南 華 大 學 企 業 管 理 系 管 理 科 學 博 士 論 文

A DISSERTATION FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY

Ph.D. PROGRAM IN MANAGEMENT SCIENCES

DEPARTMENT OF BUSINESS ADMINISTRATION

NANHUA UNIVERSITY

訂單式生產之最適控制模式的建構與分析

THE STRUCTURE AND ANALYSIS OF OPTIMAL CONTROL MODEL

OF MAKE-TO-ORDER

指導教授：陳淼勝 博士

ADVISOR: CHEN, MIAO-SHENG Ph.D.

研 究 生：蔡福建

GRADUATE STUDENT: TSAI, FU-CHIEN

中 華 民 國 九 十 七 年 六 月

南　華　大　學

企業管理系管理科學博士班

博 士 學 位 論 文

訂單式生產之最適控制模式的建構與分析

研究生：蔡福建

經考試合格特此證明

口試委員：陳海鳴

陳淼勝

黃國忠

呂俊德

鄧少華

指導教授：陳淼勝

系 主 任：呂俊德

口試日期：中華民國　九十七　年　六　月　十三　日

南華大學企業管理系管理科學博士班

九十六學年度第二學期博士論文摘要

論文題目：訂單式生產之最適控制模式的建構與分析

研 究 生：蔡福建　　　　　　　　　　　　指導教授：陳淼勝　博士

論文摘要內容：

生產作業成本、存貨成本、交貨數量與交貨日期此四者，是從事訂單式生產的生產決策者所最關切的基本問題。本論文是在上述基本問題的考量下，針對同型態的產品，分別探討下列三種訂單式生產的最佳生產計畫模式：

模式 1：各時點產能未受限制之單一交貨日期的最佳生產計畫模式；

模式 2：各時點產能皆受限制之單一交貨日期的最佳生產計畫模式；

模式 3：各時點產能未受限制之兩個不同交貨日期的最佳生產計畫模式。

在追求總成本（含生產作業成本與存貨成本）為最小且能如期交貨為目標的前題下，如何藉由所考量的參數、決策變數、決策函數及基本假設，分別將該三個主題的問題各製作成一個可具體討論的數學模式來加以探討，是本論文的主要架構。

本論文對於所建構的數學模式係利用變分法以尋求其最佳解，各主要的內容分述如下：

1.尋求模式 1 的最佳解（含最佳生產函數、最佳生產起始時點等），並展示

該最佳生產計畫之生產決策屬性；

2.尋求模式 2 的最佳解（含最佳生產函數、最佳生產起始時點、最佳全產能生產起始時點等），並展示該最佳生產計畫之生產決策屬性；

3.尋求模式 3 的最佳解（含最佳生產函數、最佳生產起始時點、第一期交貨前最佳額外生產數量等），並展示該最佳生產計畫之生產決策屬性；

4.分別探討上述三個模式之最佳解中主要參數的敏感度分析。

最後，本論文綜合各章之最佳解的適用場合，進而提供一個應如何決定訂單式生產之最佳生產的決策準則，以供從事生產計畫實務之決策者在面對新訂單來臨時的決策參考。

關鍵詞：訂單式生產、生產計畫、變分法、動態規劃、產能狀態。

Title of Dissertation: The Structure and Analysis of Optimal Control Model of Make-to-Order

Department: Ph.D. Program in Management Sciences, Department of Business Administration, Nanhua University

Graduate Date: June 2008 Degree Conferred: Ph.D.

Name of Student: Tsai, Fu-Chien Advisor: Chen, Miao-Sheng Ph.D.

Abstract

Production operating cost, inventory cost, delivery quantity, and delivery date are four primary concerns of production decision-maker for make-to-order (MTO) problems. This study focuses on the problem of homogeneous products, and we discuss the following three optimal production plan models of MTO:

Model 1: The optimal production plan model of one delivery date with un-limited production capacity at any point in time.

Model 2: The optimal production plan model of one delivery date with limited production capacity at any point in time.

Model 3: The optimal production plan model of two different delivery date with un-limited production capacity at any point in time.

How to make the problem into a tangible mathematical model by taking into the consideration for the purpose of minimal total cost (including the production operating cost and inventory cost) and punctual delivery of products is the process of this study.

