

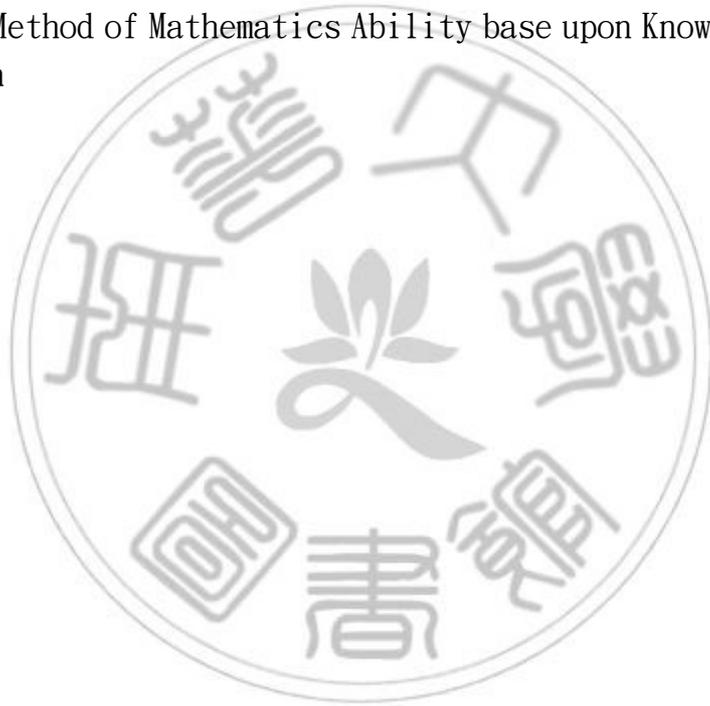
南 華 大 學

資訊管理學系

碩士論文

以知識概念架構為基之數學能力診斷方法

A Diagnosis Method of Mathematics Ability base upon Knowledge Concept Construction



研 究 生：張英燦

指導教授：王昌斌 博士

中華民國九十八年六月三十日

南 華 大 學

資訊管理學系

碩 士 學 位 論 文

(論文題目)

以知識概念架構為基之數學能力診斷方法

研究生：張英燦

經考試合格特此證明

口試委員：謝品霖
陸語文
王學洲

指導教授：王學洲

系主任(所長)：

口試日期：中華民國 98 年 6 月 30 日

博碩士論文授權書

(國科會科學技術資料中心版本 93.2.6)

本授權書所授權之論文為本人在南華大學(學院)資訊管理系所

九十八學年度第二學期取得碩士學位之論文。

論文名稱：以知識概念架構為基之數學能力診斷方法

同意 不同意

本人具有著作財產權之論文全文資料，授予行政院國家科學委員會科學技術資料中心(或其改制後之機構)、國家圖書館及本人畢業學校圖書館，得不限地域、時間與次數以微縮、光碟或數位化等各種方式重製後散布發行或上載網路。

本論文為本人向經濟部智慧財產局申請專利(未申請者本條款請不予理會)的附件之一，申請文號為： ，註明文號者請將全文資料延後半年再公開。

同意 不同意

本人具有著作財產權之論文全文資料，授予教育部指定送繳之圖書館及本人畢業學校圖書館，為學術研究之目的以各種方法重製，或為上述目的再授權他人以各種方法重製，不限地域與時間，惟每人以一份為限。

上述授權內容均無須訂立讓與及授權契約書。依本授權之發行權為非專屬性發行權利。依本授權所為之收錄、重製、發行及學術研發利用均為無償。上述同意與不同意之欄位若未鈎選，本人同意視同授權。

指導教授姓名：張英燦

研究生簽名：張英燦

(親筆正楷)

學號：96451516

(務必填寫)

日期：民國 98 年 6 月 30 日

南華大學資訊管理學系碩士論文著作財產權同意書

立書人：_____張英燦_____之碩士畢業論文

中文題目：以知識概念架構為基之數學能力診斷方法

英文題目：A Diagnosis Method of Mathematics Ability base upon
Knowledge Concept Construction

指導教授：王昌斌 博士

學生與指導老師就本篇論文內容及資料其著作財產權歸屬如下：

- 共同享有著作權
- 共同享有著作權，學生願「拋棄」著作財產權
- 學生獨自享有著作財產權

學生：_____張英燦_____（請親自簽名）

指導老師：_____王昌斌_____（請親自簽名）

中 華 民 國 9 8 年 7 月 5 日

南華大學碩士班研究生
論文指導教授推薦函

資訊管理系碩士班張英燦君所提之論文
以知識概念架構為基之數學能力診斷方法
係由本人指導撰述，同意提付審查。

指導教授



98年7月5日

誌 謝

碩士論文得以順利完成，要感謝許多幫忙、支持與鼓勵我的人。首先要感謝指導教授王昌斌博士，兩年來在學業及論文上的指導與提攜。王老師有耐心地引導著我如何思考問題，指引我正確的方向，使我順利地將論文完成。其為人處世、治學態度、與學生的真誠相待，是我學習的典範。另外，感謝兩位口試委員—謝昆霖老師、陸海文老師在論文口試期間，細心且耐心地對論文提出寶貴之意見與建議，學生謹記於心。

當然，跟我一起打拼，同甘共苦的好友們，你們也是我論文完成的一大功臣。感謝冠倫、朝貴、純慧認真的求學態度，讓我鞭策自己向前；感謝明宏、嘉民和文振在論文寫作與口試上的幫忙與協助，讓我修改論文更順利；謝謝碩士班易敬、俞廷、永興、依宸、國賢、正基和所有其他同學的幫助，讓我這兩年的求學生活，雖然辛苦但卻充滿愉快的回憶。也要感謝好友嘉音、宗來，在求學這一段期間，時時予以鼓勵。

最後，要特別感謝我的家人，給予我持續的肯定和打氣，讓我能無後顧之憂的環境下順利地完成學業，順利取得碩士學位，很高興能與你們共享這份榮耀與喜悅；感謝我最棒的另一半—瑞媛，你總是給我最需要的心靈支持與大力協助；有你的陪伴，我總能以最從容、安穩的心情面對一切。衷心感謝與祝福所有人，願大家平安幸福。

張英燦 謹誌

于南華大學

中華民國九十八年七月十日

以知識概念架構為基之數學能力診斷方法

學生：張英燦

指導教授：王昌斌博士

南 華 大 學 資 訊 管 理 學 系 碩 士 班

摘 要

本研究研製之一個好的學習診斷方法，不但要能夠有效地評估學習者的學習成效，更要能診斷學習者的學習障礙與迷思概念，才能幫助學生突破學習障礙，進一步改善學習效能。

評量測驗在學習過程中是一個重要的步驟，據此可以評估學生的學習效能以及學生的學習障礙。總結性評量是用來評估和總結學習者在某一特定時間的發展狀況，老師無法針對學習者所得到的成績給予真確的建議。因此本研究提出一個以知識概念架構為基礎之學習診斷方法，來評估學生的學習成效。

關鍵字：學習診斷方法、學習障礙、迷思概念、知識概念架構

A Diagnosis Method of Mathematics Ability base upon
knowledge Concept Construction.

Student : Ying-tsan Chang

Advisors : Dr. Chin-Bin Wang

Department of Information Management
The M.I.M. Program
Nan-Hua University

ABSTRACT

A good studing diagnosis method not only can evaluate learners' study result effectively, but also can diagnose their learning disability and misconception, helps learners to break through the learning disability and improvement the learning result.

Assessment test is an important step in the learning process which evaluate the Study potency and learning disability. Summative assessment refers to the assessment of the learning and summarizes the development of learners at a particular time. However, teachers can not give valid suggestions to learners from their test scores. In this paper, a learning diagnosis method based upon the knowledge concept construction is proposed to evaluate the learning efficiency of students.

Keyword: studing diagnosis system, learning disability, misconception, knowledge concept construction

目 錄

書名頁	i
論文口試合格證明	ii
博碩士論文授權書	iii
著作財產權同意書	iv
論文指導教授推薦書	v
誌謝	vi
中文提要	vii
英文提要	viii
目錄	ix
表目錄	xiii
圖目錄	xv
第一章 緒論	1
第一節 研究背景與動機	2
第二節 研究目的	4
第三節 研究流程	6
第四節、研究內容編排	6
第五節、研究限制	7

第二章 文獻探討.....	8
第一節 學習評量.....	8
第二節 迷思概念.....	9
第三節 知識地圖的建構.....	11
壹、學習概念&認知順序.....	11
貳、概念構圖(Concept mapping).....	12
參、概念圖在教學上的應用.....	13
第四節 模糊德菲法.....	14
第五節 灰色理論簡介.....	16
壹、灰的應用.....	17
貳、灰關聯分析.....	19
參、灰關聯生成.....	20
肆、灰關聯分析法之計算.....	21
第六節 學習錯誤類型.....	24
第三章 研究方法與設計.....	26
第一節 研究方法.....	26
第二節 研究架構.....	27
壹、學習概念分析階段：.....	28
貳、編製概念診斷工具：.....	29

參、學習概念診斷.....	29
第三節 研究工具.....	31
壹、灰理論關聯分析工具.....	31
貳、測驗診斷工具.....	32
參、錯誤類型比對工具.....	33
第四節以知識地圖為基礎的學習診斷方法.....	33
壹、學生作答資料的整理.....	33
貳、錯誤類型的比對.....	36
第四章 方法實作.....	41
第一節 概念分析與知識概念架構圖的構建.....	41
第二節、建立試題測驗工具.....	47
第三節、建立常見錯誤類型比對工具.....	51
第四節 進行診斷性演算.....	56
第五章 方法評估.....	64
第一節 本方法之診斷成效.....	64
第二節「解題技能」與「概念學習」兩階段診斷之結果.....	67
第六章 結論及未來工作.....	71
第一節 研究結論.....	71
第二節 研究建議.....	72

參 考 文 獻.....	74
附 錄 一.....	79
附 錄 二.....	83

表 目 錄

表 2-1 灰色系統、機率論、模糊集之特性比較表	20
表 3-1 概念分配表	33
表 3-2 概念分布矩陣	34
表 3-3 學生答題狀況統計表	35
表 3-4 學生錯誤概念統計表	36
表 3-5 常見錯誤類型屬性分析表	36
表 4-1 「分數加減」學習路徑之主要概念節點說明表	42
表 4-1 「分數加減」學習路徑之主要概念節點說明表(續)	43
表 4-2 「分數加減」單元各概念權重調查統計表	44
表 4-2 「分數加減」單元各概念權重調查統計表(續)	45
表 4-3-a 本研究架構與九年一貫數學課程綱要之對應 (概念)	49
表 4-3-b 本研究架構與九年一貫數學課程綱要之對應 (解題技能)	50
表 4-4 分數加減「概念」上常見錯誤類型之文獻整理	51
表 4-5 分數加減「解題技能」上常見錯誤類型之文獻整理	53
表 4-6 分數加減常見錯誤類型之屬性分析表	55
表 4-7 本研究診斷工具之試題概念分配表	57
表 4-8 本研究診斷工具之概念分布矩陣表	58
表 4-9 學生答題狀況表	59

表 4-10-a 本研究實作學生答題錯誤概念統計（整體答題狀況）...	60
表 4-10-b 本研究實作學生答題錯誤概念統計（解題技能）.....	61
表 4-10-c 本研究實作學生答題錯誤概念統計（概念學習）.....	62
表 5-1 診斷結果與作答錯誤原因對照表	65
表 5-2 「解題技能」與「概念學習」診斷對照表	68
表 5-2 「解題技能」與「概念學習」診斷對照表（續）.....	69

圖 目 錄

圖 1-1、研究流程圖	6
圖 2-1 Glaser R. 基本教學模式	8
圖 2-2 概念構圖	12
圖 2-3 三角形歸屬函數圖	15
圖 3-1 研究架構圖	28
圖 3-2 兩階段診斷評量流程圖	30
圖 3-3 灰關聯系統程式	32
圖 4-1 本研究模糊語意變數之三角模糊數	45
圖 4-2 分數加減學習的概念架構圖	46

第一章 緒論

教學過程中，為了確認學生的學習成效，大量採用形成性及總結性的紙筆測驗，除了評鑑學生學習行為表現依據，並據此判斷學生的成績和等第。這樣的測驗方式，雖然能達到能力評定的功能，但對於進一步提供補救教學或加強，作用卻不明顯。在教學現場上，受限於時間與人力條件，教師難以診斷個別學生發生困難之所在，給予適當且有效的支援。學習者在學習過程中，經常因為模糊地帶未得到釐清，導致學習困難的情況不斷循環發生，進而影響後續的學習。因此，若能有效地推測出學習認知能力，找出學習者學習歷程上缺乏或迷思的節點，提供較佳之學習路徑給相關人員參考，有效地給予協助、補救，藉此作法有效改善學習者的迷思概念，提升其學習效能與信心。

要落實補救教學的理念，必須有精確而有效的學習困難診斷機制，才能有效針對學生的學習困難提供適切的補救方向及教材，提昇學習的品質。若無法診斷出學生疑難困擾之所在，教學時勢必無法依照學生對於學習概念的瞭解差異性，提供適性化教學內容。在評量過程能否蒐集更多的答題資訊來協助資料分析，是影響學習診斷結果精確與否的重要因素之一。一般的測驗與評量系統，考量受測者答題的容忍度，給題數目受限，再加上採用一般形成性或總結性測驗題庫，診斷功能較缺乏，使得能夠蒐集到的訊息範圍廣泛，診斷深度卻太淺，影響診斷結論的形成。

在政府大力推動資訊教育基礎建設之努力下，全國各級學校教師已均具備一定的資訊能力素養，資訊設備在校園內之應用已十分成熟，因此，教師運用電腦輔助進行診斷已不再是個問題。所以，應用資訊媒體輔助評量的時機已十分成熟，而工欲善其事，必先利其器，提供一套適當的學習評量系統，協助教師有效率地評估學生的學習成

效，以提高教學效果及提昇教學品質，實有其必要性。

第一節 研究背景與動機

近年來，資訊科技及網際網路的快速發展，各式各樣的訊息快速且便捷的流通，不斷地改變人類的生活模式。各項資訊化的教學概念以及設備引進，增加了課堂活動的變化：具體的影音效果與操作，將教育活動的場域與時間限制減少，讓課堂教學型態更多樣化。Mitchell & Hunt (1997) 認為「教師們應該了解現在的教學角色是完全不同於教師自己學生時代的經驗，因為今日的學生將他們的老師接受更多的資訊科技教育，教師想要吸引學生學習興趣、獲得更佳的教學效果，必須跟隨時代潮流、吸納新資訊科技的優點。」教學活動的地點也逐漸由傳統的教室延伸至網際網路，形成了以網際網路為基礎的遠距教學，傳統的教學活動也逐漸的走向多樣的數位學習 (e-Learning)，為學習者提供更具效能的教學環境。

除了傳統教學模式的改變，許多專家學者也投入多元化教育資訊輔具的相關研究，在教學現場提供其他的支援。例如電腦輔助教學系統 (computer-assisted tutoring system) 及電腦輔助測驗系統 (computer-assisted testing system) (何榮桂，1997；許慶昇、杜淑芬、黃國禎，1998；張紹勳，1998)。不管是傳統教學或資訊融入的學習方式，都希望能在知識傳授過程中，協助學生減低學習困難，提升學習效能，增加學生的成就感及學習意願，雖然方式不同，但以學生為主角的原則是一致的。因此，不管是教材設計，教學活動的編寫，以及輔助學習設計與策略的導入，都能考量學生的既有背景及個別差異，並依此為學習基礎，提供適性化的個人學習支援，提昇學習成效及學習者能力。

一個具效能的測驗系統不僅要能有效評估學生之學習成效，更要

能診斷出學生的學習障礙或迷思概念，說明個別狀況，提供分析，藉此幫助學生消除迷思概念、改進學習成效。因此，一個好的測驗系統必須具備三大功能：(1) 能診斷出學生學習障礙之可能原因，(2) 能針對學習障礙提供合理解釋，(3) 能建立改進學習成效之補救學習路徑以做為改進學習成效之依據。為了達成這三項目標，Novak 與 Gowin (1984) 提出以概念圖 (Concept Map) 作為輔助學習者達成後設認知的工具。透過概念圖的繪製，瞭解學習結構，並思考新知識與原有概念間的關係，進一步達到有意義的學習。

Novak (1998) 更指出，概念繪圖工具在教育應用上確實具有其明確效能，用來澄清學習者的學習架構、協助團隊凝聚學習目標的共識及有效建立評鑑工具等優點。一些研究者也指出 (Turns, J., Atman, C.J. & Adams, R., 2000)，「知識概念架構」可以透過概念圖方式來加以呈現，不僅用於表現學科知識架構，找出學習路徑，進一步診斷學生的學習認知。知識概念架構為基礎的診斷方式，將概念圖應用於概念基模所產生知識表徵 (Knowledge Representation) 的現象說明。概念圖的優點是可以幫助學習及教學成效提升，也可作為補救教學的輔助工具，因此，邱垂昌與陳瑞斌 (2000) 主張：(一) 概念圖也是一種教學指導工具。(二) 概念構圖可以視為另一種可行的評量學習成效之工具。(三) 有超過 80% 的學生認為概念圖可以幫助整合概念。這種知識結構儲存於電腦輔助教學系統的資訊庫中，配合演算法的推估，不僅能有效降低施策題目的數目，更能有效探測出學生的學習障礙處，提供作為指導或輔助學生之學習。利用知識概念架構做為學習診斷的基礎，將診斷結果提供教師設計個別的補救學習路徑。

電腦輔助診斷是現代測驗理論的主流，傳統的測驗方式，大多在施測完成後，產生形成性或總結性指標之後，便完成測驗的流程。對

於學生的迷思概念或遺漏認知，也常因為課程進度的壓力、教師人力的不足而被忽略帶過，並沒有藉該次診斷的內容，將後續診斷、補救的工作完成。運用電腦輔助進行學習診斷，能有效率的輔助教師對施測結果進行錯誤模式的推斷，為教師在教學上提供實際且效能的協助。然而一套學習診斷系統從軟體的選購或開發、題庫的建立、預試與試題分析、測驗的實施以至題庫的維護等，其成本及使用複雜度亦較大，以致班級教學現場，並未見到學習診斷系統的普及。本研究在對於診斷系統架構進行可行性之先探，希望以實務的方法流程，進行課堂現場的測試，試圖找出本研究提出方法流程之優、劣處，作為日後建立數位化、自動化的診斷系統之參考。

灰色理論 (Grey system theory) 近年來在教育領域上日益受到重視，相較於其他的統計方法，該理論對於系統模型之條件屬於不完整、不確定、多變量輸入、離散的數據資料的情況，能做有效的處理，提出解決之方法 (翁慶昌，陳嘉權，賴宏仁，2001)。因此，因應學生測驗作答的實際狀況下，作答結果屬於少條件、少資訊的情形，本研究提出一應用灰理論之學習評量模式，整合主觀與客觀的受試者評量資訊，作為教師評量學生之學習成效工具。

