)

```

test33; %呼叫 test33 函式，產生 T4 變數

R = T4; % 再將T4變數指定給R

[row, col] = size(R);

lambda = .225; % 設定 $\lambda$ 值

for i=1:1:row

    for j=1:1:col

        if R(i, j)>=lambda

            R(i, j)=1;

        else

            R(i, j)=0;

        end

    end

end

R

```

執行結果：

$\lambda = 0.25$ 時

251 252 253 254 255 256 257 258 259 260 261 262

251	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
252	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
253	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
254	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
255	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
256	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
257	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
258	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
259	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
260	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
261	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
262	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$\lambda = 0.225$ 時

	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262
251	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
252	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
253	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
254	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
255	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
256	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
257	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
258	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

259	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
260	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
261	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
262	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

若對本文 Matlab 或 ASP 程式有興趣者，連絡信箱：yhung@kimo.com