For the mathematical models, we use the method of calculus of variations to look for the

optimal solutions. The main content of this study are as follows:

1. How to look for the optimal solution (include the optimal production function, the optimal production starting point) of Model 1. The production decision procedure of the optimal production plan is also constructed.
2. How to look for the optimal solution (include the optimal production function, the optimal production starting point, the optimal full capacity production starting point) of Model 2. The production decision procedure of the optimal production plan is also constructed.
3. How to explore the optimal solution (include the optimal production function, the optimal production starting point, the optimal extra quantity to be produced before the first delivery date) of Model 3. The production decision procedure of the optimal production plan is also constructed.
4. The sensitivity analyses for the key parameters in the optimal solution derived from the three production plan models respectively.

Finally, we combine the results derived from the three issues, and provide a production decision procedure in deciding the optimal production plan of MTO for the decision maker a decision reference in dealing with new orders.

Keywords: Make-to-Order, production plan, calculus of variations, dynamic programming, production capacity situation.

目　　錄

表目錄

圖目錄

參數與函數之符號及意義

本論文中所建構的數學模式，其所使用的參數、決策變數及決策函數之符號、意義，介紹如下：

參數：

T：生產決策者於承接新訂單之時點起至應行交貨之時點間的時間長度。

若假設時間起始時點為 0，則交貨之時點為T；即新訂單之生產期間為$[0,T]$。

此符號適用於單一交貨日期的最佳生產計畫模式。

B：生產者在時點T應交貨的貨品數量。

此符號適用於單一交貨日期的最佳生產計畫模式。

c_1：單位時間內之單位貨品的生產速率的係數，其中$c_1>0$為常數。

此符號適用於單一交貨期及兩個不同交貨期之最佳生產計畫模式。

c_2：單位時間內之單位貨品的存貨成本（持有成本），其中$c_2>0$為常數。

此符號適用於單一交貨期及兩個不同交貨期之最佳生產計畫模式。

c_3：單位時間內之單位貨品的產能利用率的係數，其中$c_3>0$為常數。

此符號適用於產能受限制單一交貨期之最佳生產計畫模式。

$u(t)$：生產者評估於未來生產期間$[0,T]$內之時點t的產能上限值；其中

$u(t)>0$為已知，$\forall\, t\in[0,T]$。

T_1：兩個不同交貨日期之第一期的交貨時點（假設決策者之相對的決策時點為$t=0$）。

T_2：兩個不同交貨日期之第二期的交貨時點（假設決策者之相對的決策時點為 $t=0$ ）；且 $T_2 > T_1$ 。

B_1：生產者在時點 T_1 應交貨的貨品數量。

B_2：生產者在時點 T_2 應交貨的貨品數量。

決策變數或決策函數：

$w(t)$：時點 t 產能未受限制之單一交貨日期生產計畫的生產函數，它是**模式 1** 的決策函數。其中 $w(t)$ 表示在時間區間 $[0,t]$ 之累積生產量，且滿足 $w(0)=0$ ， $w(T)=B$ ； $w'(t)$ 表示生產函數 w 在時點 t 之生產速率（或在時點 t 之單位時間的生產量）。

t_w：生產函數 w 之生產起始時點，它是**模式 1** 的決策變數。其中 $t_w = Max\left\{ t \mid w(t)=0, t\in[0,T] \right\}$ 為生產函數 w 之定義域左端點；即 $w(t)=0,\ 0\le t\le t_w$ 且 $w(t)>0,\ t_w<t\le T$ 。

$x(t)$：時點 t 產能上限為 $u(t)$ 之單一交貨日期生產計畫的生產函數，它是**模式 2** 的決策函數。其中 $x(t)$ 表示在時間區間 $[0,t]$ 之累積生產量，且滿足 $x(0)=0$ ，$x(T)=B$ ；$x'(t)$ 表示生產函數 x 在時點 t 之生產速率（或在時點 t 之單位時間的生產量）；其中 $0\le x'(t)\le u(t)$ ，$\forall\, t\in[0,T]$ 。

本論文稱 $x'(t)/u(t)$ 為在時點 t 之產能利用率；其中 $0\le x'(t)/u(t)\le 1$ ，$\forall\, t\in[0,T]$ 。

t_x：生產函數 x 之生產起始時點，它是**模式 2** 的決策變數。其中 $t_x = Max\left\{ t \mid x(t)=0, t\in[0,T] \right\}$ 為生產函數 x 之定義域左端點；即