第二節 研究目的

學習評量是教學關鍵的一環，除了作為教學成效的確定外，還是另一段學習的重要依據。如何評估學生的學習成效與真正能力，是教學者的重要任務，而教學者亟需一項協助其達成此任務之工具。我們知道資訊化的測驗統計在受試者能力值估算之研究已相當成熟，只要經過長時間或多試題的測驗，相信資訊輔助測驗診斷能估算出受試者較精確的能力值。但是，在實際教學現場，教學目標是多樣的，時間卻是有限的，在有限的時間內要進行大量試題的學習評量是不容易做

到的。希望能以一般形成性或總結性評量的題庫，在少量測驗題數的限制下評估受試者之能力值，完成診斷的目標，會發生錯估受試者能力之情形。因此本研究研究目的為：

- 一、 嘗試結合模糊理論及灰關聯度運算的技術，開發智慧型教學診斷方法。
- 二、 提出一應用模糊集合理論與試題反應理論之診斷流程，根據知識結構的特性，形成學習概念節點及路徑順序，以此為基礎命題，可讓出題更具目標性，達到減少測驗題數之效能。
- 三、 整合主觀與客觀性的受試者評量資訊，配合資訊設備的運算輔助，以更具效率的方法來估算出受試者學習成效與能力。
- 四、 將學生答題能力分成「解題技能」與「概念學習」兩大類進行探測與比較，提供教學者更多面向之訊息。
- 五、 以知識結構為基礎，探討剖析學生的學習過程，與檢討學習的盲點及操作習性，以達到適性化的教導模式，促成有效的學習。

第三節 研究流程

本研究之流程如參見圖 1-1，並將分述於各章節中：

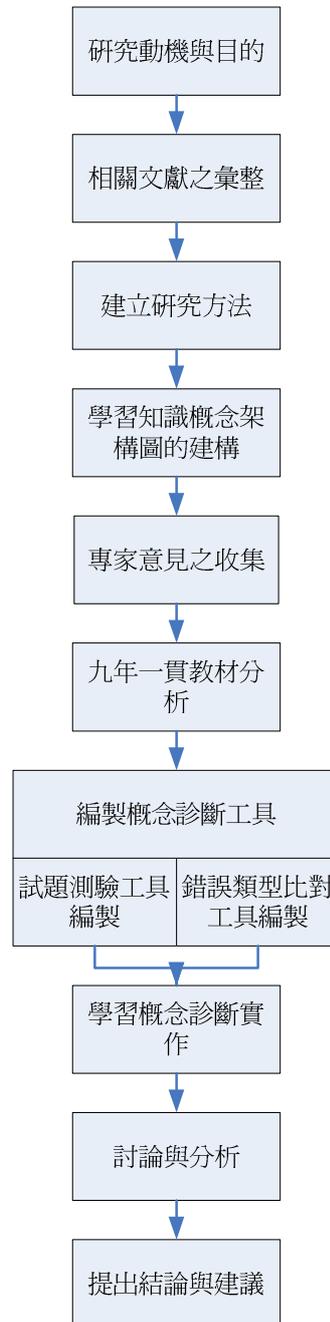


圖1-1、研究流程圖

第四節、研究內容編排

在本研究第二章中，我們是針對本研究之理論基礎加以說明：第一節說明在九年一貫精神下，學習評量的定位以及在教學上應用方

式。第二節探討學習者知識的累增歷程中，學習迷思概念的形成與影響。第三節介紹藉由「學習概念架構圖」，協助教師進行錯誤類型之診斷。第四節則介紹模糊德菲法之運算方法及優缺點。第五節介紹灰色系統理論，討論灰色系統理論之特性及其應用範圍。

第三章中討論本研究所使用之以知識概念架構為基礎之診斷方法，本研究提出之方法分為三階段：第一階段為學習概念分析階段；第二階段為編製概念診斷工具，包括試題測驗工具與錯誤類型比對工具；第三階段為學習概念診斷。第四章中我們介紹本研究之實作流程。第五章進行本方法之效能與結果說明。最後一章進行結論及未來研究方向之建議。

第五節、研究限制

- 一、 本研究是以學習結構性較明顯、階層數目較單純之國小數學科為範圍。未來若要其他單元甚至學科之測驗診斷，必須依該主題之特性進行必要調整。
- 二、 知識概念節點的選定、架構圖的建立、錯誤類型之蒐集等專家效標部分會涉及分析者主觀的判斷，容易發生看法上的歧異與整合上的困難。

第二章 文獻探討

第一節 學習評量

學校教學目標的設計，是以課程標準作為依據，擬定適切可行課程計畫。為了增進學生學習效能，達成課程目標，教學目標、教學方式與教學評量需同時計劃，才能密切配合，達成完整結合。教學評量在整個基本教學模式（The Basic Teaching Model）中，具有回饋和統整活動的功能（Glaser, R., 1962），詳見圖 2-1。

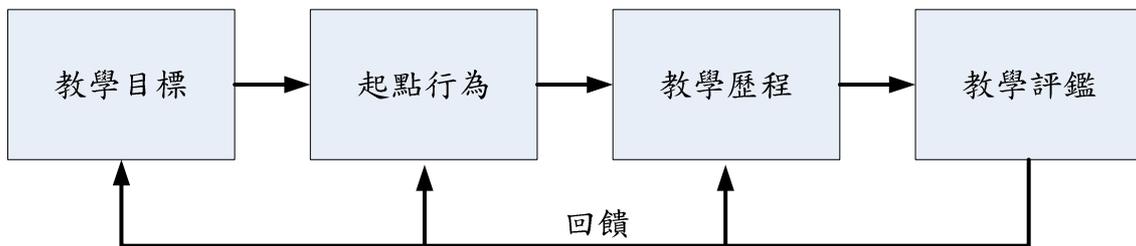


圖2-1 Glaser R. 基本教學模式

教師根據評量的結果，適切的修正教學目標、教學活動；學生可以修正其學習錯誤、診斷其學習方法、或增加其學習動機和學習成就。評量測驗可用來評估教學成效與診斷學習的困難，是教師應具備的技能之一，也是教學流程中不可或缺的一環。及時地掌握學生學習上的困難，並給予學習上的引導、心理上的關懷，不僅能幫助學生達成學習目標，對於學生面對學習挫折的心理輔導也會有極大助益。

評量過程中，運用科學化的方法和技術，收集學生在應答時的相關行為及答題結果等訊息，再根據教學目標、學生的學習表現，進行相關分析評斷和研究，進而調整課程進度及內容，達成更有效率的學習及提高學習興趣。當學生的學習困難反覆出現，運用課堂教學技巧或評量仍缺乏顯著改善時，如果採用更深入的訪談或診斷性評量，便

可以掌握並分析其學習困難的成因，作為進行學習補救的考量（郭生玉，2004）。

在既有研究的測驗系統中，有以總結性評量（summative evaluation）為研究主題的，搭配適合的軟硬體，達成自動化的試卷批閱及相關統計的功用。這樣的方式，雖然提昇了作業效能，節省老師閱卷及統計的時間，但對學生的學習幫助並不明顯。也有以知識結構分析之概念構圖評量法（時德平，2001；陳嘉甄，2001；翁錦瑛，2002），以深入的訪談紀錄診斷學生的迷思概念，但其作業流程繁複、題庫建置費時，適用於個案的探討研究，難施行於一般班級實務；也有以九年一貫能力指標為評量診斷依據的研究（洪世聰，2005；黃偉政，2005）：九年一貫能力指標是各版本教材編訂之依據，這樣的作法可忽略學習版本的限制，讓診斷條件單純化。但僅以能力指標為診斷時，會因為指標語意描述太過模糊，較難標定出學生迷思概念真確位置。因此，本研究將以知識結構圖為依據，分析九年一貫能力指標，彙整形成並繪製成專家學習路徑，配合常見錯誤類型之比對，在評量結束時，藉由「解題技能」與學習「概念」兩類別的分開診斷，分析確認學童在該單元的學習情況，作為後續教學歷程修正的依據。

第二節 迷思概念

根據 Piaget 與 Inhelder 的看法（1969），認知就是獲得知識（knowing），而認知發展就是在獲得知識的過程。人類的學習歷程，來自於逐步建構其運作所需之結構，過程之中包含認識、理解、思考、問題解決、學習、概念化，分類及記憶。在心智建構運作所需之基礎上，知識來自學習者與環境間互動的歷程，並在過程中累積所需的智識與能力。因此，人類智能的建構受物理環境、社會環境、成熟與平衡作用等四個因素影響，利用既有經驗或概念，承接新經驗或概念的

發展。

一個概念的形成完備，是一段新、舊經驗融合歸納歷程的結果，過程中學習者不斷嘗試將新的訊息和觀念，與已存的知識、經驗進行連結。如果學生在進行學習之前，其前備知識 (prior knowledge)，和專家所持有的概念形成及學習路徑並不一致，學習者的概念是不完整，甚至是不正確的，這些既有錯誤的概念將導致學生的學習成效不彰，也會妨礙另一概念的 formed，稱為迷思概念 (misconception) (Clark & Peterson, 1986)。Novak (1984) 認為它是相當堅持的觀念 (persistence of the idea)，迷思概念就是對某一領域的事件裡的一組概念的連繫被錯置或漏失而形成與科學社群不同的概念。姜善鑫 (1998) 說明：迷思概念應是指「對某一現象或事物最初始的一種錯誤的想像念頭」。高紹源 (1996) 則定義為「舉凡學生對某一科學概念的解釋與教材內容部分相同或不相同，亦即與科學界所定義的有所出入者，即視為迷思概念」。在本研究中，將之定義為「學生在學習科學知識的前、中、後，所具有與教師、教材或科學家定義不同的觀念」，稱為迷思概念。

謝青龍 (1995) 曾提到探討學生迷思概念的研究，最終之目的是能提供教師有關各種「迷失概念」的參考資料，導引學生發生概念的改變 (conception change)，從迷思概念到正確概念，以便改進教學。

Head (1986) 認為至少有五種原因，導致兒童產生迷思概念，包括了：

- 一、 來自日常的經驗與生活的觀察。
- 二、 由類比錯誤所產生的混淆。
- 三、 隱喻的使用。
- 四、 受同儕文化的影響。
- 五、 來自一些固有的理念。

迷思概念是蘊藏在內的知識能力，學生一旦產生迷思概念，容易在後續學習上造成困擾或障礙，無法達成預期的學習效果。這也更顯示了迷思概念對學習的影響；因此對於迷思概念的診斷及發覺，其重要性可見一斑。

第三節 知識地圖的建構

壹、學習概念&認知順序

當我們思考知識獲得的歷程時，我們會發現，一項知識或技能的習得，往往需要許多先備知識或經驗作為基礎，這樣的進程與 Piaget 和 Inhelder (1969) 的認知發展論是一致的。完成某項主題的學習時，歷程中重要的節點，便稱之為「學習概念」(Learning Concept)。

根據 Ausubel (1963) 的學習心理學理論：先備知識是學習新知識的基礎框架 (framework)，具有不可取代的重要性。學習者所擁有的知識架構，也稱為認知架構 (cognitive structure)，「學習」歷程，在於將新概念與命題的同化 (assimilation) 入學習者既有的概念與命題框架中，在學習者先備知識基礎上，承接新知完成有意義的學習。

學習活動進行中，發現學習歷程中有其一定的順序及路徑，如果依照概念的先後順序進行學習，將形成較佳學習路徑，我們將這樣的學習順序稱為「認知順序」。蘇俄心理學家 Vygotsky

(1962) 認為，認知的發展分成實際的發展層次以及潛在的發展層次，在這兩個層次之間的差距，稱之為「最近發展區」(zone of proximal development, ZPD) 人類的認知發展過程必須經由「內化」或「行動的遷移」，才能縮短兩層次間的差距，進一步將知識及經驗轉變成個人內在的意義。

貳、概念構圖(Concept mapping)

概念與概念之間，有其上下位關係或關聯性，我們將其關係用圖表具象化，稱之為概念構圖。概念圖中的橫向連結，可以讓學習者知道不同概念間的關係。

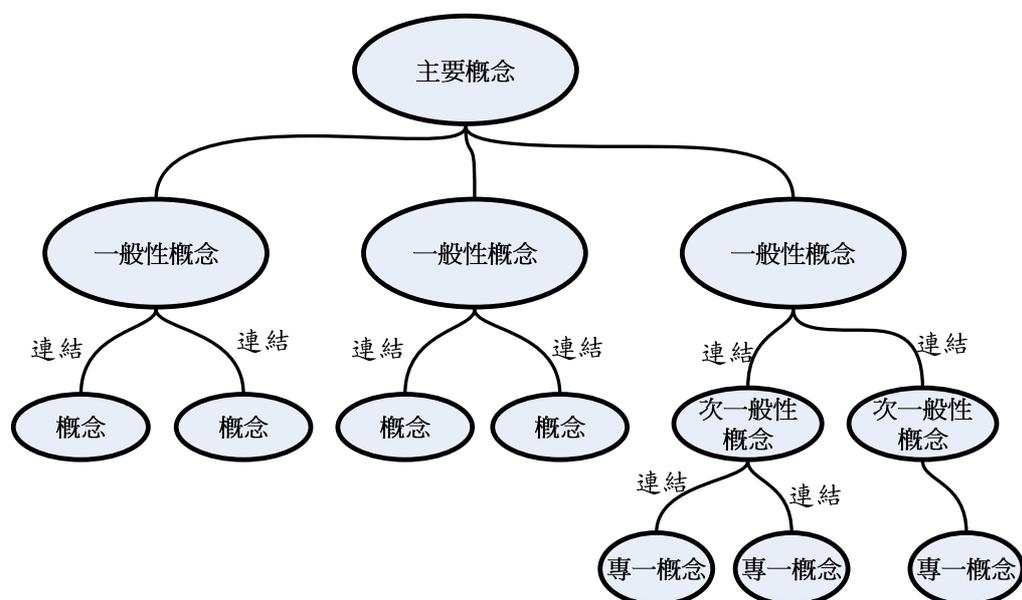


圖2-2 概念構圖

Novak 指出概念圖具有下列幾項特性 (Novak, 1995)：

- 一、 概念圖是組織知識和呈現知識的工具，包含某一知識結構或認知結構中的「概念」群，這些概念以個別獨立的「節點」(nodes)表示，節點之間以「聯結線」(link)聯結，在聯結線上以文字標示「聯結語」(linkage 或 label)，以形成為一個「命題」(proposition)，必要時聯結線的一端附有「箭頭」。
- 二、 概念在圖中會以「階層」(hierarchy)方式序列，較一般化的、包含較廣的概念放在圖的上方，較專一的、包含較少的概念放在圖的下方。
- 三、 若干概念形成概念「叢集」(cluster)，不同叢集間也可聯結，稱為「橫向聯結」或「交叉聯結」(cross link)，讓學習者知道

其間的關係。

四、概念圖包含例子，可以幫助學習者澄清概念的意義。

參、概念圖在教學上的應用

教師在課堂進行時，運用專家認定的學習概念圖為基礎，可具備兩大功用（黃達三，2006）：

一、教學的前置組織（Willerman & Mac Harg, 1993）：

利用活動操作或引導，在教師授課或進行課程前，便協助學生進行知識結構的組織，作為學生接收、同化新進知識內容的鷹架（scaffolding）搭設。

二、學生的先備知識的檢測（Wandersee, 1990）：

根據 Bruner (1960) 與 Ausubel (1963) 主張的學習理論，教師的教學內容若能植基於學生的先備知識，那麼學生才要能進行有意義的學習（meaningful learning）。若學生的先備知識不足或既有迷思概念未被消除，便難以達成有意義的學習，往往淪入機械式（rote）的記憶學習罷了。

例如：教師在進行「整數乘法」課程前，可藉由試題的測試或活動的進行，引導並確認學生是否已具備「整數加法」的能力與概念，檢測學生的先備知識，避免概念缺口（Concept Gap）的產生，影響學習的效能。

教師根據學生概念圖狀況，配合領域專家所認同之標準概念圖，偵測學生的概念結構的適宜性及完備性。在完整性的學科概念基礎上，協助學生發展出適性的學習。同時，教師也可以利用概念圖作為診斷學生迷失概念的工具，針對學生的迷失概念，進行個別化的補救教學（Novak, 1995）。

第四節 模糊德菲法

模糊德菲法(Delphi method)亦稱為專家法，它是利用專家集體智慧來確定各因素在評判問題或決策問題中重要程度係數的有效方法之一。雖然傳統德菲法擁有收集更多的知識和訊息、提供更多的問題解決方法、產生較高品質的決策內容以及增加對最後決策的承諾與認同等優點(Robbins, 1991; 吳政達, 1999)，但傳統德菲法蒐集專家意見耗時過久、成本高、問卷回收率低等缺點及對調查或預測不確定性及模糊性的問題卻依然存在(黃良志、謝松益、張炳騰, 2001)。

此理論最早於 1985 年由 Murray 將模糊理論與德菲法相結合所提出。在決策群體中，決策者評價之極小值為最小的一種決策群體共識型態；同理，決策者評價之極大值為最大的一種決策群體共識型態。而在這決策者共識之極大值與極小值之間，存在著許多已知、未知型態之決策者共識函數。因此，對這些不同之決策者共識函數，給予不同的可能性程度（或隸屬程度），因為在此函數中，極大值與極小值皆較極端，幾何平均數較可代表決策群體中大部分專家之意見之幾何平均數來作為整合群體決策之函數，計算出來的結果可避免受到極端值的影響，以建立模糊德菲法。

若考量以反覆式的問卷調查，其彙整過程的時間將會過長，不符合時效，因此，Ishikawa, A., M. Amagasa, T. Shiga, G. Tomizawa, R. Tatsuta 與 H. Mieno 等人於 1993 年提出 Max—Min 法與模糊整合(fuzzy Integration)法，來解決此項的缺點。以 Max—Min 法來整合老師問卷之資料，因應語意模糊的特性，採用三角形歸屬函數（如圖 2-3）來呈現答卷者之直觀想法：

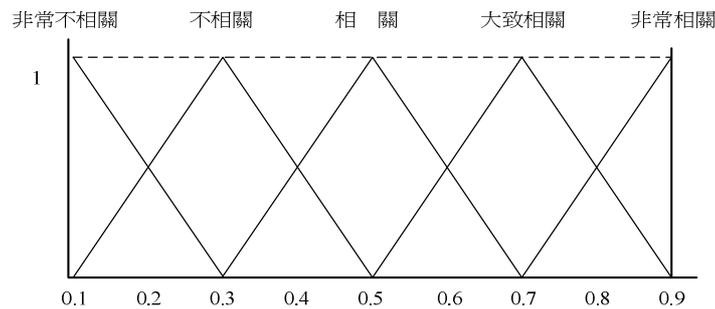


圖2-3 三角形歸屬函數圖

這樣的整合方法具有建構容易與運算簡單之特性，使之達成共識及一致性時，不但能節省調查時間與成本，而且能實際反應出專家之意見。

$$\tilde{W}_i = (\alpha_i, \beta_i, \delta_i), i = 1, 2, 3 \dots k \quad (2-1)$$

$$\alpha_i = \text{Min}\{\alpha_{mi}\}, m = 1, 2, 3 \dots n \quad (2-2)$$

$$\beta_i = \left[\prod_{m=1}^n \beta_{mi} \right]^{\frac{1}{n}}, m = 1, 2, 3 \dots n \quad (2-3)$$

$$\delta_i = \text{Max}\{\delta_{mi}\}, m = 1, 2, 3 \dots n \quad (2-4)$$

其中 \tilde{W}_i ：模糊權重，

K：概念的數目

k：專家數

$\alpha_i, \beta_i, \delta_i$: 三角模糊數的左端點、頂點及右端點

m_i : 第 m 個專家對第 i 個概念的看法及意見

接著採用重心解模糊化法來求得每一概念之權重數值：

$$W_i = \frac{\alpha_i + \beta_i + \delta_i}{3} \quad (2-5)$$

W_i : 第 i 個概念解模糊化後之權重值。

$\tilde{W}_i(\alpha_i, \beta_i, \delta_i)$: 整合專家看法後的模糊權重值。

第五節 灰色理論簡介

中國大陸學者鄧聚龍教授於 1982 年提出灰色理論。灰色理論主要是針對系統模型的訊息不完全、關係不明確，進行關聯分析、模型建構、並藉著預測及決策的方法來探測並瞭解系統狀況（溫坤禮、黃宜豐、張偉哲、張廷政、游美利、賴家瑞，2003）。

灰色系統中以「灰」的概念來描述現實環境中訊息的程度，在任何的事件當中，均可由「灰的程度」來表示訊息的完整性，對於認知訊息完整的系統是以白色表示，對於認知訊息完全未知的系統是以黑色表示，而信息不充分、不完整時，系統則以灰色概括表示，如式(2-6)：

$$\text{IFM} : P \xrightarrow{\text{訊息}} \tilde{\theta} \quad (2-6)$$

程式中

$\tilde{\theta}$: 為認知程度的大小

IFM : 為 Information 之意

對 $\tilde{\theta}$ (認知程度) 而言，當

認知程度 = 1 為白色認知：用 ● 表示

認知程度=0 為黑色認知：用○表示

$0 < \text{認知程度} < 1$ 為灰色認知：用⊙表示（溫坤禮等，2003）

壹、灰的應用

灰色理論應用之範圍非常廣泛，主要是對於事件之間關係不明確，以及多變量之輸入，離散型之數據，及系統數據不完整等狀況，做有效率之處理，歸納其研究的項目有下列幾項：

一、 灰色生成（Grey generating）：

灰色生成是一種補充訊息之數據處理方法。用此方式將系統中，嘗試在雜亂無章之數據中，透過就數找數的方法，找出數據之間的隱藏的規律性及特徵。常用之灰色生成方法有灰色關聯生成（GRGO）累加生成（AGO）、累減生成（IAGO），及插植生成（Interpolation Generating）。其中累加生成（AGO）、累減生成（IAGO），一般用於建模。插植生成（Interpolation Generating）方法則常用於灰關聯分析及灰決策。

二、 灰色關聯分析（Grey relational analysis）：

關聯分析又稱為系統因素分析，是指研究主題的因子空間（Factor Space）內，系統因子之間或是關鍵因子與研究主題的不確定關聯。傳統之測度方法如統計迴歸分析（Regression）需要大量數據，而且要求數據之分佈必須為典型函數關係如：線性的、對數的、或是常態分布（Normal distribution）等。而灰關聯分析具有少數據及多因素分析之特性，恰可以彌補統計迴歸分析之缺點（江金山、吳佩玲、蔣祥第、張廷政、詹福賜、張軒庭、溫坤禮，1998）。灰色因素間的關聯度分析，實質上是灰色系統分析、預測、決策的基

礎。

三、 灰色建模 (Grey model)：

利用生成後之數據建立一組灰差分方程式 (Grey Differential Equation) 與灰擬微分方程式 (Pseudo Differential Equation) 之模式稱為灰建模。一般灰建模可以分為： $GM(1,1)$ (表示一階微分，而輸入變數為一個) 一般做為預測用。第二種為： $GM(1,N)$ (表示一階微分，而輸入變數為 N 個) 一般做為多維關聯分析用，再者為： $GM(0,N)$ (表示零階微分，而輸入變數為 N 個) 一般做為多維關聯分析用。

四、 灰色預測 (Grey prediction)：

基於少數數據的模型，灰色預測以 $GM(1,1)$ 對系統行為特徵值發展進行預測，實際上是找出某一數列中間各個元素之未來動態狀況。灰預測又可分為數列灰預測、災變灰預測、季節災變灰預測、拓樸灰預測及系統灰預測等種類，其基本類型即為數列預測。

五、 灰色決策 (Grey decision making)：

事件發生時選擇一最佳方案之過程即為決策，灰色決策包括灰元之決策，或是結合 $GM(1,1)$ 模型所作之決策。可分為灰色局勢決策、灰色層次規劃與灰色整體規劃三種。

六、 灰色控制 (Grey control)：

灰控制主要是透過系統行為數據，找出行為發展的規律性，經過預測得到預估值，以此方法預測未來系統行為，再將此預測值回授至系統，以進行系統修正、控制的一種預測方法。

貳、灰關聯分析

藉由灰關聯分析的計算，可求得各因子序列之灰關聯度，此灰關聯度即代表各因子與該研究主題（參考序列）之接近程度，藉由灰關聯度之比對結果來求得與目標函數或期望值之關聯程度。依個別對系統影響的強弱程度，篩選出哪些因素是主要的、次要的、顯性的或是隱藏的條件因子。關聯度分析一般包括下列計算和方法：(1)修改數據資料使符合可比性(2)計算關聯係數(3)求因子間的關聯度；(3) 排關聯序；(4) 列出關聯矩陣，在應用中是否進行所有步驟，可視具體情況而定。

灰關聯分析主要是透過所得數據中，將各條件參數進行關聯性的運算，由這些已知條件找出不明確之訊息或規則，進一步釐清參數間之互動關係。灰色關聯分析能夠從少量的資訊（數據少且不確定）出發，透過多維角度來分析、量化、序化這種關係。灰關聯分析採用主題空間中因子的整體比較，在一般一對一的比較中，僅對兩者的數值關係進行比較探討，因而忽略了整體比較環境，這樣的數據結果容易產生科學方法上的錯覺。

而灰色關聯分析是按數據特性做分析，其功能為找出因子數值界限，針對同構因子鑑別效能，進一步辨認分析主次條件並形成特徵模式。而灰色關聯分析之原理為：灰關聯分析是數量化之整體比較，相較於距離空間測量工具，有測度但是無整體性的特性，灰色關聯分析可在動態研究中，發揮更多功能。

灰色關聯分析對樣本大小沒有太大要求，只要有少數樣本資訊就可以多角度生成，有效釐清少資訊、不確定的灰色地帶。分析時也不要求典型的分布規律或假設條件，具有對樣本數量適應性更廣的特性，可見灰關聯分析法屬於一種可靠度高、運算簡單、

過程清晰的分析工具之一。鄧聚龍（1999）歸納各種方法之特性詳見表 2-1：

表 2-1 灰色系統、機率論、模糊集之特性比較表

項目	灰色系統	機率論	模糊集
內涵	小樣本不確定	大樣本不確定	認知不確定
基礎	灰朦朧集	康托集	模糊集
依據	信息覆蓋	概率分布	隸屬度函數
手段	生成	統計	邊界取值
特點	少數據	多數據	經驗（數據）
要求	允許任意分布	要求經典分布	函數
目標	現實規律	歷史統計規律	認知表達
思維方式	多角度	重複再現	外延量化
信息準則	最少信息	無限信息	經驗信息

資料來源：鄧聚龍，灰色系統理論與應用，高立圖書，1999

參、灰關聯生成

如果在序列是可比較之狀況下，我們為達到灰關聯分析之目的，所以必須做數據處理，此一處理過程稱為灰關聯生成，而灰關聯生成之方式可以分為下列幾項：

- 一、 原始數據已滿足要求。
- 二、 利用原始數據做數據之正規化（Normalization）處理。
- 三、 利用灰色理論方法計算效果測度方法如下：

假設原始數據為

$$x_1^{(0)} = (x_1^{(0)}(1), x_1^{(0)}(2), x_1^{(0)}(3), \dots, x_1^{(0)}(m),)$$

$$x_2^{(0)} = (x_2^{(0)}(1), x_2^{(0)}(2), x_2^{(0)}(3), \dots, x_2^{(0)}(m),)$$

.....

$$x_n^{(0)} = (x_n^{(0)}(1), x_n^{(0)}(2), x_n^{(0)}(3), \dots, x_n^{(0)}(m),)$$

則有三種效果測度：

- 一、 望大型式：希望效益目標愈大愈好，數學模式為：

$$x_i^*(k) = \frac{x_i^{(0)}(k)}{\max_{\text{all } i} \cdot x_i^{(0)}(k)}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2-7)$$

二、望小型式：希望效益目標愈小愈好，數學模式為：

$$x_i^*(k) = \frac{\min_{\text{all } i} \cdot x_i^{(0)}(k)}{x_i^{(0)}(k)}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2-8)$$

三、望目之型式：特定目標之測度，數學模式為：

$$x_i^*(k) = \frac{\min_{\text{all } i} \cdot \{OB, x_i^{(0)}(k)\}}{\max_{\text{all } i} \cdot \{OB, x_i^{(0)}(k)\}}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2-9)$$

式中

(一) $x_i^*(k)$ ：灰色關聯生成之後的數值大小

(二) $\max_{\text{all } i} \cdot x_i^{(0)}(k)$ ： $x_1^{(0)}(k), x_2^{(0)}(k), x_3^{(0)}(k), \dots, x_n^{(0)}(k)$ 之中的最大
大值

(三) $\min_{\text{all } i} \cdot x_i^{(0)}(k)$ ： $x_1^{(0)}(k), x_2^{(0)}(k), x_3^{(0)}(k), \dots, x_n^{(0)}(k)$ 之中的最
小值

(四) OB： $x_i^{(0)}(k)$ 中選定的值

本研究選定之目標值為 0.5

肆、灰關聯分析法之計算

灰關聯分析法的實施步驟與方法說明如下(吳漢雄、鄧聚龍、溫坤禮，1996)：

一、影響空間：設 P(X) 為某特定的主題所得到的因子集，Q 為影響關係，則 {P(X);Q} 稱為影響空間，需要具備下列特性：

(一) 關鍵因子的存在性

(二) 子序列的存在性

(三) 因子的影響不斷改變而不具固定模式

(四)因子的數目是有限且可數的

(五)各因子之間具有獨立性

二、測度空間：在 $P(X)$ 中所形成之序列

$$x_i^{(0)}(k) = (x_i^{(0)}(1), \dots, x_i^{(0)}(k), \dots) \in X, \text{ 其中:}$$

$$i=0, L, m. \quad k=1, L, \quad n. \in N$$

如果滿足下列條件：

(一)無因次性：將 $x_i^{(0)}(k)$ 變成沒有單位，以便互相比較。

(二)同等級性：使 $x_i^{(0)}(k)$ 均屬於同等級或等級相差不可大於 2。

(三)同極性：將各因子的描述，同時以最大 or 最小值處理。

則稱此序列為可比性，所構成的空間稱為測度空間，以 $\{P(X); x_i^*(k)\}$ 表示。

三、灰關聯空間：數據經過正規化處理後，在參考序列 x_i 與比較序列 x_j 如果存在一函數 $\gamma(x_i, x_j)$ 滿足下列性質：

(一)規範性：

$$0 \leq \gamma(x_i, x_j) \leq 1, \quad \forall i, \forall j$$

$$\gamma(x_i, x_j) = 1, \quad \text{稱為完全正相關}$$

$$\gamma(x_i, x_j) = 0, \quad \text{稱為完全不相關}$$

(二)偶對稱性：只有兩組序列互相比較時，

$$\gamma(x_i, x_j) = \gamma(x_j, x_i)$$

(三)整體性：當序列數目等於或大於三組時，

$$\gamma(x_i, x_j) \neq \gamma(x_j, x_i)$$

(四)接近性：當 $|x_i(k) - x_j(k)|$ 愈小，則 $\gamma(x_i(k), x_j(k))$

愈大

(五)則所構成之空間稱為灰關聯測度空間，以 $\{P(X); \Gamma\}$ 表示。

四.灰關聯度：

在灰關聯空間 $\{P(X); \Gamma\}$ 中，如果有一組序列：

$$x_i = (x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(k))$$

其中 $i=1, 2, \dots, m$ ， $k \in N$ （正整數）

根據局部性灰關聯度定義：灰關聯係數 $\gamma(x_0(k), x_i(k))$ 為

$$\gamma(x_0(k), x_i(k)) = \frac{\Delta_{\min} + \zeta \Delta_{\max}}{\Delta_{0i}(k) + \zeta \Delta_{\max}} \quad (2-10)$$

其中 $i=1, 2, \dots, m$ ， $k=1, 2, \dots, n$

其中 x_0 為參考數列， x_i 為一特定的比較數列。

$\Delta_{0i} = \|x_0(k) - x_i(k)\|$ ： x_0 和 x_i 之間在第 k 個差的絕對值。

$\Delta_{\min.} = \min_{j \in i} \min_k \|x_0(k) - x_j(k)\|$ ：代表所有數列間差距之

最小值。

$\Delta_{\max.} = \max_{j \in i} \max_k \|x_0(k) - x_j(k)\|$ ：代表所有數列間差距

之最大值。

ζ ：辨識係數： $\zeta \in [0, 1]$ （辨識係數的值可以依實際需要

調整大小，一般均取 0.5 之值)

當求得數列各點之灰關聯係數，一般取灰關聯數的平均值為帶比較數列與參考數列間相對之灰關聯度。

五、灰關聯序：

灰關聯分析在少樣本、貧訊息的情況下，運用分析比較的方法，評估各數列間的相對關係，經由計算出來的灰關聯度數值的高低，作為推測事件相關程度多寡的關鍵參考值。因此，將多個比較序列對同一個參考序列的灰關聯度，按照程度順序進行排列，稱之為「灰關聯序」。灰關聯程度愈高代表相關程度愈高，灰關聯度愈低代表相關程度愈低，經由關聯度門檻值的設定，篩選不同的排序可能。

第六節 學習錯誤類型

在數學答題錯誤的研究中，通常將錯誤原因區分為系統性錯誤 (system error) 和隨機錯誤 (slips) 兩類。「系統性錯誤」來自於不完備的方法、算式或是規則的應用 (VanLehn, 1990)。隨機錯誤則是非系統性、不小心的錯誤，可視為來自於人類處理訊息過程中產生的雜訊 (noise) (VanLehn, 1983)。

學習過程中，因為語言、基模、策略、程序知識的因素影響，產生了錯誤解題步驟，Stefanich & Rokusek (1992) 指出：系統性錯誤是來自於穩定的錯誤、遺失技能知識、不完全或誤導學習而產生會持續出現在相類似的問題中，是對特別演算產生不正確反應。在數學解題過程中產生的錯誤步驟，依其出現錯誤的關鍵處作分類，分成幾種類型稱為錯誤類型 (Kathlen, 1987)。

經由錯誤類型特徵值的比對，我們可以進一步掌握學生的學

習狀況，深入其學習歷程的問題。藉由診斷測驗工具的施行，收集學生的應答狀況並加以分析歸納，會發現學生的錯誤型態並非沒有關聯，在樣本空間中，將因產生學習障礙的成因，收斂成具錯誤類型關聯性較高之群組。藉由重要錯誤類型的比對，配合各個試題的內涵指標，便能協助快速而有效的掌握學習者的概念發展。而教育測驗專家也認為，認知心理學和心理計量的發展應用於教育測驗，能更精確地診斷出學生的學習錯誤，於是發展出「認知診斷評量」之構想（Nichols, 1994; Snow & Lohman, 1989）。

第三章 研究方法與設計

在教學流程中，對於學生學習成效的評量是非常重要的，但在實際的教學現場，因為時間及教學人力之不足，很難在足夠時間內，對學生進行深度的學習診斷，確實掌握學生的學習狀況。本研究希望能有效率的完成診斷，並提供合理且有用之訊息，做為補救教學或學習進程的重要參考。導入資訊設備為輔助，作為重要的人力支援，不僅能夠減輕教學者的工作負擔，更可以根據學生答題狀況，經過評分、統計、分析後，產生客觀性學習狀況數據，作為適性化教學的依據。

第一節 研究方法

根據研究目的與文獻探討的結果，擬定之研究方法，說明如下：

在教育診斷評量技術中，以概念圖為主軸進行學習概念診斷並建立學習補救路徑，是目前最被廣泛研究與使用之評量方法。然而目前診斷技術中，常因偏重受測者的概念形成模式的探測，最後只取得受試者對該試題的作答正確與否，以及大範圍的推測診斷。無法對受試者的迷思概念提供真確指出，後續的補救教學也因此難以有效的規劃施行。因此本論文提出運用灰關聯分析法，配合「兩階段題組式診斷模組」診斷出學生答題活動背後，所隱藏對於概念的學習狀況以及解題能力的具備與否。

其中，灰關聯分析法運用關聯序列的演算，將題組之間的概念屬性計算成灰關聯度來當作彼此的概念相關性，提供教師對於題組內容掌握更多的概念影響訊息，藉以判斷學生的學習情形；建立一個以結構理論為基礎的兩階段題組式診斷模組，在同一診斷工具的檢測行為中，同時分析學習者的概念認知以及算式操作，以節省施測的時間，並提供個別學習診斷分析，讓學生可以立即知道自己的錯誤觀念，也

有利教師進行補救教學，在可達成之時間與人力條件限制下，提升教學成效。本方法建置完成後，實際於國小進行施測，並收集完整的紙筆作答反應，輔以訪談方式，深入了解學生迷思之所在作為成效評估的依據。

第二節 研究架構

依據研究目的，本研究之研究架構，分成：學習概念分析、編製概念診斷工具、學習概念診斷等三大部分進行，其詳細研究步驟可分成下列步驟進行：第一個部份是以診斷主題為分析主題，在參考暨有之研究基礎，配合模糊德菲法之計算，由專家客觀地建構出完整之概念關係及學習路徑，建立該主題之學習概念架構圖，以作為後續設計相關試題，以及診斷迷思概念之基礎。第二部份要形成概念診斷工具，第一項是測驗工具：參照診斷主題學習之概念節點與學習路徑，設計一適當之測試題庫，作為診斷進行之工具。第二項是比對工具：學習上的障礙，有其模式可循，根據既有研究歸納之錯誤類型，進行常見錯誤類型屬性分析表的建立，作為第三部份比對之依據。第三個部份，根據受試者的測驗結果，進行概念及能力兩類別診斷，運用灰理論系統的演算，提出客觀之學習能力數據，提供未來教學的建議。