$x(t)=0,\ 0\le t\le t_x$ 且 $x(t)>0,\ t_x<t\le T$ 。

T_x ：生產函數 x 之全產能生產起始時點，它是**模式 2** 的決策變數。

若集合 $\{t \mid t_x\le t\le T,$ 且 $x'(t)=u(t)\}$不是空集合，則

定義 T_x 為 $T_x=Min\{t \mid t_x\le t\le T,$ 且 $x'(t)=u(t)\}$；否則，定義 $T_x=T$ 。

$W(t)$：時點 t 產能未受限制之兩個不同交貨日期生產計畫的生產函數，它是**模式 3** 的決策函數。其中 $W(t)$ 表示在時間區間 $[0,t]$ 之累積生產量，且滿足 $W(0)=0$，$W(T_1)\ge B_1$，$W(T_2)=B_1+B_2$；$W'(t)$ 表示生產函數 W 在時點 t 的生產速率（或在時點 t 之單位時間的生產量）。

t_W ：生產函數 W 之生產起始時點，它是**模式 3** 的決策變數。其中

$t_W=Max\{t \mid W(t)=0, t\in[0,T_1]\}$為生產函數 W 之定義域左端點；即

$W(t)=0,\ 0\le t\le t_W$ 且 $W(t)>0,\ t_W<t\le T_2$ 。

a ：各時點產能未受限制之兩個不同交貨日期的生產計畫，於第一期交貨前必須額外生產的數量，即 $W(T_1)=B_1+a$ ，$a\ge 0$；它是**模式 3** 的決策變數。

特殊運算符號：

$(m)^+$ ：它是一個運算符號，其意義為 $(m)^+=Max\{0,m\}$。

$\odot$ ：它是一個運算符號，其定義為 $m\odot n=Min\{m,n\}$。

第一章　緒論

在生產實務的運作中，當所生產的產品型式是固定時，生產者可以預先生產，並建立某固定的安全存貨量，以因應緊急之需；此種產品的生產線經常都是維持著連續不斷的運作生產，而且生產者對於顧客的訂單是可以隨時承接、隨時出貨，如存貨生產等。然而，有些產品的生產，其產品型式與數量必須完全依照顧客的訂單需求而規劃，此種類型之產品的生產方式就是所謂的「訂單式生產（make-to-order）」；即訂單式生產係指生產者完全依照顧客的訂單需求，規劃其產品的生產措施，含產品種類、規格、數量、價格、交期等，以迎合顧客的訂單需求。因此，訂單式生產並未事先生產與建立庫存，而是在接到顧客的訂單後，才依其需求而開始設計並製造顧客所訂定的產品與數量。

1.1　研究動機

訂單式生產可說是一種客製化的生產方式，皆因顧客的訂單需求而定。雖然顧客的需求是隨機性的，然而對於固定型式的產品，生產者一般都會事先建構一個生產系統；其建立訂單式生產系統的目的是在確保生產者能在適當的時間內，提供顧客所需數量的產品。由於顧客的確實需求量事先很難預測準確，而且訂單式生產的模式亦非既定生產排程中之「一般訂單」的生產排程；因此常會出現「緊急訂單」的現象，而影響到正常的

生產排程。

在生產製程中，緊急訂單是個經常會發生的問題，但在過去的學術文獻上，極少有系統性的方法來解決其訂單分配與評估問題。緊急訂單的突然出現，經常會對生產者原先排定之生產活動產生嚴重的影響；如，導致一般訂單的交期延遲、導致機器負荷的產生、導致存貨的改變、導致人力資源的重新配置、以及導致對生產者整體信譽的影響等；因此，對於訂單式生產的生產系統規劃，是不容忽視的。

由於訂單式生產的交貨約定，往往使得生產者須於未來某特定時點交足某特定產量給予客戶；因此，生產者為了使此新訂單能如期交貨，往往必須將原可供生產之資源的使用計畫重新調配。如此一來，生產者便會打亂原有的生產步調，以致於有趕工與製程排擠等的情況產生，而這些情況無形中將會導致其生產作業成本的增加（Wu & Chen, 1996）；此外，一個訂單式生產的公司要在市場上具有競爭力，必須要靠其極短的前置時間，並迅速作決策。是故，對於訂單式生產，生產決策者必須事先設計出一個能使該生產的整體成本為最小（或利潤為最大）且能如期交貨的最佳生產計畫，藉以擴大公司的生產利潤並迎合顧客的訂單需求，達到生產管理的目標。