根據研究之目的，繪製本研究之研究架構，詳如圖 3-1。

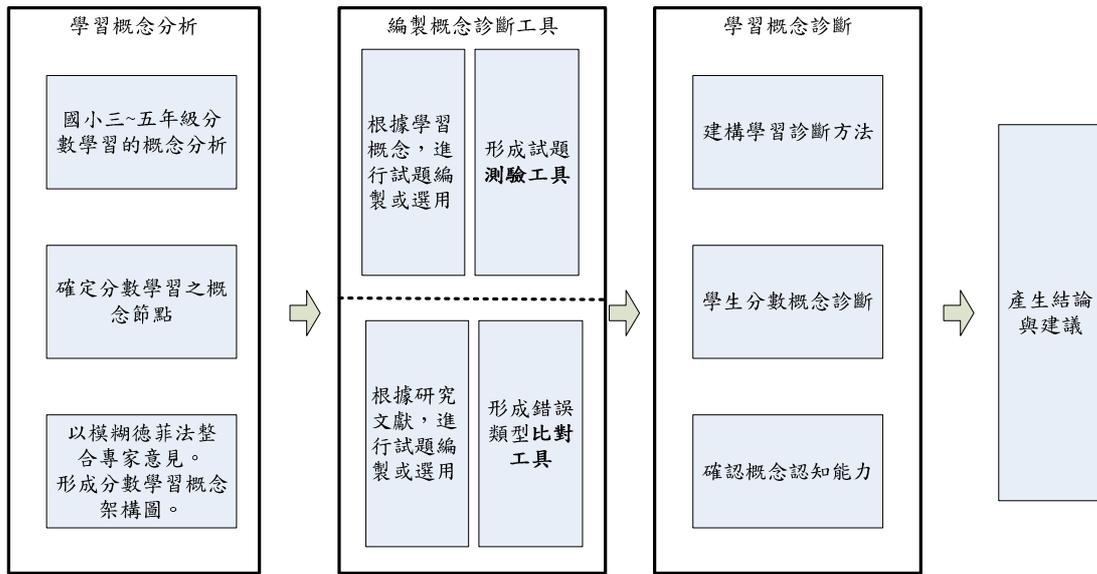


圖3-1 研究架構圖

本研究之研究架構，分成：學習概念分析、編製分數概念測驗工具、學習概念診斷三大部分進行，其詳細研究步驟可分成下列步驟進行：

壹、學習概念分析階段：

- 一、 相關文獻探討
- 二、 就診斷主題，進行教材概念初步分析
- 三、 與擔任教學之教學人員進行討論，確認學習者通過測驗所需之關鍵概念與能力。
- 四、 初步分析之各項概念，再參考相關研究之經驗，並委請該領域專家確認，分列出學習的關鍵概念與關鍵能力。
- 五、 採用專家模糊德菲法，對學者專家及教學人員進行訪談與問卷調查，確認該學習主題概念關聯情形，產生概念關聯圖，作為後續步驟之基礎。

貳、編製概念診斷工具：

根據學習單元之主要概念，以及專家知識結構，進行試題的編製與篩選。

- 一、 進行試題分析與修正。
- 二、 進行組卷以利紙筆測驗的進行。
- 三、 根據分數概念關聯圖及資料分析，製作出試題測驗工具。
- 四、 參考相關文獻及實務經驗，進行常見錯誤類型之整理。
- 五、 建立常見錯誤類型之屬性分析表，作為錯誤類型比對工具。

參、學習概念診斷

- 一、 診斷推論：以灰關聯法則，將學生的答題狀況與常見錯誤類型進行比對，藉此推算學生的概念認知狀況。
- 二、 將學習狀況分為概念學習及解題技能兩部份，進行兩階段診斷程序（詳見圖 3-2），進一步確認其迷思概念之類型，診斷出其迷思概念或必需能力之缺乏。
- 三、 提出補救學習建議路徑或是需加強的單一概念。
- 四、 提出研究結論與建議。

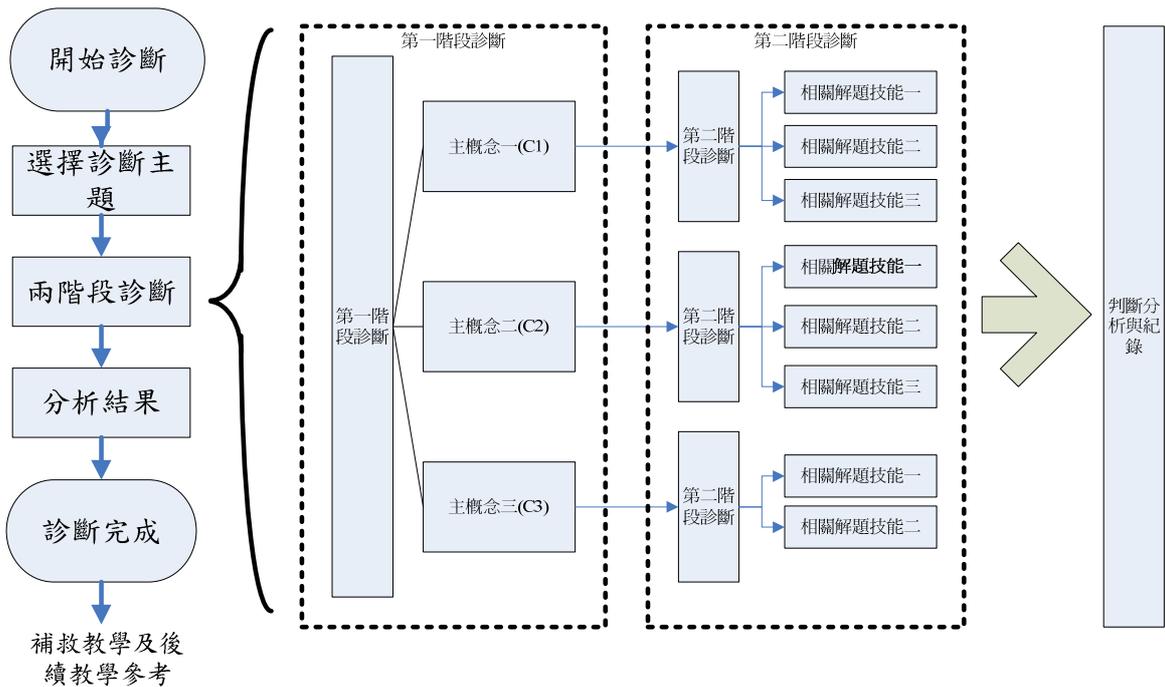


圖3-2 兩階段診斷評量流程圖

藉由上述的研究流程，希望能透過灰理論的快速運算，能夠有效診斷出學習者在分數單元上的學習障礙，經由未建立概念的補足，或迷思概念的導正，提供教學人員施行補救教學的依據，找出適合學習者個別差異的學習路徑，以探知使用本研究之學習診斷系統後，是否能幫助教學人員之診斷效能，進一步補救學習者相關單元的學習。

第三節 研究工具

本研究在研究調查與系統開發上所使用工具如下：

壹、灰理論關聯分析工具

灰關聯分析具有能經由少數資訊，透過多維角色來分析量化、序化之關係。分析過程中，透過參數間的關聯度，經由已得知但不明確的條件中找出所需要之訊息，進而明瞭參數間之聯結關係，作為實際應用之重要參考。一般參數數列之間的之比較，或是兩者之間的比較，由於缺乏參考標準，因而忽略了比較環境，也容易因為樣本的條件，產生較狹隘的解讀分析。灰關聯分析是有參考標準的整體比較，經由計算找出清楚邊界後，有測度地進行數量化之整體比較，作為鑑別效能，辨認模式，確認同構，分析主次等實際狀況之釐清。相較於距離空間工具之特性，為有測度但是無整體性，灰關聯分析對於本研究有很大之助益。

由黃宜豐、溫坤禮等教授所開發的灰關聯系統程式，是設計於微軟公司視窗軟體上的應用工具，該程式運用視覺化使用介面，藉由下拉式選單的引導以及辨識係數、權重等重要參數的設定，方便使用者在灰關聯分析應用上的運算實驗。程式中也讓使用者透過局部性灰關聯分析或整體性灰關聯分析的選定，將灰關聯資料生成的運算過程和生成數據完整顯示於畫面。灰關聯系統程式方便操作的介面以及彈性的選項功能，可讓使用者快速建構出灰關聯序，並藉由電腦快速、準確的運算能力，產生相關實驗數據，以瞭解實驗模型是否合理，這是本研究中採用此程式之原因。

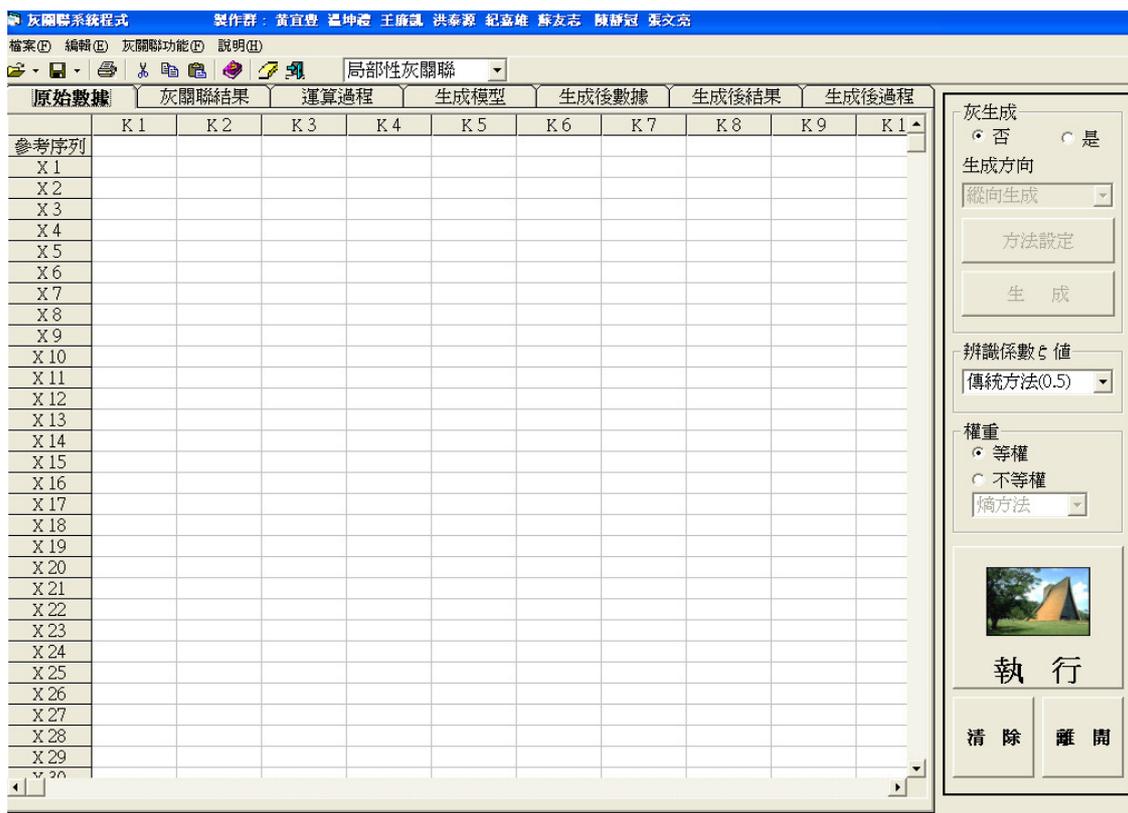


圖3-3 灰關聯系統程式

貳、測驗診斷工具

在診斷學習者的學習障礙過程中，必須瞭解學習主題中概念之間的關係，找出較佳的學習路徑，作為確認學習歷程的節點。知識概念架構圖的建立，通常需要專任教師或是專家對課程深入了解後，才能畫出適合的知識概念架構圖。此外不同的學習背景與個人特質，也會在學習歷程上產生不同的學習路徑，因此如何整合不同主觀的看法，建立能夠反應出學生學習狀態的知識概念架構圖，更是診斷學生學習障礙的一大要因。在本章中，我們將根據文獻內容，配合專家學者的意見，採用 Max-Min 法與模糊整合法作為演算工具，產生知識概念架構圖，以期能夠探測出學生學習狀態。

參、錯誤類型比對工具

本研究方法運用相關文獻及實務經驗之結果，進行常見錯誤類型之整理，依此建立常見錯誤類型之屬性分析表，作為錯誤類型比對工具，作為後續診斷之依據。

第四節以知識地圖為基礎的學習診斷方法

壹、學生作答資料的整理

一、建立試題概念分配表

根據試題測試結果，進行後續的分析及診斷：

其中，試題概念分配表（Concept Distribution Table, CDT）是用來表示出概念在試題中分配的狀況，亦即本份測驗工具中包含了哪些主題概念以及這些概念是位於測驗工具的哪些試題中，其定義如下：

假設共有 8 道試題，依序編號為 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 、 \dots 、 Q_8 ，且整個測驗經過分析後可得到 9 個概念，依序編號為 C_1 、 C_2 、 C_3 、 \dots 、 C_9 。其中 Q_2 包含 C_2 、 C_3 、 C_5 三個概念； C_6 概念包含在 Q_5 、 Q_8 兩試題中。由此我們可以建立出如表 3-1 的試題概念分配表：

表 3-1 概念分配表

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8	總計
C_1	1			1		1			3
C_2		1			1				2
C_3		1	1				1		3
C_4					1			1	2
C_5	1	1					1		3
C_6				1		1			2
C_7				1	1				2
C_8							1		1
C_9			1					1	2

以數值” 1”或勾選方式來表示該題的測驗題目 Q_i 包含概念 C_j ，” 0”或未填記則表示該概念未包含於該題測驗中，最後則統計每一概念在該次測驗裡總共被包含在幾題測驗題中。

二、建立該試卷的概念分布矩陣

根據概念分配表，統計概念在題目出現的機率，建立該試卷的概念分布矩陣如表 3-2：

表 3-2 概念分布矩陣

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8
C_1	0.33			0.33		0.33		
C_2		0.5			0.5			
C_3		0.33	0.33				0.33	
C_4					0.5			0.5
C_5	0.33	0.33					0.33	
C_6				0.5		0.5		
C_7				0.5	0.5			
C_8							1	
C_9			0.5					0.5

三、建立學生答題狀況統計表

以數值” 1”或勾選方式來表示該名受測學生 S_k 未能答對測驗題目 Q_i ，” 0”或未填記則表示該概念未包含於該題測驗中，紀錄如表 3-3。

表 3-3 學生答題狀況統計表

	Q ₁	Q ₂	Q ₃	Q ₄	Q ₅	Q ₆	Q ₇	Q ₈
S ₁				1			1	
S ₂	1			1		1		
S ₃		1					1	
S ₄					1	1		
S ₅		1	1	1		1		
S ₆								1
S ₇	1				1			
S ₈		1	1	1	1	1		
S ₉								1
S ₁₀						1		1
答錯人數	2	3	2	4	3	5	2	3

四、建立學生錯誤概念統計表

將學生答題狀況(表 3-3)與診斷工具之概念分布矩陣(表 3-2)進行運算，統計每一概念在該次測驗中被答錯之情形，據此產生錯誤概念統計表(表 3-4)：

表 3-4 學生錯誤概念統計表

	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉
S ₁	0.33		0.33		0.33	0.5	0.5		0.5
S ₂	0.66				0.33	0.5	0.5		
S ₃		0.5	0.66		0.66				
S ₄	0.33	0.5		0.5		0.5	0.5		
S ₅	0.66	0.5	0.66	0.5	0.33	1	0.5		0.5
S ₆				0.5					0.5
S ₇	0.33	0.5		0.5	0.33		0.5		
S ₈	0.66	1	0.66	0.5	0.33	1	1		0.5
S ₉				0.5					0.5
S ₁₀	0.33			0.5		0.5			0.5

貳、錯誤類型的比對

該學習主題中見之錯誤類型，由專家根據該類型之特徵，對照主要學習概念項目 C₁、C₂、C₃、...C₉ 給予特徵值，得到常見錯誤類型屬性分析表如表 3-5：

表 3-5 常見錯誤類型屬性分析表

	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉
Er ₁		1			1	1			
Er ₂	1	1						1	
Er ₃		1	1		1				1
Er ₄				1		1			
Er ₅			1				1	1	1
Er ₆	1						1		
Er ₇		1		1	1				1

其中 Er₁ 代表常見錯誤類型，填記數值則代表概念 C_j 與該錯誤

類型之關係。若取學生 S_1 的作答狀況為例，進行該生錯誤類型的診斷運算。

一、本例中數據已經滿足可比性，首先建立標準序列與各個比較序列，其中標準序列 x_0 是 S_1 的答題錯誤概念值，比較序列中， Er_1 （常見錯誤類型一）為 x_1 ， Er_2 （常見錯誤類型二）為 x_2 ，……， Er_7 （常見錯誤類型七）為 x_7 。

$$x_0 = \{0.33, 0, 0.33, 0, 0.33, 0.5, 0.5, 0, 0.5\}$$

$$x_1 = \{0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0\}$$

$$x_2 = \{1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0\}$$

$$x_3 = \{0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1\}$$

$$x_4 = \{0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0\}$$

$$x_5 = \{0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$

$$x_6 = \{1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0\}$$

$$x_7 = \{0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1\}$$

二、在 $\Delta_{0i} = \|x_0(k) - x_i(k)\|$

之下，求出差序列之大小。其中 $i=1, 2, \dots, 7$ ， $k=1, 2, \dots, 9$ 。得

到結果如下：

$$\Delta_{01} = (0.3300 \quad 1.0000 \quad 0.3300 \quad 0.0000 \quad 0.6700 \quad 0.5000 \quad 0.5000 \quad 0.0000 \quad 0.5000)$$

$$\Delta_{02} = (0.6700 \quad 1.0000 \quad 0.3300 \quad 0.0000 \quad 0.3300 \quad 0.5000 \quad 0.5000 \quad 1.0000 \quad 0.5000)$$

$$\Delta_{03} = (0.3300 \quad 1.0000 \quad 0.6700 \quad 0.0000 \quad 0.6700 \quad 0.5000 \quad 0.5000 \quad 0.0000 \quad 0.5000)$$

$$\Delta_{04} = (0.3300 \quad 0.0000 \quad 0.3300 \quad 1.0000 \quad 0.3300 \quad 0.5000 \quad 0.5000 \quad 0.0000 \quad 0.5000)$$

$$\Delta_{05} = (0.3300 \quad 0.0000 \quad 0.6700 \quad 0.0000 \quad 0.3300 \quad 0.5000 \quad 0.5000 \quad 1.0000 \quad 0.5000)$$

$$\Delta_{06} = (0.6700 \quad 0.0000 \quad 0.3300 \quad 0.0000 \quad 0.3300 \quad 0.5000 \quad 0.5000 \quad 0.0000 \quad 0.5000)$$

$$\Delta_{07} = (0.3300 \quad 1.0000 \quad 0.3300 \quad 1.0000 \quad 0.6700 \quad 0.5000 \quad 0.5000 \quad 0.0000 \quad 0.5000)$$

利用公式求極大值與極小值

最大差：1.0000

最小差：0.0000

取 ζ 值 = 0.5000

三、 計算灰關聯係數：利用公式 $r(x_i(k)-x_j(k))=(\Delta_{\min}+$

$$\zeta \Delta_{\max})/(\Delta_{ij}(k)+\zeta \Delta_{\max})$$

得到結果如下：

$r(x_0(1), x_1(1)) = 0.6024$
 $r(x_0(2), x_1(2)) = 0.3333$
 $r(x_0(3), x_1(3)) = 0.6024$
 $r(x_0(4), x_1(4)) = 1.0000$
 $r(x_0(5), x_1(5)) = 0.4274$
 $r(x_0(6), x_1(6)) = 0.5000$
 $r(x_0(7), x_1(7)) = 0.5000$
 $r(x_0(8), x_1(8)) = 1.0000$
 $r(x_0(9), x_1(9)) = 0.5000$
 $r(x_0(1), x_2(1)) = 0.4274$
 $r(x_0(2), x_2(2)) = 0.3333$
 $r(x_0(3), x_2(3)) = 0.6024$
 $r(x_0(4), x_2(4)) = 1.0000$
 $r(x_0(5), x_2(5)) = 0.6024$
 $r(x_0(6), x_2(6)) = 0.5000$
 $r(x_0(7), x_2(7)) = 0.5000$
 $r(x_0(8), x_2(8)) = 0.3333$
 $r(x_0(9), x_2(9)) = 0.5000$
 $r(x_0(1), x_3(1)) = 0.6024$
 $r(x_0(2), x_3(2)) = 0.3333$
 $r(x_0(3), x_3(3)) = 0.4274$
 $r(x_0(4), x_3(4)) = 1.0000$
 $r(x_0(5), x_3(5)) = 0.4274$
 $r(x_0(6), x_3(6)) = 0.5000$
 $r(x_0(7), x_3(7)) = 0.5000$
 $r(x_0(8), x_3(8)) = 1.0000$
 $r(x_0(9), x_3(9)) = 0.5000$
 $r(x_0(1), x_4(1)) = 0.6024$
 $r(x_0(2), x_4(2)) = 1.0000$
 $r(x_0(3), x_4(3)) = 0.6024$
 $r(x_0(4), x_4(4)) = 0.3333$
 $r(x_0(5), x_4(5)) = 0.6024$

$r(x_0(6), x_4(6)) = 0.5000$
 $r(x_0(7), x_4(7)) = 0.5000$
 $r(x_0(8), x_4(8)) = 1.0000$
 $r(x_0(9), x_4(9)) = 0.5000$
 $r(x_0(1), x_5(1)) = 0.6024$
 $r(x_0(2), x_5(2)) = 1.0000$
 $r(x_0(3), x_5(3)) = 0.4274$
 $r(x_0(4), x_5(4)) = 1.0000$
 $r(x_0(5), x_5(5)) = 0.6024$
 $r(x_0(6), x_5(6)) = 0.5000$
 $r(x_0(7), x_5(7)) = 0.5000$
 $r(x_0(8), x_5(8)) = 0.3333$
 $r(x_0(9), x_5(9)) = 0.5000$
 $r(x_0(1), x_6(1)) = 0.4274$
 $r(x_0(2), x_6(2)) = 1.0000$
 $r(x_0(3), x_6(3)) = 0.6024$
 $r(x_0(4), x_6(4)) = 1.0000$
 $r(x_0(5), x_6(5)) = 0.6024$
 $r(x_0(6), x_6(6)) = 0.5000$
 $r(x_0(7), x_6(7)) = 0.5000$
 $r(x_0(8), x_6(8)) = 1.0000$
 $r(x_0(9), x_6(9)) = 0.5000$
 $r(x_0(1), x_7(1)) = 0.6024$
 $r(x_0(2), x_7(2)) = 0.3333$
 $r(x_0(3), x_7(3)) = 0.6024$
 $r(x_0(4), x_7(4)) = 0.3333$
 $r(x_0(5), x_7(5)) = 0.4274$
 $r(x_0(6), x_7(6)) = 0.5000$
 $r(x_0(7), x_7(7)) = 0.5000$
 $r(x_0(8), x_7(8)) = 1.0000$
 $r(x_0(9), x_7(9)) = 0.5000$

四、 計算灰關聯度：以權重為準（等權— $\beta=1/9$ ）得到

$$r(x_0, x_1) = 0.6073$$

$$r(x_0, x_2) = 0.5332$$

$$r(x_0, x_3) = 0.5878$$

$$r(x_0, x_4) = 0.6267$$

$$r(x_0, x_5) = 0.6073$$

$$r(x_0, x_6) = 0.6814$$

$$r(x_0, x_7) = 0.5332$$

五、 排出灰關聯序：由大至小排列

$$r(x_0, x_6) = 0.6814 > r(x_0, x_4) = 0.6267 >$$

$$r(x_0, x_5) = 0.6073 > r(x_0, x_1) = 0.6073 >$$

$$r(x_0, x_3) = 0.5878 > r(x_0, x_2) = 0.5332 >$$

$$r(x_0, x_7) = 0.5332$$

第四章 方法實作

本研究著重於開發一個有效率、多訊息比對的學習診斷方法，用來輔助診斷學生的學習狀況，提供教師關於學生知識累積歷程中的訊息，有根據地針對不同學生，設計適性化之補救學習路徑，達到教學流程中重要的回饋功能。

本章針對所提出之診斷流程方法做說明，並以國小三到五年級所學習之「分數加減」為診斷範圍，對已學習過該單元之學童進行診斷實作。整個診斷過程包括四個階段：

- 一、 概念分析與知識概念架構圖的構建
- 二、 建立試題測驗工具
- 三、 建立常見錯誤類型比對工具
- 四、 進行診斷性演算

第一節 概念分析與知識概念架構圖的構建

本研究診斷方法的建立，植基於專家共同認定所架構出的學習概念架構。依此為基礎，偵測學生在該主題的學習狀況，藉由確認所需之關鍵能力的資訊，作為診斷其學習障礙形成的依據。

步驟一：確定「分數加減」學習路徑之主要概念節點

本研究是以知識概念架構圖為基礎，經由文獻資料的整理，並透過與領域專家的訪談，佐以專家的看法，分列出完成該主題學習時，所需完成之學習概念，作為建立學習概念架構圖之節點依據（詳如表4-1）。

表 4-1 「分數加減」學習路徑之主要概念節點說明表

概念編號	概念名稱	概念說明
C ₁	單位量	當為了獲得一個與一待測定量相等的量時，一個已知量，或是此單位的一個被等分割部分，可重複累積複製此被界定量（甯自強，1998）
C ₂	等分概念	等分是指將物品（連續量或離散量）細分，而細分的每個部分的量皆相等。（詹婉華、呂玉琴，2004）
C ₃	單位分數	分母是大於 1 的正整數，而且分子是 1，這樣的分數被稱作單位分數，例如： $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{4}$ 。Piaget, Inhelder, & Szeminska（1960）發現，孩童在處理和長度、面積等有關的分數問題時，先會處理 1/2，其次依序是 1/4、1/3、1/5、1/6。
C ₄	分數概念及記錄方法	認識真分數、假分數、帶分數，包含： 一、念法 二、整數型的分數寫法 三、認識分數在離散量的意義的能力 四、認識分數在連續量的意義的能力 五、分數在部分/全體的使用的能力
C ₅	等值分數	一個數可以用無限的分數方式來表示，例如： $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \dots$ 等等，這些不同的表示，便叫作這個分數的等值分數（Vance, 1992）；等值分數的特性就是部分可以再細分，部分可以再合併，等值分數既需要部分/全部的保留概念，也需要乘、除法的倍數觀念，可是乘除法運作的結果，並不會造成「量」的改變（引自詹婉華、呂玉琴，2004）
C ₆	假分數、帶分數的轉換	當單位分數內容物為單一個物時，能認識假分數意 $\frac{n}{n}$ 涵並進行合成、分解活動。藉由 $\frac{n}{n}$ 與 1 的比較活動認識帶分數，進一步了解同分母帶分數的合成、分解問題，並完成假分數和帶分數的互換程序；當單位分數內容物為多個個物時，能認識假分數、帶分 $\frac{n}{n}$ 數，藉由 $\frac{n}{n}$ 與 1 的比較活動，轉化假分數和帶分數的互換過程，完成同分母帶分數的合成、分解問題。

表 4-1 「分數加減」學習路徑之主要概念節點說明表(續)

C ₇	分數的大小比較	同分母分數的比較、異分母真分數的比較：經由通分過程，將待比較之分數，轉換為基準單位分數量相同（同分母）之等值分數，藉此轉換過程，進行分數大小之比較。
C ₈	分數的加法	將分數調整成基準單位分數量相同（同分母）之等值分數，進行分數之加法計算。
C ₉	分數的減法	將分數調整成基準單位分數量相同（同分母）之等值分數，進行分數之減法計算。

資料來源：本研究整理

步驟二：製作概念關聯問卷，並訪談相關專家

以步驟一所形成之主要學習概念為節點，輔以附錄一之「國小三至五年級學習「分數加減」單元概念關聯訪談表」為工具，收集專家意見本問卷填答對象，為擔任教學實務之三位國小五年級級任老師，及二位大專院校教授，藉由領域專家對「分數概念」及「分數加減」單元的教學經驗，決定各元件節點內的概念權重大小，回收問卷資料如表 4-2 所示：

表 4-2 「分數加減」單元各概念權重調查統計表

概念	關聯概念	專家一	專家二	專家三	專家四	專家五	解模糊化後權重值	權重值 > 0.5
C ₁	C ₂	相關	相關	非常相關	相關	相關	0.58	*
	C ₃	相關	相關	相關	大致相關	相關	0.58	*
	C ₄	非常相關	非常相關	非常相關	非常相關	非常相關	0.77	*
	C ₅	相關	不相關	相關	相關	不相關	0.40	
	C ₆	不相關	不相關	不相關	相關	不相關	0.38	
	C ₇	非常不相關	非常不相關	非常不相關	非常不相關	非常不相關	0.17	
	C ₈	非常不相關	非常不相關	非常不相關	非常不相關	非常不相關	0.17	
	C ₉	不相關	大致相關	不相關	不相關	不相關	0.45	
	C ₂	C ₃	相關	相關	相關	相關	相關	0.57
C ₄		非常相關	大致相關	大致相關	非常相關	非常相關	0.70	*
C ₅		不相關	不相關	相關	相關	不相關	0.39	
C ₆		非常不相關	非常不相關	不相關	非常不相關	非常不相關	0.24	
C ₇		非常不相關	非常不相關	非常不相關	非常不相關	非常不相關	0.17	
C ₈		非常不相關	非常不相關	不相關	非常不相關	不相關	0.25	
C ₃	C ₄	非常相關	大致相關	非常相關	非常相關	非常相關	0.70	*
	C ₅	相關	相關	不相關	相關	相關	0.42	
	C ₆	相關	不相關	不相關	大致相關	相關	0.48	
	C ₇	不相關	相關	不相關	不相關	不相關	0.38	
	C ₈	不相關	不相關	不相關	相關	非常不相關	0.36	
	C ₉	不相關	不相關	相關	不相關	不相關	0.38	
C ₄	C ₅	非常相關	非常相關	大致相關	非常相關	非常相關	0.70	*
	C ₆	非常相關	非常相關	非常相關	非常相關	大致相關	0.70	*
	C ₇	相關	相關	相關	不相關	不相關	0.40	
	C ₈	相關	相關	不相關	相關	相關	0.42	
	C ₉	不相關	不相關	不相關	不相關	非常不相關	0.28	

表 4-2 「分數加減」單元各概念權重調查統計表(續)

	C ₆	相關	相關	相關	相關	相關	0.50 *
C ₅	C ₇	相關	相關	相關	相關	相關	0.50 *
	C ₈	相關	相關	相關	相關	相關	0.50 *
	C ₉	相關	相關	大致相關	相關	相關	0.58 *
C ₆	C ₇	相關	相關	相關	大致相關	大致相關	0.59 *
	C ₈	相關	大致相關	相關	相關	相關	0.58 *
	C ₉	相關	相關	相關	相關	相關	0.50 *
C ₇	C ₈	不相關	不相關	不相關	不相關	不相關	0.30
	C ₉	不相關	相關	不相關	不相關	不相關	0.38
C ₈	C ₉	相關	相關	相關	不相關	不相關	0.40

資料來源：本研究整理

步驟三：將問卷訪談結果轉換成模糊評估值

在運算方面，本文提出模糊語意整合運算法，本文提出一個不同於一般模糊語意問卷的「模糊語意量表」，以五等量模糊評估值（非常相關、大致相關、相關、不相關、非常不相關）來表示。將模糊語意以模糊數參數化表示，且利用重心解模糊化法（式 2-5）來整合各個問項的語意值。語意值的對應隸屬度如圖 4-1 所示：

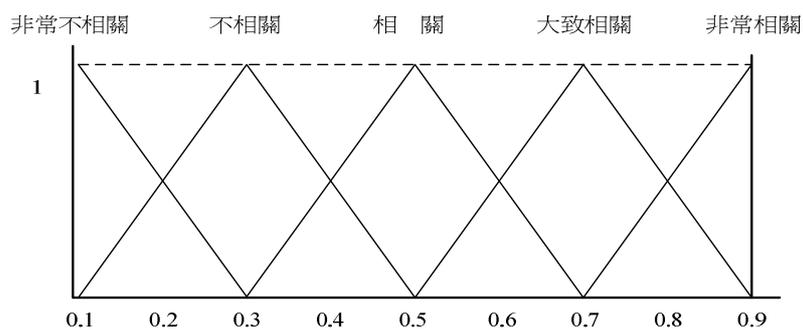


圖4-1 本研究模糊語意變數之三角模糊數

本研究之模糊尺度訂定，不採用數值 0，是因為在整合多位專家之看法進行運算時，是採用乘積運算，又因考慮到對稱性，故採用區間為 0.1~0.9。

步驟四：運用模糊德菲法整合專家意見

本研究採用模糊德菲法來整合這些意見，使之達成一致性，可將學生在國小階段學習分數加減時，主要概念的学习架構，形成國小階段分數加減學習的概念架構圖。本研究透過問卷調查，其中任意上下兩層之間存在包含的關係。經訪談及修正後，綜合並整理結果如圖4-2所示：

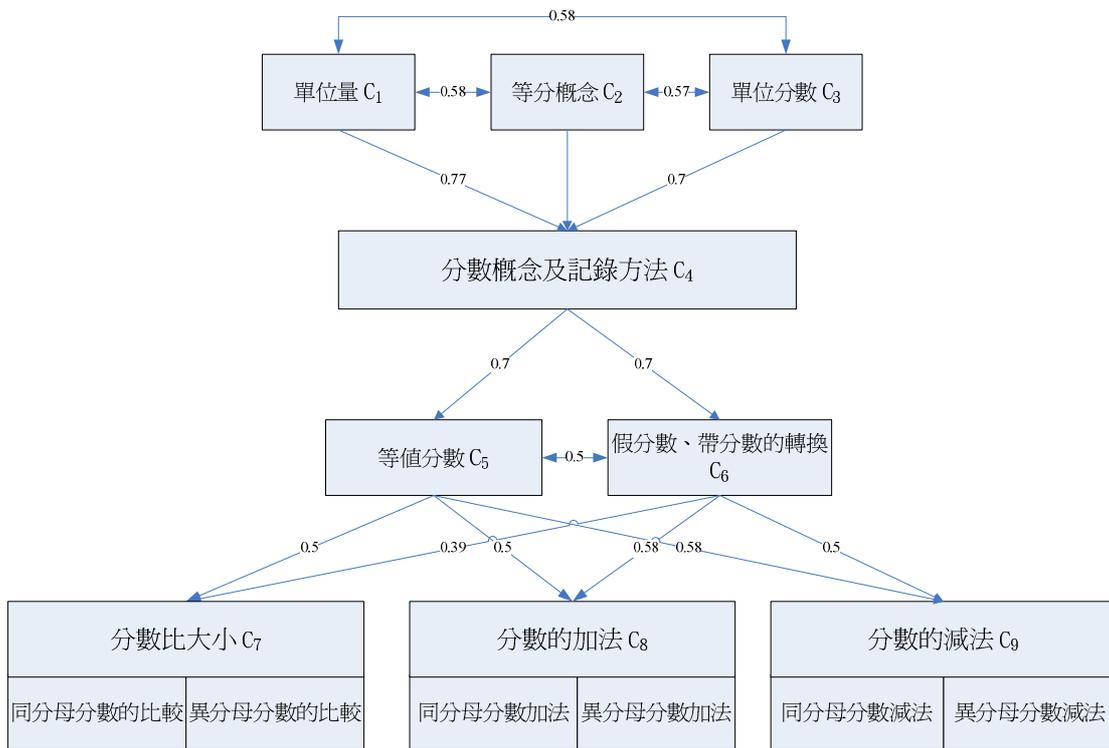


圖4-2 分數加減學習的概念架構圖

資料來源：本研究整理

在建立該領域概念架構圖時發現：

- 一、 錯誤及不完備的學習概念架構圖，不僅會使診斷效能降低，更難以產生正確的診斷結果，因此在進行學習診斷前，對該學習主題的概念分析的前置作業便顯得相當重要。
- 二、 本研究在學習概念架構圖的建立上，採用模糊德菲法彙整

概念關聯訪談結果，客觀地匯整專家想法，使得概念關聯收斂得到一共識結果。

- 三、 現場教學的教育人員對概念關聯的看法，非常有別於專家、學者的看法，但在實務性的教學關鍵點上，具較佳掌握能力，但對該主題學習應具備的概念及概念關聯不是十分清楚。
- 四、 參與整個教材編製與修正的大專院校教授或專家，對該主題概念及概念關聯相當清楚，因此在概念關聯的確認上可委請專家學者做最後的修正，將得到更符合診斷需求的基礎。
- 五、 建立概念架構圖過程，若以訪談方式進行，要經過多次訪談、修正與確認及紀錄才能得到最後的結論，過程相當的繁複，而本研究採用模糊德菲法彙整概念關聯訪談結果，利用模糊函數計算教師、專家的看法，使得學習概念架構圖的建立上可以有效率快速收斂得到一共識結果。

第二節、建立試題測驗工具

一個數學問題的解題完成，需有兩類主要能力的相互配合：一是概念的清楚，二是解題技能的純熟。在學生答題錯誤的表象之下，其原因有許多可能因素；另一方面，學生運用公式或運算規則答對問題，是否就已具備承接下一階段學習的能力，這也是診斷困難之處。許多的研究都針對學生的概念形成方面有深入探討，但是不是主要概念形成了，後續的運用及解決問題便迎刃而解，答案卻是否定的。除了考量概念的完整之外，在解題過程必須的相關演算技能，也應進行診斷了解，以獲取更多有關學習狀況的訊息。

步驟一、依「概念」與「解題技能」之分類，進行教材分析

我國國小課程教材是根據九年一貫數學課程綱要編定設計，因此以該課程綱要之能力指標為範圍，按照「概念」與「解題技能」兩種學習，與本研究形成之概念架構圖進行對照，分析如表 4-3-a、4-3-b 所示：

表 4-3-a 本研究架構與九年一貫數學課程綱要之對應 (概念)