1.2 研究目的

由於生產者之生產設備設置在先，產品被生產的計畫在後，因此生產

者之產能往往必須被假設有上限。因為廠商在接受新訂單合約時，往往尚會有某些舊訂單生產活動正在執行中；因此新訂單之生產計畫在未來生產期間內之各時點的最大產能（生產者在各時點利用所有可支配生產資源的最大產量）狀態是不盡相同的。這表示生產者在某時點所能承接的新訂單之交貨日期及交貨數量上限也會不同，連帶地使得其所採行的新訂單最佳生產計畫也會不一樣。對於一個生產者，在面對一個新訂單時，是否有能力承接該訂單，是視其未來生產期間各時點之最大產能分佈而定。當評估於未來生產期間之每個時點的生產資源可以充份供應時，才可以考慮承接該訂單。除此因素外，生產者在考慮是否承接該訂單前，尚要面臨各種生產成本（或利潤）的估計問題。一旦生產者決定承接該訂單後，他仍必須面臨該新訂單之最佳生產計畫的執行與管控問題。

關於訂單式生產，過去的文獻極少利用動態的方式來建構其生產模式。本論文的目的是針對同型態產品的訂單式生產，利用動態問題的屬性，從成本的構面（含生產作業成本及存貨成本）來建構其生產計畫的理論模式，並尋求其最佳解。展示最佳解性質以及最佳解對重要參數之敏感度分析的討論，則為本論文的主要研究成果。

由於訂單式生產的型態係因顧客的訂單需求而異，因此其問題製作的型態及種類繁多。本論文將僅針對底下的三種訂單式生產主題，分別探討其最佳生產計畫模式的製作及其最佳解（含最佳生產函數、最佳生產起始時點、最佳全產能生產起始時點及第一交貨期前最佳額外生產量等）中重

要性質的討論。最後，本論文再將此三種不同型態的最佳生產計畫決策方式綜合比較，構建一個訂單式生產之最適控制模式的最佳生產決策流程，以供生產決策者在面臨新訂單時的決策參考。

模式 1：各時點產能未受限制之單一交貨日期的最佳生產計畫模式。

模式 2：各時點產能皆受限制之單一交貨日期的最佳生產計畫模式。

模式 3：各時點產能未受限制之兩個不同交貨日期的最佳生產計畫模式。

1.3 研究方法

由於本論文係考慮連續時間的生產控制問題，係為連續動態規畫的範圍；因此，對於所建構的數學問題之屬性係為變分法的問題。本論文主要是利用變分法最佳解必要條件之尤拉方程式（Kamien & Schwartz, 1991），尋求所建構之數學模式的最佳解。對於所尋得的最佳解，再輔以微積分的理論與基本技巧（Flatto, 1979; Friedman, 1983），進一步地探討最佳解對參數的敏感度分析。

本論文是針對訂單式生產問題作模式的建構、分析與探討。依訂單式生產之特性，生產者所生產的產品是被逐步儲存著，直到交貨時點再一次出清貨品。這特徵狀況，在台灣的生產實務中是經常出現的。就目前的台灣產業現況而言，無論是人力資源或產品儲存等成本，相對於大陸地區皆屬昂貴。許多企業或公司為了節省生產期間的各種成本，大部份都會採取「台灣接單，大陸生產，台灣交貨」的策略。不論廠商所生產的商品是何

種型態，當生產者是採取此種策略時，其最終商品的運送時間常須配合兩岸之間既定的航班運輸（船運或空運）日期而定。因此，商品的交貨必須採取整批貨櫃接駁處理的方式；這表示廠商支付的成本除了生產作業成本外，尚須包含產品被儲存的成本。是故，本論文之數學模式的建構除了基本假設外，尚聚焦在顧客訂單需求的交貨時點及交貨數量，以及生產者的生產作業成本及存貨成本。

1.4 研究架構

依據上面的陳述，本論文將主要探討的內容共分為六章；除了第一章的緒論外，第二章為文獻探討；第三章為各時點產能未受限制之單一交貨日期的最佳生產計畫模式分析；第四章為各時點產能皆受限制之單一交貨日期的最佳生產計畫模式分析；第五章為各時點產能未受限制之兩個不同交貨日期的最佳生產計畫模式分析；第六章為總結與未來可能的研究方向。其中在第三、四、五章中，本論文均會針對所得到的結果作個小結論，藉以即時彰顯該研究的成果；而在第六章中，除了展現本論文的貢獻外，再將第三、四、五章的結果作個總結。