能力指標編碼	能力指標敘述 (概念部份)	與本研究架構中 概念部份 之對應
N-1-05	能在具體情境中，進行分裝與平分的活動。	等分概念
N-2-09	能在具體情境中，初步認識分數。	單位量、等分概念、單位分數、分數概念及記錄方法
N-2-10	能認識真分數、假分數與帶分數，做同分母分數的比較、加減與整數倍計算，並解決生活中的問題。	分數概念及記錄方法、分數的大小比較、分數的加減運算 (備註：「整數倍計算」不在本次實作範圍內，故無對應概念)
N-2-11	能理解分數之「整數相除」的意涵。	(備註：「整數相除」不在本次實作範圍內，故無對應概念)
N-2-12	能認識等值分數，並做簡單的應用。	等值分數
N-2-16	能在數線上標記小數，並透過等值分數，標記簡單的分數。	等值分數
N-3-05	能認識最大公因數、最小公倍數與兩數互質的意義，並用來將分數化成最簡分數。	等值分數
N-3-06	能理解等值分數、約分、擴分的意義。	等值分數
N-3-07	能理解通分的意義，並用來解決異分母分數的比較與加減問題。	等值分數、假分數、帶分數的轉換、分數的大小比較、分數的加減運算
N-3-15	能認識比、比值與正比的意義，並解決生活中的問題。	(備註：「比、比值與正比」不在本次實作範圍內，故無對應概念)

資料來源：本研究整理

表 4-3-b 本研究架構與九年一貫數學課程綱要之對應（解題技能）

能力指標編碼	能力指標敘述（解題技能部分）	與本研究架構中 解題技能部份 之相關能力
N-1-01	能說、讀、聽、寫 1000 以內的數，比較其大小，並做位值單位的換算。	數的認識
N-1-02	能理解加法、減法的意義，解決生活中的問題。	加法、減法
N-1-03	能理解加、減直式計算。	加法、減法
N-1-04	能理解乘法的意義，解決生活中簡單整數倍的問題。	加法、乘法
N-2-03	能熟練整數加、減的直式計算。	加法、減法
N-2-05	能理解乘、除直式計算。	乘法、除法
N-3-01	能熟練整數乘、除的直式計算。	乘法、除法
N-3-03	能理解因數、倍數、公因數與公倍數。	乘法、除法、因數、倍數、公因數、公倍數
N-3-04	能認識質數、合數，並能用短除法做質因數分解。	乘法、除法、因數、倍數
N-3-05	能認識最大公因數、最小公倍數與兩數互質的意義，並用來將分數化成最簡分數。	乘法、除法、公因數、公倍數
N-3-06	能理解等值分數、約分、擴分的意義。	乘法、除法、通分、擴分、約分
N-3-07	能理解通分的意義，並用來解決異分母分數的比較與加減問題。	加法、減法、乘法、除法、通分、擴分、約分

資料來源：本研究整理

步驟二、建立診斷工具

以國小三到五年級所學習之分數概念及分數加減為範圍，進行診斷工具的建立，並根據該題目內容及意涵，以概念架構圖中之概念節點，賦予適當之數值描述（詳見附錄二）。

第三節、建立常見錯誤類型比對工具

步驟一：錯誤類型之文獻探討

本研究針對國內、外分數概念相關研究報告中，將分數加減「概念學習」上常見錯誤類型綜合整理如表 4-4：

表 4-4 分數加減「概念」上常見錯誤類型之文獻整理

類型 編號	錯誤類型描述	研究者
1	形狀不同的圖形較難決定是否等分	呂玉琴 (1993)
2	對於三至五年級學生，分數的學習是困難的，不到 10% 的學生具有分數的基本概念，運算符號的操作無法和具體實物操作連接，大部分的學生並未真正了解分數的意義。	Jecks (1981)
3	大部分三年級學童在處理分數板時，只注意分數板被切成幾塊，而不去注意分割後每一部份是否相等。	Bergeron & Herscovics (1987)
4	學生對單位量的指認有下列錯誤類型： 1. 忽略給定的單位量 2. 受分子控制 3. 受分母控制	Figueras (1989)
5	而在處理部份/全部、子集/集合、比的意義的分數問題或將分數視為是數線上的一點的值，最重要的就是確認單位量。只有在單位量確認之後，才能進一步的理解分數問題	呂玉琴 (1996)
6	在分數比較大小的排序中，分子相同以分母做比較的題目較以分母相同用分子做比較的題目，使學生感到困難。	楊壬孝 (1988)
7	將連續量分成兩份，但兩份不一樣大小；將同樣大小的離散量分成兩份，但兩份個數不一樣多；將不同大小的離散量分成個數相同的兩份，但總量不一樣多。	詹婉華等(2004)
8	學生傾向於自我假設在同一情境中出現的各個分數具有相同的單位量。當資訊量超過學生的處理能力時，學生會配合其處理能力，自行更改單位量，或分解單位量。	林福來、黃敏 晃、呂玉琴 (1996)
9	受整數基模的影響，視分數為兩個獨立的數	洪素敏 (2004)

資料來源：本研究整理

綜合相關研究並加以分類整理，學生在這個主題的學習上，分數概念較容易產生的錯誤情形有：

- 一、 等分的觀念並不完整
- 二、 單位量的辨認不清
- 三、 單位分數概念不清
- 四、 受整數基模的影響
- 五、 部份－全部的區分轉換
- 六、 等值分數概念

本研究針對國內、外分數概念相關研究報告中，將分數「解題技能」上常見錯誤類型綜合整理如表 4-5：

表 4-5 分數加減「解題技能」上常見錯誤類型之文獻整理

類型 編號	錯誤類型描述	研究者
1	分析三、五和七年級的學生所犯的錯誤，並分成六大類： 1. 演算的錯誤。 2. 基本事實的錯誤。 3. 概念的錯誤。 4. 位值的錯誤。 5. 多方面的錯誤。 6. 省略的錯誤	Grady & Hutcherson (1981)
2	1. 帶分數轉譯假分數的錯誤。 2. 整數轉譯為等值分數的錯誤。 3. 通分時轉譯為等值分數的錯誤。 4. 求共同分母的錯誤。 5. 加法程序錯誤。 6. 不會化簡或約分錯誤。	Tatsuoka (1984)
3	1. 將被加數加上加數的分子成為答案的分子。 2. 運算符號的錯誤。 3. 將被加數分別加上加數的分子、分母成為答案的分子、分母。 4. 借位的錯誤。 5. 計算錯誤。 6. 假分數化成帶分數的錯誤。 7. 減數的整數部分用減法計算，真分數部分用加法計算。 8. 乘數的整數部分用乘法，真分數部分用加法。 9. 被乘數、乘數都化成假分數後，分子乘分子，分母則不相乘。 10. 只做真分數部分的乘法，整數部分則不相乘。 11. 假分數化成帶分數的錯誤。 12. 把被除數當成分母，除數當成分子。 13. 商數與除數倒置。	湯錦雲(2002)、洪素敏(2004)
4	Ashlock (1986) 將學生所犯的錯誤分成三大類： 1. 運算的錯誤：使用錯誤的運算符號。 2. 明顯的計算錯誤。 3. 算則的錯誤：步驟及運算次序上的錯誤	引自林彥宏 (2002)

資料來源：本研究整理

綜合上述研究，歸類學生在分數加、減法的運算技巧常犯的錯誤

如下：

- 一、 整數與分數換算
- 二、 整數借位的問題
- 三、 同分母分數的加法運算錯誤
- 四、 異分母分數的加法運算錯誤
- 五、 同分母分數的減法運算錯誤
- 六、 異分母分數的減法運算錯誤
- 七、 帶分數的加法運算錯誤
- 八、 帶分數的減法運算錯誤

步驟二：將常見錯誤類型轉換為屬性分析表

綜合相關研究並加以分類整理，並將這些常見錯誤類型建立屬性分析表如表 4-6：

表 4-6 分數加減常見錯誤類型之屬性分析表

編號	錯誤類型	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉
Err_A_1	整數與分數換算	0	0	0	0	1	1	0	0	0
Err_A_2	整數借位的問題	0	0	0	0	1	1	1	0	0
Err_A_3	同分母分數的加法運算錯誤	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Err_A_4	異分母分數的加法運算錯誤	0	0	0	0	0	1	0	1	0
Err_A_5	同分母分數的減法運算錯誤	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Err_A_6	異分母分數的減法運算錯誤	0	0	0	0	0	1	0	0	1
Err_A_7	帶分數的加法運算錯誤	0	0	0	0	1	1	1	1	0
Err_A_8	帶分數的減法運算錯誤	0	0	0	0	1	1	1	0	1
Err_B_1	等分的觀念並不完整	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Err_B_2	單位量的辨認不清	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Err_B_3	單位分數概念不清	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Err_B_4	受整數基模的影響	1	1	1	0	0	0	0	0	0
Err_B_5	部份—全部的區分轉換	1	1	1	1	0	0	0	0	0
Err_B_6	等值分數概念	0	0	0	0	0	1	0	0	0

編碼 Err_S_No 中，S 代表類別（A 代表運算技巧的錯誤；B 代表學習概念錯誤），No 則為在該類別之錯誤模式編號。

第四節 進行診斷性演算

步驟一：學生作答資料的整理

一、建立試題概念分配表：

試題概念分配表是用來表示出概念在試題中分配的狀況，亦即試題中包含了哪些主題概念以及這些概念是位於試題中的哪個部分(如表 4-7)：

表 4-7 本研究診斷工具之試題概念分配表

概念編號 題目編號	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉
Q_A_1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Q_A_2a	0	0	0	0	1	0	1	0	0
Q_A_2b	0	0	0	1	1	0	1	1	0
Q_A_3a	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Q_A_3b	0	0	0	0	1	0	0	1	0
Q_A_4a	0	0	0	0	0	0	1	0	1
Q_A_4b	0	0	0	0	1	0	1	0	1
Q_A_5a	0	0	0	0	0	1	0	1	0
Q_A_5b	0	0	0	0	1	1	0	1	0
Q_A_6	0	0	0	0	1	1	1	0	1
Q_A_7	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Q_A_8	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Q_B_1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
Q_B_2	1	1	1	1	0	0	0	0	0
Q_B_3	1	1	1	1	0	1	0	1	0
Q_B_4	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Q_B_5	0	0	0	0	0	1	1	0	1
Q_B_6	0	0	0	1	0	1	0	0	0
Q_B_7	0	0	0	0	1	1	1	1	1
Q_B_8	1	1	1	1	0	0	0	0	0
Q_B_9	0	0	1	1	1	0	0	0	0
Q_B_10	1	0	1	1	0	0	0	0	0
Q_B_11	1	0	0	1	0	1	1	0	0
Q_B_12	1	1	1	1	0	0	0	0	0
Q_B_13	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Q_B_14	1	1	1	1	0	0	0	0	0
Q_B_15	1	0	0	1	0	1	1	0	0
Q_B_16	1	1	1	1	0	0	0	0	0
Q_B_17	0	0	0	0	1	1	1	1	1
總計	10	6	8	13	10	14	10	9	6

二、建立概念分布矩陣表（如表 4-8）

表 4-8 本研究診斷工具之概念分布矩陣表

	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉
Q_A_1	0	0	0	0.077	0	0	0	0	0
Q_A_2a	0	0	0	0	0.1	0	0.1	0	0
Q_A_2b	0	0	0	0.077	0.1	0	0.1	0.11	0
Q_A_3a	0	0	0	0	0	0	0	0.11	0
Q_A_3b	0	0	0	0	0.1	0	0	0.11	0
Q_A_4a	0	0	0	0	0	0	0.1	0	0.167
Q_A_4b	0	0	0	0	0.1	0	0.1	0	0.167
Q_A_5a	0	0	0	0	0	0.071	0	0.11	0
Q_A_5b	0	0	0	0	0.1	0.071	0	0.11	0
Q_A_6	0	0	0	0	0.1	0.071	0.1	0	0.167
Q_A_7	0	0	0	0	0	0.071	0	0	0
Q_A_8	0	0	0	0	0	0.071	0	0	0
Q_B_1	0	0	0	0	0.1	0.071	0	0.11	0
Q_B_2	0.1	0.167	0.125	0.077	0	0	0	0	0
Q_B_3	0.1	0.167	0.125	0.077	0	0.071	0	0.11	0
Q_B_4	0	0	0	0	0	0.071	0	0	0
Q_B_5	0	0	0	0	0	0.071	0.1	0	0.167
Q_B_6	0	0	0	0.077	0	0.071	0	0	0
Q_B_7	0	0	0	0	0.1	0.071	0.1	0.11	0.167
Q_B_8	0.1	0.167	0.125	0.077	0	0	0	0	0
Q_B_9	0	0	0.125	0.077	0.1	0	0	0	0
Q_B_10	0.1	0	0.125	0.077	0	0	0	0	0
Q_B_11	0.1	0	0	0.077	0	0.071	0.1	0	0
Q_B_12	0.1	0.167	0.125	0.077	0	0	0	0	0
Q_B_13	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
Q_B_14	0.1	0.167	0.125	0.077	0	0	0	0	0
Q_B_15	0.1	0	0	1	0	0.071	0.1	0	0
Q_B_16	0.1	0.167	0.125	0.077	0	0	0	0	0
Q_B_17	0	0	0	0	0.1	0.071	0.1	0.11	0.167
總計	10	6	8	13	10	14	10	9	6

三、建立學生答題狀況表（如表 4-9）：

表 4-9 學生答題狀況表

	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	S ₇	S ₈
Q_A_1					1			
Q_A_2a		1		1			1	
Q_A_2b	1			1		1		
Q_A_3a		1						
Q_A_3b		1						
Q_A_4a								
Q_A_4b								
Q_A_5a								
Q_A_5b			1					
Q_A_6						1		
Q_A_7	1							
Q_A_8						1		
Q_B_1		1			1	1	1	
Q_B_2								
Q_B_3				1		1	1	
Q_B_4								
Q_B_5				1	1	1		
Q_B_6				1				
Q_B_7				1				1
Q_B_8						1		
Q_B_9	1			1		1		
Q_B_10	1							
Q_B_11		1				1		
Q_B_12			1	1	1		1	
Q_B_13		1		1	1	1		1
Q_B_14	1			1				
Q_B_15		1				1		
Q_B_16	1			1	1		1	
Q_B_17		1						

四、建立學生答題錯誤概念表（如表 4-10-a、4-10-b、4-10-c）

表 4-10-a 本研究實作學生答題錯誤概念統計（整體答題狀況）

	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉
S ₁	0.3	0.334	0.5	0.385	0.2	0.071	0.1	0.11	0
S ₂	0.3	0	0	1.077	0.4	0.284	0.4	0.44	0.167
S ₃	0.1	0.167	0.125	0.077	0.1	0.071	0	0.11	0
S ₄	0.5	0.668	0.625	0.539	0.4	0.284	0.4	0.33	0.334
S ₅	0.3	0.334	0.25	0.231	0.1	0.142	0.1	0.11	0.167
S ₆	0.5	0.334	0.375	1.385	0.4	0.497	0.5	0.33	0.334
S ₇	0.3	0.501	0.375	0.231	0.2	0.142	0.1	0.22	0
S ₈	0.1	0	0	0	0.1	0.071	0.1	0.11	0.167

表 4-10-b 本研究實作學生答題錯誤概念統計 (解題技能)

	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉
S ₁	0	0	0	0.077	0.1	0.071	0.1	0.11	0
S ₂	0	0	0	0	0.2	0	0.1	0.22	0
S ₃	0	0	0	0	0.1	0.071	0	0.11	0
S ₄	0	0	0	0.077	0.2	0	0.2	0.11	0
S ₅	0	0	0	0.077	0	0	0	0	0
S ₆	0	0	0	0.077	0.2	0.142	0.2	0.11	0.167
S ₇	0	0	0	0	0.1	0	0.1	0	0
S ₈	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表 4-10-c 本研究實作學生答題錯誤概念統計（概念學習）

	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉
S ₁	0.3	0.334	0.5	0.308	0.1	0	0	0	0
S ₂	0.3	0	0	1.077	0.2	0.284	0.3	0.22	0.167
S ₃	0.1	0.167	0.125	0.077	0	0	0	0	0
S ₄	0.5	0.668	0.625	0.462	0.2	0.284	0.2	0.22	0.334
S ₅	0.3	0.334	0.25	0.154	0.1	0.142	0.1	0.11	0.167
S ₆	0.5	0.334	0.375	1.308	0.2	0.355	0.3	0.22	0.167
S ₇	0.3	0.501	0.375	0.231	0.1	0.142	0	0.22	0
S ₈	0.1	0	0	0	0.1	0.071	0.1	0.11	0.167

步驟二、錯誤類型的比對

將學習者的「答題錯誤概念表」與「常見錯誤類型屬性分析表」，採灰關聯分析之運算，進行錯誤類型特徵值的比對，進一步掌握學生的學習狀況，深入其學習歷程的問題。

以學習者 S₂ 為例，將其學習狀況進行比對後產生分析結果如下：

(一)S₂的整體作答狀況與錯誤類型比對之關聯度如下：

$$\begin{aligned}r(x_0, x_{10}) &= 0.6538 > r(x_0, x_6) = 0.6518 > \\r(x_0, x_{14}) &= 0.6518 > r(x_0, x_1) = 0.6406 > \\r(x_0, x_5) &= 0.6356 > r(x_0, x_8) = 0.6294 > \\r(x_0, x_2) &= 0.6063 > r(x_0, x_9) = 0.6046 > \\r(x_0, x_{11}) &= 0.6046 > r(x_0, x_3) = 0.5979 > \\r(x_0, x_7) &= 0.5815 > r(x_0, x_{13}) = 0.5695 > \\r(x_0, x_{12}) &= 0.5093 > r(x_0, x_4) = 0.4364\end{aligned}$$

(二)S₂的答題技能錯誤狀況與錯誤類型比對之關聯度如下：

$$\begin{aligned}r(x_0, x_5) &= 0.8417 > r(x_0, x_{10}) = 0.8417 > \\r(x_0, x_6) &= 0.8417 > r(x_0, x_9) = 0.8417 > \\r(x_0, x_{14}) &= 0.8417 > r(x_0, x_{11}) = 0.8417 > \\r(x_0, x_3) &= 0.8080 > r(x_0, x_1) = 0.8051 > \\r(x_0, x_8) &= 0.7522 > r(x_0, x_{12}) = 0.6936 > \\r(x_0, x_2) &= 0.6781 > r(x_0, x_7) = 0.6443 > \\r(x_0, x_{13}) &= 0.6195 > r(x_0, x_4) = 0.5117\end{aligned}$$

(三)S₂的答題概念錯誤狀況與錯誤類型比對之關聯度如下：

$$\begin{aligned}r(x_0, x_{10}) &= 0.6964 > r(x_0, x_6) = 0.6944 > \\r(x_0, x_{14}) &= 0.6944 > r(x_0, x_5) = 0.6783 > \\r(x_0, x_1) &= 0.6581 > r(x_0, x_{11}) = 0.6472 > \\r(x_0, x_9) &= 0.6472 > r(x_0, x_8) = 0.6350 > \\r(x_0, x_3) &= 0.6137 > r(x_0, x_{13}) = 0.6121 > \\r(x_0, x_2) &= 0.6120 > r(x_0, x_7) = 0.5603 > \\r(x_0, x_{12}) &= 0.5519 > r(x_0, x_4) = 0.4522\end{aligned}$$

第五章 方法評估

本研究旨在建立一適用於學校班級教學之電腦輔助學習診斷方法，在知識結構基礎下，配合一般形成性或總結性目的之試題，期望達成診斷性評量之功效。藉由技能性題型與概念性題型之施測，進行學習者學習狀況之訊息整合，配合常見錯誤類型的比對，進行兩階段的演算比較。

本章旨在呈現分析結果，根據本研究目的，進行二項分析說明。第一節以學生測驗診斷結果與詢問訪談記錄進行比較，嘗試了解本診斷方法之估算成效。第二節比較受試者「解題技能」與「概念學習」兩類題目之診斷表現並加以說明。

第一節 本方法之診斷成效

以學習者 S_2 為例：

S_2 的**整體作答狀況**診斷結果如下：

單位量的辨認不清 > 異分母分數的減法運算錯誤 > 等值分數概念 > 整數與分數換算 > 同分母分數的減法運算錯誤 > 帶分數的減法運算錯誤 > 整數借位的問題 > 等分的觀念並不完整 > 單位分數概念不清 > 同分母分數的加法運算錯誤 > 帶分數的加法運算錯誤 > 部份—全部的區分轉換 > 受整數基模的影響 > 異分母分數的加法運算錯誤

在學習者 S_2 的診斷結果指出，「單位量的辨認不清」、「異分母分數的減法運算錯誤」、「整數與分數換算」等三錯誤模式，為關聯度較大之錯誤模式。經深入分析學習者之作答算式，並進行訪談以了解作答者思考過程後，將診斷結果與作答錯誤原因相互對照後，說明如表 5-1：

表 5-1 診斷結果與作答錯誤原因對照表

灰關聯 排序	診斷 結果	作答錯 誤題號	作答錯誤分析
1	單位量的辨認 不清	Q_B_1	圖形等分成四份後，將四份加上整個圖形（ $4+1=5$ ），當作單位量
		Q_B_11	圈出四個彈珠當作單位量，再從其中圈出一個當分子（學習者自訴其算式）
		Q_B_12	認定整個為單位量，無法將左邊圖形切割獨立視為單位量
		Q_B_13	學生答題說明：因為 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ （缺乏分屬不同單位量之概念）
		Q_B_15	僅以數字比大小，未加入單位量觀念
2	異分母分數的 減法運算錯誤	Q_B_17	未完成兩階段問項
3	等值分數概念		
4	整數與分數換 算	Q_A_2a	$1\frac{13}{20}$ 中，換算為分數時，忽略分母為 20，誤將整數 1 轉換為分母量 10， $1\frac{13}{20}$ 化為 $\frac{23}{20}$
5	同分母分數的 減法運算錯誤		
6	帶分數的減法 運算錯誤		
7	整數借位的問 題		
8	等分的觀念並 不完整		
9	單位分數概念 不清		
10	同分母分數的 加法運算錯誤	Q_A_3a	將「同分母分數的加法」誤算為「同分母分數的減法」
11	帶分數的加法 運算錯誤		
12	部份—全部的 區分轉換		
13	受整數基模的 影響		
14	異分母分數的 加法運算錯誤		

說明：

- 一、 試卷中有五題(Q_B_1、Q_B_11、Q_B_12、Q_B_13、Q_B_15)，答題錯誤原因與該學習者「單位量的辨認不清」的錯誤類型符合。
- 二、 試卷中有一題(Q_B_7)，答題錯誤原因與該學習者「異分母分數的減法運算錯誤」的錯誤類型符合。
- 三、 試卷中有一題(Q_A_2a)，答題錯誤原因與該學習者「整數與分數換算」的錯誤類型符合。
- 四、 診斷錯誤類型排序為3的「等值分數概念」，雖未在答題反應中得到直接對應，但因該錯誤類型在異分母比較大小或加減時使用之「通分」技巧有關，也與整數、分數換算技巧有關，所以推論該錯誤類型為學習者S2可能之錯誤類型，需列為教學者後續觀察、診斷之目標。
- 五、 診斷錯誤類型排序為10的「同分母分數的加法運算錯誤」，雖然有直接對應證據(Q_A_3a)，但在本試卷中，包含分數加法概念之試題共有9題(Q_A_2b、Q_A_3a、Q_A_3b、Q_A_5a、Q_A_5b、Q_B_1、Q_B_3、Q_B_7、Q_B_17)，答對題數為6題，答錯題數為3題，比例佔 $\frac{1}{3}$ ，所以其關聯排序屬於中段。

第二節「解題技能」與「概念學習」兩階段診斷之結果

學生學習過程中，常因為計算技巧不斷的操練，相關題型反覆練習而建立答題模式，答題正確並不一定代表學習者擁有清楚概念。將學生在「解題技能」與「概念學習」兩類別之作答情況進行分析，讓學生的學習訊息得到更完整之呈現，俾利教學者進行更完備之判斷。

整理診斷數據（如表 5-2），將各學習者排序前五項錯誤類型，依「解題技能」與「學習概念」分類列出，再將這兩類中的項目進行比對。如果在兩類中均出現則列為「一致項目」，未在另一類別出現的項目則列為「不一致項目」，經由這樣的比對，了解學生在「解題技能」與「學習概念」學習上，是否有一致性，藉此增加了解學生學習狀況的廣度。

表 5-2 「解題技能」與「概念學習」診斷對照表

	解題技能	概念學習	一致項目	一致項數	不一致項目	其他項數
S1	等值分數概念>異分母分數的減法運算錯誤>單位量的辨認不清>同分母分數的減法運算錯誤>等分的觀念並不完整	單位分數概念不清>等分的觀念並不完整>單位量的辨認不清>受整數基模的影響>部份—全部的區分轉換>	單位量的辨認不清	1	等值分數概念、異分母分數的減法運算錯誤、同分母分數的減法運算錯誤、等分的觀念並不完整、單位分數概念不清、等分的觀念並不完整、受整數基模的影響、部份—全部的區分轉換	8
S2	同分母分數的減法運算錯誤>單位量的辨認不清>異分母分數的減法運算錯誤>等分的觀念並不完整>等值分數概念	單位量的辨認不清>異分母分數的減法運算錯誤>等值分數概念>同分母分數的減法運算錯誤>整數與分數換算	同分母分數的減法運算錯誤、單位量的辨認不清、異分母分數的減法運算錯誤、等值分數概念	4	等分的觀念並不完整、整數與分數換算	2
S3	等值分數概念>異分母分數的減法運算錯誤>單位量的辨認不清>同分母分數的減法運算錯誤>等分的觀念並不完整	等分的觀念並不完整>單位分數概念不清>單位量的辨認不清>同分母分數的減法運算錯誤>等值分數概念	等值分數概念、單位量的辨認不清、同分母分數的減法運算錯誤、等分的觀念並不完整	4	異分母分數的減法運算錯誤、單位分數概念不清	2
S4	同分母分數的減法運算錯誤>單位分數概念不清>異分母分數的減法運算錯誤>等分的觀念並不完整>單位量的辨認不清	受整數基模的影響>部份—全部的區分轉換>等分的觀念並不完整>單位分數概念不清>單位量的辨認不清	單位分數概念不清、等分的觀念並不完整、單位量的辨認不清	3	異分母分數的減法運算錯誤、受整數基模的影響、同分母分數的減法運算錯誤、部份—全部的區分轉換	4

表 5-2 「解題技能」與「概念學習」診斷對照表（續）

S5	單位分數概念不清>異分母分數的減法運算錯誤>同分母分數的減法運算錯誤>等分的觀念並不完整>等值分數概念	等分的觀念並不完整>單位量的辨認不清>單位分數概念不清>同分母分數的減法運算錯誤>等值分數概念	單位分數概念不清、同分母分數的減法運算錯誤、等分的觀念並不完整、等值分數概念	4	異分母分數的減法運算錯誤、單位量的辨認不清	2
S6	同分母分數的減法運算錯誤>等值分數概念>異分母分數的減法運算錯誤>等分的觀念並不完整>單位量的辨認不清	部份—全部的區分轉換>單位量的辨認不清>單位分數概念不清>異分母分數的減法運算錯誤>等值分數概念	等值分數概念、異分母分數的減法運算錯誤、單位量的辨認不清	3	同分母分數的減法運算錯誤、等分的觀念並不完整、部份—全部的區分轉換、單位分數概念不清	4
S7	同分母分數的減法運算錯誤>單位量的辨認不清>異分母分數的減法運算錯誤>等分的觀念並不完整>等值分數概念	等分的觀念並不完整>單位分數概念不清>單位量的辨認不清>同分母分數的加法運算錯誤>受整數基模的影響	單位量的辨認不清、等分的觀念並不完整	2	同分母分數的減法運算錯誤、異分母分數的減法運算錯誤、等值分數概念、單位分數概念不清、同分母分數的加法運算錯誤、受整數基模的影響	6
S8	單位分數概念不清>異分母分數的減法運算錯誤>同分母分數的減法運算錯誤>等分的觀念並不完整>等值分數概念	同分母分數的減法運算錯誤>單位量的辨認不清>等值分數概念>異分母分數的減法運算錯誤>等分的觀念並不完整	異分母分數的減法運算錯誤、同分母分數的減法運算錯誤、等分的觀念並不完整、等值分數概念	4	單位分數概念不清、單位量的辨認不清	2

說明：

- 一、學習者 S₂、S₃、S₅ 與 S₈ 在兩類別的診斷對照中，呈現錯誤類型歧異度較低，推測四位學習者在該學習主題的「解題技能」與「概念學習」兩方面的錯誤類型較一致。
- 二、學習者 S₁ 與 S₇ 在兩類別的診斷對照中，呈現錯誤類型

歧異度較高，推測兩位學習者在該學習主題的「解題技能」與「概念學習」兩方面的錯誤類型並不一致，在後續補救引導的範圍及路徑，教學者都須將其納入考量。



第六章 結論及未來工作

一般的測驗著重於以總分來評定受試者的學習狀況，這樣的評量方式很難對受試者的整體學習狀況達到通盤瞭解。如何藉由知識結構的基礎，配合受試者的量化施測資料結果或質性晤談紀錄，呈現出受試者真實、客觀的知識學習狀況，是許多研究者所關心的議題。本研究綜合診斷與分析結果，提出了一個基於知識概念結構，結合灰系統中探求關聯度的方法，提供個別學習診斷報告書，讓學生能夠了解自己的學習狀況，更有利教師根據學生的診斷情形，對於未精熟或漏失的概念進行觀念的建立，更可針對迷思的概念進行轉構教學。本章將針對本研究之成果作一整體性說明，最後提出未來研究方向的建議，以提供後續研究者參考。

第一節 研究結論

目前本研究做出之研究成果如下：

- 一、 將學生答題狀況，根據解題技能、概念學習進行分類比對。可以由診斷數據中實證學生在學習歷程中，其解題技能與對該學習主題的概念了解與否，並非一定相關。一個學生能解答問題，並不一定在概念上是完整的。
- 二、 試題的概念分布和錯誤類型的推論有很大的關係，如果依循學習路徑結構，將錯誤類型與診斷概念平均分散在各題，將能收取更多訊息以供比對。相反地，學生受測題數少、受測概念訊息不足，診斷分類狀況也較不佳。
- 三、 藉由本方法的診斷，呈現出學生實際的答題行為之客觀結果。並據此提供受測學生應加強的概念節點順序建議，以及錯誤類型參考。

- 四、 透過本測驗方法的診斷，可在一般教學條件之下，採用形成性或總結性評量之試題，配合知識結構理論之診斷分析，對班級之施測結果進行判斷追蹤。
- 五、 透過學習診斷報告，可以將該主題中主要學習概念列出，並在合理學習路徑之基礎上，有根據地進行學生錯誤概念之瞭解，讓教師針對學生的迷思概念進行補救，達到事半功倍之效能。

第二節 研究建議

本研究在測驗診斷上提供新的方法，但本研究也有幾項困難點，有待對本研究有興趣之研究者繼續努力研究及改進，未來研究方向建議參考如下：

- 一、 概念結構圖的建立，對後續判斷學生的錯誤類型和補救，有很大的關係。因此，在形成概念結構圖時，應力求周延，除了課堂教師的現場經驗外，學科專家的思考參與，能在實務與理論間整合出更貼近現實的結構。
- 二、 本研究在概念結構圖的建立上，採取問卷填寫方式收集學習概念的關聯性，對於受訪者作答上略顯繁雜。未來可嘗試採用線上問卷方式，將概念節點以圖表形式呈現，關聯性之給定資料，也可使用程式自動計算並形成概念關聯圖。
- 三、 本研究所使用的「概念認知程度模糊尺度」是依照一般常理範圍合理使用，尺度裡各認知程度範圍的制定以及問卷中語意值需再研究，亦可再研究使用其他尺度做分隔。
- 四、 本研究採用之「錯誤比對類型」是根據文獻資料轉化而來，若能在足夠測驗樣本建立後，由資料庫萃取具代表性之實證錯誤模型，進一步深究該學習困難模式之狀況與補救。

五、 藉由灰關聯之運算，可以綜合性了解學習者之概念形成狀況。但灰關聯度的數值僅能作為兩兩數據間的比較結果，代表數列資料間的關係性，不適合作為判斷其重要性的門檻值。

參 考 文 獻

一、中文部份

1. 何榮桂 (1997)。網路環境題庫與測驗之整合系統。八十六年度電腦輔助學習及遠距教學專題研究計畫成果討論會摘要，44-162。
2. 吳佩玲、江金山、蔣祥第、張廷政、詹福賜、張軒庭、溫坤禮 (1998)。灰色理論入門。台北：高立。
3. 吳政達 (1999)。國民小學教師評鑑指標體系建構之研究-模糊德菲術、模糊層級分析法與模糊綜合評估法之應用。未出版博士論文，國立政治大學，台北市。
4. 吳漢雄、鄧聚龍、溫坤禮 (1996)。灰色分析入門。台北：高立。
5. 呂玉琴 (1993)。影響分數二分之一概念的因素。國民教育，33(5, 6), 2-11。
6. 呂玉琴 (1996)。國小教師的分數知識。臺北師院學報，9，427-460。
7. 林彥宏 (2002)。國小五年級學童分數概念的補救與診斷。未出版碩士論文，國立台南師範學院，台南市。
8. 林福來、黃敏晃、呂玉琴 (1996)。分數啟蒙的學習與教學之發展性研究。科學教育學刊，4(2)，161-169。
9. 邱垂昌、陳瑞斌(2000)。應用概念構圖於會計教學與評量之研究。政大學報，81，37-66。
10. 姜善鑫 (1998)。地理科迷思概念探討。國立台灣大學教務處教育學程中心主編，國民中學學生概念學習學術研討會論文彙編 (頁109)。台中，東勢林場。
11. 洪世聰 (2005)。九年一貫能力指標網路題庫評量系統—以國小五年級數學科為例。未出版碩士論文，國立台中師範學院，台中市。
12. 洪素敏 (2004)。國小五年級學童分數迷思概念補救教學之研究。未出版碩士論文，國立嘉義大學，嘉義縣。
13. 時德平 (2001)。概念構圖教學策略與食譜式教學法對國小五年級學童電與磁概念學習之比較性研究。未出版碩士論文，國立台北師範學院，台北市。
14. 翁慶昌，陳嘉懌，賴宏仁 (2001)。灰色系統基本方法及其應用。台北：高立。
15. 翁錦瑛 (2002)。數學概念構圖教學與診斷效益。未出版碩士論文，台南師範學院，台南市。

16. 高紹源 (1996)。閱讀高中化學教科書對高一學生所具有之迷思概念影響之研究--勒沙特列原理。未出版碩士論文，國立高雄師範大學，高雄市。
17. 張紹勳 (1998)。電腦網路遠距教學實施現況之問題研究。載於中華民國電腦輔助教學學會主辦，第七屆國際電腦輔助教學研討會論文集 (頁 573-580)。高雄：國立高雄師範大學。
18. 許慶昇、杜淑芬、黃國禎 (1998)。概念繼承關係在網路智慧型學習診斷系統之應用。載於中華民國電腦輔助教學學會主辦，第七屆國際電腦輔助教學研討會論文集 (頁 602-609)。高雄：國立高雄師範大學。
19. 郭生玉 (2004)。教育測驗與評量。台北：精華。
20. 陳嘉甄 (2001)。系統結構圖與概念構圖的教學策略對國小學生科學學習成效之研究。未出版碩士論文，國立政治大學，台北市。
21. 湯錦雲 (2002)。國小五年級學童分數概念與運算錯誤類型之研究。未出版碩士論文，國立屏東師範學院，屏東縣。
22. 黃良志、謝松益、張炳騰 (2001)。三種模糊德菲法之比較--以銀行員甄選因素之評估為例。「工業工程學刊」，18 (1)，74-86。
23. 黃偉政 (2005)。九年一貫課程之能力指標評量診斷的網路系統-以國小五年級數學為例。未出版碩士論文，國立台中師範學院碩士論文，台中市。
24. 黃達三 (2006)。概念圖在科學教學上的應用。研習資訊，23 (4)，83-84。
25. 甯自強 (1998)。涂景翰的數概念。科學教育學刊，6(3)，255-269。
26. 楊壬孝 (1989)。國中小學生分數概念的發展。國科會專題研究計畫報告。(編號：NSC78-0111-S-003-06A)
27. 詹婉華、呂玉琴 (2004)。國小高年級學童分數概念量表之設計研究。科學教育學刊，12(2)，241-263。
28. 謝青龍 (1995)。從「迷思概念」到「另有架構」的概念改變。師大科學教育，180，23-29。
29. 溫坤禮、黃宜豐、張偉哲、張廷政、游美利、賴家瑞 (2003)。灰關聯模型方法與應用。台北：高立。

二、西文部份

1. Ausubel, D.P. (1963) . *The Psychology of Meaningful Verbal Learning*. New York : Grune & Stratton.
2. Bergeron, J. C., & Herscovics, H. (1987). Unit fraction of a continuous whole. *The 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Montreal, Canada.
3. Bruner, J.S. (1960). *The process of education*. New York: Vintage Books.
4. Clark, C. M., & Peterson, P. L. (1986) . Teachers' thought processes, In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching*. New York: McMillan.
5. Figueras , O. (1989) . *Two different Views of fractions : Fractionating and Operating*. The 13th International Conference for the psychology of Mathmatics Education.
6. Glaser, R. (1962). Psychology and instructional techonology. In R. Glaser(Ed.). *Training research and education*. Pittsburgh: University of Pittsburgh.
7. Grady, M.T. & Hutcherson, L.R. (1981) .Error analysis : An item abalystic investigation of diagostic tests. *Research reports from the fourth and fifth national conference and prescriptive mathematics*. 1980 research monograph. Revised third edition, 129-138.
8. Head, J. (1986) . Research into " Alternative Frameworks " : Promise and Problems. *Research in Technological Education*, 4 (2) , 203-211.
9. Ishikawa, A., M. Amagasa, T. Shiga, G. Tomizawa, R. Tatsuta and H. Mieno, (1993). The Max-Min Delphi method and fuzzy Delphi method via fuzzy integration. *Fuzzy Sets and Systems*, 55, 241-253.
10. Jecks P. (1981) .Conceptual issues in the teaching and learning of fractions. *Journal Research of Mathematics Education* , 339-348
11. Kathlen, T. T. (1986). *Error reduction strategies for whole number operations in grade four*. Doctoral Dissertation, University of Brigham Young.

12. Mitchell, D. L., & Hunt, D. (1997). Multimedia lesson plans—help for pre-service teachers. *Journal of Physical Education, Recreation & Dance*, 17-20.
13. Nichols, P. D. (1994). A framework for developing cognitively diagnostic assessments. *Review of Educational Research*, 64(4), 575-603.
14. Novak, J. D. (1995). Concept mapping : A strategy for organizing knowledge. In Shawn M. Glynn & Reinders Duit (Eds.). *Learning science in schools : Research reforming practice*. New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates.
15. Novak, J. D., & Gowin, D. B. (1984) . *Learning How to Learn*. Cambridge, London : Cambridge University Press.
16. Novak, J.D. (1998). *The Pursuit of a Dream: Education Can Be Improved. Teaching Science for Understanding: A Human Constructivist View*. San Diego : Academic Press.
17. Piaget, J., & Inhelder, B. (1969) . *The psychology of the child*. London : Routledge & Kegan Paul.
18. Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The Child' s Concept of Geometry*. New York : Basic Book.
19. Robbins, S.P. (1991) . Management (3rd ed.), *Englewood Cliffs*. New Jersey: Prentice Hall.
20. Snow, R. E., & Lohman, D. F. (1989) . Implications of cognitive psychology for educational measurement. In R. L. Linn (Ed.), *Educational measurement* (3rd ed). New York: Macmillan.
21. Stefanich, G.P. & Rokusek, T.(1992). Analysis of computational error in the use of division algorithms by fourth-grade students. *School Science and Mathematics*, 92(4), 201-205.
22. Tatsuoka, K. K. (1984) . *Analysis of Error in Fraction Addition and Subtraction Problems*. Final report MD: Illinois Univ., Urban. Computer-Based Education Research Lab. (ERIC Document Reproduction Service. NO.ED 257 665) .
23. Turns, J., Atman, C.J., Adams, R. (2000). Concept maps for engineering education: a cognitively motivated tool supporting varied assessment functions. *Education, IEEE Transactions on*, 43 (2) , 164 - 173.
24. Vance, J. H. (1992). Understanding equivalence: A number by any other name. *School Science and Mathematics*, 92, 263-266.

25. VanLehn, K. (1983). On the representation of procedures in repair theory. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press.
26. VanLehn, K. (1990). *Mind bug: the origins of procedural misconceptions*. MA: MIT Press.
27. Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and Language*. Cambridge, MA: MIT Press.
28. Wandersee, J. H. (1990). Concept mapping and the cartography of cognition. *Journal of Research in Science Teaching*, Vol.27(10), 923-936.
29. Willerman, M. & Mac Harg, R. A. (1991). The concept map as advance organizer. *Journal of Research in Science Teaching*, 28(8), 705-711.

附 錄 一

國小三至五年級學習「分數加減」單元概念關聯訪談表

老師您好：

感謝您在百忙之中協助填寫問卷，這是一份碩士論文研究「以知識概念架構為基之學習診斷方法」，素仰 台端教學經驗豐富，本研究亟需您的協助與指導，請您惠賜卓見。

本研究主要是針對國小三至五年級數學「分數加減」單元的課程，將其中主要學習歷程及主要概念，以及每個概念的主要能力列出，希望藉由此份問卷取得教育專家對於該單元中學習路徑與子概念之建立順序，其重要程度為何？以其產生該主題之專家知識結構圖，使第二階段教學實驗得以進行，敬請惠賜指正。

敬祝 教安

私立南華大學資訊管理研究所

指導教授： 王昌斌 博士

研究生： 張英燦 敬上

下面表格是「國小分數概念關聯訪談表」，本調查表分成兩部份：(一)概念的上下位關係(二)概念相關程度。

(一)「學習時的上位概念」選項的作答：

1.若您認為兩個觀念之間，在學習順序上有先後次序的必要性，請將您認為屬於先備觀念的概念勾選起來【例如：加法 乘法】

2.若您認為兩概念之間無直接上下位關係，請勾選【兩概念無上下位關係】：

(二)概念相關程度選項的作答：

您認為兩概念之間的相關程度為何？請在「」中，勾選一個您認定適合的程度(請單選)。：

概念	關聯概念	學習時的上位概念	概念相關程度
單位量 (C1)	等分概念(C2)	<input type="checkbox"/> 單位量(C1) <input type="checkbox"/> 等分概念(C2) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	單位分數(C3)	<input type="checkbox"/> 單位量(C1) <input type="checkbox"/> 單位分數(C3) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數概念及記錄方法(C4)	<input type="checkbox"/> 單位量(C1) <input type="checkbox"/> 分數概念及記錄方法(C4) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>

	等值分數(C5)	<input type="checkbox"/> 單位量(C1) <input type="checkbox"/> 等值分數(C5) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	假分數、帶分數的轉換(C6)	<input type="checkbox"/> 單位量(C1) <input type="checkbox"/> 假分數、帶分數的轉換(C6) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數的大小比較(C7)	<input type="checkbox"/> 單位量(C1) <input type="checkbox"/> 分數的大小比較(C7) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數的加法運算(C8)	<input type="checkbox"/> 單位量(C1) <input type="checkbox"/> 分數的加法運算(C8) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數的減法運算(C9)	<input type="checkbox"/> 單位量(C1) <input type="checkbox"/> 分數的減法運算(C9) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
等分概念(C2)	單位分數(C3)	<input type="checkbox"/> 等分概念(C2) <input type="checkbox"/> 單位分數(C3) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數概念及記錄方法(C4)	<input type="checkbox"/> 等分概念(C2) <input type="checkbox"/> 分數概念及記錄方法(C4) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	等值分數(C5)	<input type="checkbox"/> 等分概念(C2) <input type="checkbox"/> 等值分數(C5) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	假分數、帶分數的轉換(C6)	<input type="checkbox"/> 等分概念(C2) <input type="checkbox"/> 假分數、帶分數的轉換(C6) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數的大小比較(C7)	<input type="checkbox"/> 等分概念(C2) <input type="checkbox"/> 分數的大小比較(C7) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數的加法運算(C8)	<input type="checkbox"/> 等分概念(C2) <input type="checkbox"/> 分數的加法運算(C8) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>

	分數的減法運算(C9)	<input type="checkbox"/> 等分概念(C2) <input type="checkbox"/> 分數的減法運算(C9) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
單位分數(C3)	分數概念及記錄方法(C4)	<input type="checkbox"/> 單位分數(C3) <input type="checkbox"/> 分數概念及記錄方法(C4) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	等值分數(C5)	<input type="checkbox"/> 單位分數(C3) <input type="checkbox"/> 等值分數(C5) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	假分數、帶分數的轉換(C6)	<input type="checkbox"/> 單位分數(C3) <input type="checkbox"/> 假分數、帶分數的轉換(C6) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數的大小比較(C7)	<input type="checkbox"/> 單位分數(C3) <input type="checkbox"/> 分數的大小比較(C7) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數的加法運算(C8)	<input type="checkbox"/> 單位分數(C3) <input type="checkbox"/> 分數的加法運算(C8) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數的減法運算(C9)	<input type="checkbox"/> 單位分數(C3) <input type="checkbox"/> 分數的減法運算(C9) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數概念及記錄方法(C4)	<input type="checkbox"/> 分數概念及記錄方法(C4) <input type="checkbox"/> 等值分數(C5) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
分數概念及記錄方法(C4)	假分數、帶分數的轉換(C6)	<input type="checkbox"/> 分數概念及記錄方法(C4) <input type="checkbox"/> 假分數、帶分數的轉換(C6) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數的大小比較(C7)	<input type="checkbox"/> 分數概念及記錄方法(C4) <input type="checkbox"/> 分數的大小比較(C7) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數的加法運算(C8)	<input type="checkbox"/> 分數概念及記錄方法(C4) <input type="checkbox"/> 分數的加法運算(C8) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數的減法運算(C9)	<input type="checkbox"/> 分數概念及記錄方法(C4) <input type="checkbox"/> 分數的減法運算(C9) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>

	分數的減法運算(C9)	<input type="checkbox"/> 分數概念及記錄方法(C4) <input type="checkbox"/> 分數的減法運算(C9) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
等值分數(C5)	假分數、帶分數的轉換(C6)	<input type="checkbox"/> 等值分數(C5) <input type="checkbox"/> 假分數、帶分數的轉換(C6) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數的大小比較(C7)	<input type="checkbox"/> 等值分數(C5) <input type="checkbox"/> 分數的大小比較(C7) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數的加法運算(C8)	<input type="checkbox"/> 等值分數(C5) <input type="checkbox"/> 分數的加法運算(C8) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數的減法運算(C9)	<input type="checkbox"/> 等值分數(C5) <input type="checkbox"/> 分數的減法運算(C9) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
假分數、帶分數的轉換(C6)	分數的大小比較(C7)	<input type="checkbox"/> 假分數、帶分數的轉換(C6) <input type="checkbox"/> 分數的大小比較(C7) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數的加法運算(C8)	<input type="checkbox"/> 假分數、帶分數的轉換(C6) <input type="checkbox"/> 分數的加法運算(C8) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數的減法運算(C9)	<input type="checkbox"/> 假分數、帶分數的轉換(C6) <input type="checkbox"/> 分數的減法運算(C9) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
分數的大小比較(C7)	分數的加法運算(C8)	<input type="checkbox"/> 分數的大小比較(C7) <input type="checkbox"/> 分數的加法運算(C8) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
	分數的減法運算(C9)	<input type="checkbox"/> 分數的大小比較(C7) <input type="checkbox"/> 分數的減法運算(C9) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>
分數的加法運算(C8)	分數的減法運算(C9)	<input type="checkbox"/> 分數的加法運算(C8) <input type="checkbox"/> 分數的減法運算(C9) <input type="checkbox"/> 兩概念無上下位關係	非常相關 <input type="checkbox"/> 大致相關 <input type="checkbox"/> 有點相關 <input type="checkbox"/> 不相關 <input type="checkbox"/> 非常不相關 <input type="checkbox"/>

謝謝您的耐心指教!!

附 錄 二

國小三至五年級學習「分數加減」單元診斷工具

Q_A_1：下面是真分數的打√，假分數畫△，帶分數畫○：

(1) () $\frac{6}{8}$ (2) () $\frac{13}{10}$

(3) () $5\frac{1}{2}$ (4) () $\frac{7}{2}$

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
0	0	0	1	0	0	0	0	0

Q_A_2a：比比看，在 () 裡填入 >、< 或 =：

(1) $\frac{19}{53}$ () $\frac{39}{53}$ (2) $\frac{14}{15}$ () $\frac{15}{14}$

(3) $\frac{32}{20}$ () $1\frac{13}{20}$

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
0	0	0	0	1	0	1	0	0

Q_A_2b：比比看，在 () 裡填入 >、< 或 =：

(4) $10 + \frac{13}{30}$ () $9 + \frac{43}{30}$

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
0	0	0	1	1	0	1	1	0

Q_A_3a：同分母分數加法計算

(1) $\frac{25}{39} + \frac{11}{39} =$ (3) $\frac{5}{8} + \frac{2}{8} =$								
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
0	0	0	0	0	0	0	1	0
Q_A_3b：同分母分數加法計算								
(2) $1\frac{11}{16} + \frac{9}{16} =$ (4) $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} =$								
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
0	0	0	0	1	0	0	1	0
Q_A_4a：同分母分數減法計算								
(2) $\frac{11}{7} - \frac{6}{7} =$ (3) $\frac{7}{11} - \frac{3}{11} =$								
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
0	0	0	0	0	0	1	0	1
Q_A_4b：同分母分數減法計算								
(1) $2\frac{4}{7} - \frac{5}{7} =$ (4) $7\frac{1}{65} - 4\frac{15}{65} =$								
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
0	0	0	0	1	0	1	0	1
Q_A_5a：異分母分數加法計算								

$$(1) \frac{1}{2} + \frac{1}{6} =$$

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
----	----	----	----	----	----	----	----	----

0	0	0	0	0	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Q_A_5b : 異分母分數加法計算

$$(2) \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \qquad (3) 5\frac{1}{2} + 3\frac{5}{8} =$$

$$(4) 2 + \frac{9}{7} =$$

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
----	----	----	----	----	----	----	----	----

0	0	0	0	1	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Q_A_6 : 異分母分數減法計算

$$(1) 2\frac{1}{7} - \frac{1}{2} = \qquad (2) 2 - \frac{3}{8} =$$

$$(3) 2\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2} = \qquad (4) 3 - 1\frac{1}{3} =$$

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
----	----	----	----	----	----	----	----	----

0	0	0	0	1	1	1	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Q_A_7 : 寫出等值分數

$$(1) \frac{36}{36} = \frac{(\quad)}{23} = \frac{(\quad)}{57} = 1$$

$$(2) \frac{3}{5} = \frac{6}{(\quad)} = \frac{(\quad)}{35} = \frac{36}{(\quad)}$$

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
0	0	0	0	0	1	0	0	0

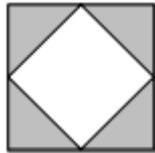
Q_A_8：填填看

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \times (\quad)}{8 \times (\quad)} = \frac{35}{(\quad)}, \text{此過程叫作 } (\quad)。$$

$$\frac{25}{75} = \frac{25 \div (\quad)}{75 \div (\quad)} = \frac{(\quad)}{3}, \text{此過程叫作 } (\quad)。$$

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
0	0	0	0	0	1	0	0	0

Q_B_1：一塊土司(如下圖)，灰色部份是塗上花生醬，有()



塊的土司塗上花生醬？

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
1	1	1	1	0	0	0	0	0

Q_B_2：

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{(\quad)}{(\quad)} - \frac{(\quad)}{(\quad)} = \frac{(\quad)}{(\quad)}$$

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
----	----	----	----	----	----	----	----	----

1	1	1	1	0	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Q_B_3 :

$\frac{4}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{77}$	$\frac{6}{21}$
$\frac{16}{28}$	$\frac{20}{35}$	$\frac{26}{91}$	$\frac{8}{28}$	$\frac{14}{42}$
$\frac{24}{42}$	$\frac{20}{70}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{35}$	$\frac{10}{35}$

把和 $\frac{2}{7}$ 一樣大的數圈起來

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
0	0	0	0	0	1	0	0	0

Q_B_4 :

媽媽買了 1 個披薩，昨天吃了 $\frac{1}{3}$ 個，今天吃了 $\frac{2}{7}$ 個，還剩下()
個？

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
0	0	0	0	0	1	1	0	1

Q_B_5 :

一個分數的分子和分母的和是 80，可約分成 $\frac{7}{9}$ ，這個分數約分前
是()分之()？

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
0	0	0	1	0	1	0	0	0

Q_B_6 :

機車油箱裡原有 $3\frac{1}{2}$ 公升的汽油，哥哥騎機車用去 $2\frac{4}{5}$ 公升，再去加

油站加了 $1\frac{3}{4}$ 公升，現在機車油箱裡有（ ）公升的汽油？

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
0	0	0	0	1	1	1	1	1

Q_B_7：

1 盒果凍有 24 個，把 1 盒果凍平分成 6 份，其中的 1 份是（ ）

盒；平分成 12 份，其中的 1 份是（ ）盒。

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
1	1	1	1	0	0	0	0	0

Q_B_8：

5 個 $\frac{1}{12}$ 盒果凍合起來是（ ）盒。（ ）個 $\frac{1}{6}$ 盒果凍合起

來是 $\frac{7}{6}$ 盒，也就是（ ）盒又（ ）個 $\frac{1}{6}$ 盒果凍。

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
0	0	1	1	1	0	0	0	0

Q_B_9：

1 盒蛋塔有 12 個，平分成 12 份，每 1 份是（ ）盒，小如吃

掉 $\frac{7}{12}$ 盒是（ ）個蛋塔。

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
1	0	1	1	0	0	0	0	0

Q_B_10 :

1 瓶可樂有 1250 毫公升，大寶喝了 $\frac{2}{5}$ 瓶，小寶喝了 $\frac{10}{25}$ 瓶可樂，

() 喝的比較多？

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
1	0	0	1	0	1	1	0	0

Q_B_11 :

請圈出佔全部總數 $\frac{1}{4}$ 的彈珠



C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
1	1	1	1	0	0	0	0	0

Q_B_12 :

在下圖中哪一個圖的黑色部分是原來圖形的一半 (連續量) (對的

請打○，錯的請打×)



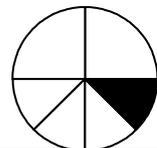
()



()



()



()

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
1	1	0	0	0	0	0	0	0

Q_B_13 :

哥哥買了1個圓形蛋糕、姊姊買了1個長方形蛋糕。哥哥把他的蛋糕分一半給你，姊姊把她的蛋糕分一半給弟弟，你和弟弟吃的一樣多嗎？

一樣多

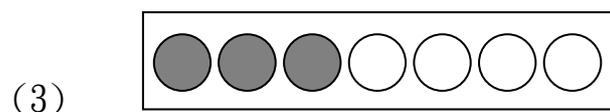
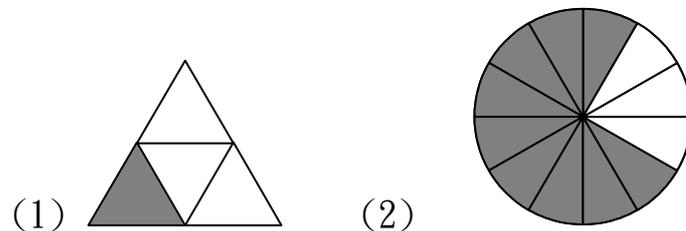
不一樣多

因為_____

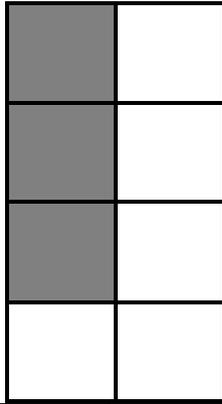
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
1	0	0	0	0	0	0	0	0

Q_B_14 :

() 下列哪一個圖形的斜線部分代表整體的 $\frac{3}{4}$ 等分？



(4)



C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
1	1	1	1	0	0	0	0	0

Q_B_15 :

() 一盒草莓有 24 顆，小政拿了 $\frac{3}{8}$ 盒，小智拿了 7 顆。

請問誰拿走的草莓比較多？

(1) 小政。因為 1 盒比 1 顆大

(2) 小政。因為 $\frac{3}{8}$ 盒 $>$ 7 顆

(3) 小智。因為 $\frac{3}{8} <$ 7

(4) 無法比較誰拿的比較多

(5) 其他

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
1	0	0	1	0	1	1	0	0

Q_B_16 :

阿姨做了 2 個圓形蛋糕平分給我們 3 個人吃，請問每個人吃了幾個蛋糕？

(1) 2 個 (2) $\frac{3}{2}$ 個 (3) $\frac{2}{3}$ 個 (4) $\frac{1}{3}$ 個 (5) $\frac{3}{1}$ 個 (6)

其他

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
1	1	1	1	0	0	0	0	0

Q_B_17 :

甲、乙、丙 3 人共有 10 公斤的糖果，甲有 $2\frac{2}{5}$ 公斤，乙有 $3\frac{2}{25}$ 公斤，則丙有 () 公斤的糖果？

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
0	0	0	0	1	1	1	1	1