因此，本論文之研究架構如下圖所示：

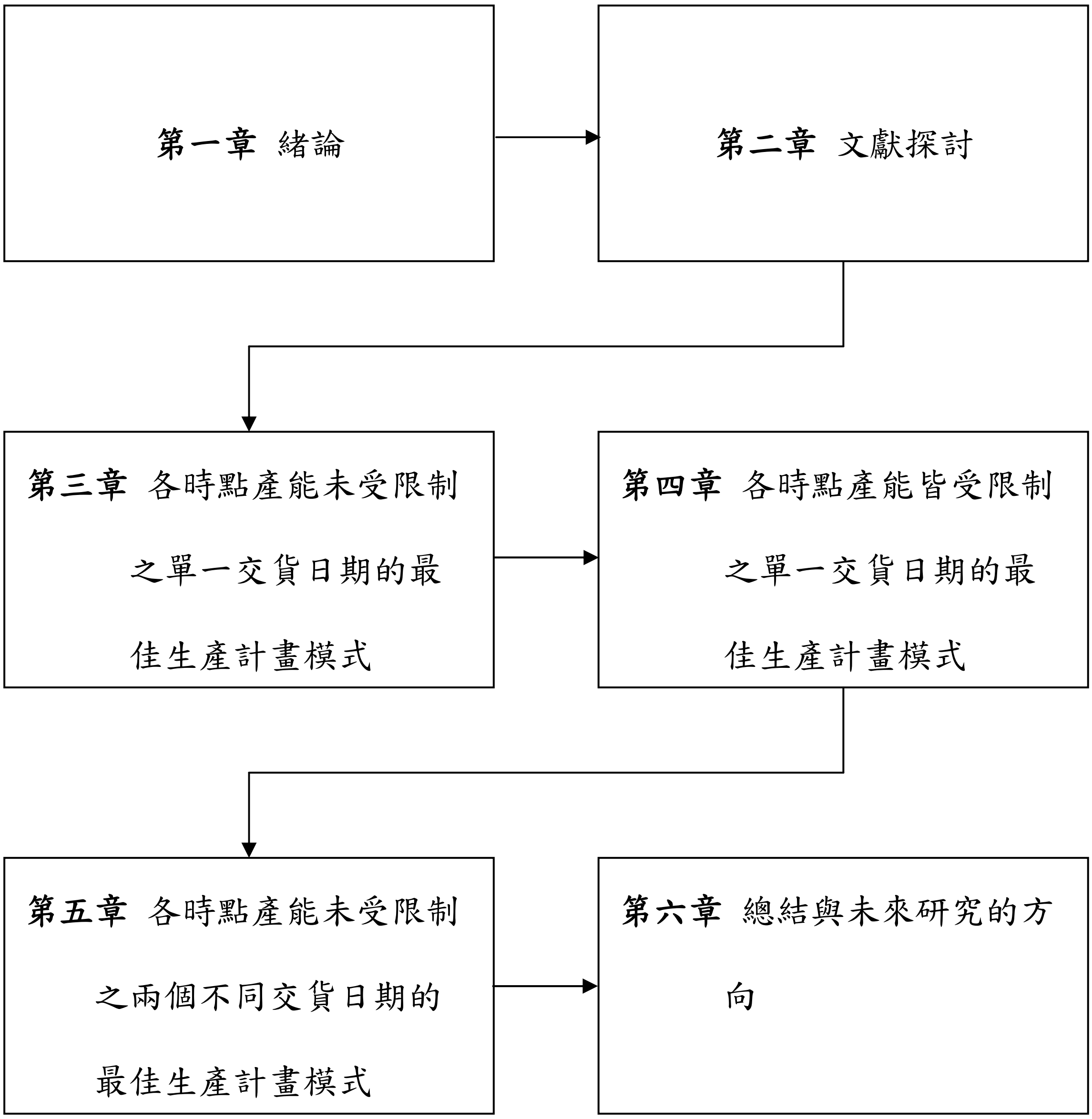


圖 1.1 本論文之研究架構

第二章　文獻探討

訂單式生產的型態因顧客的需求而異，種類繁多。本論文僅針對三種不同型態的訂單式生產建構其數學模式並探討其最佳解，並提出最佳生產決策流程圖。本論文探討的三個主題，在製程中每個時點不管是考慮產能受限制或未考慮產能受限制，均聚焦在能準時供貨的目標下追求其總成本最小化，即生產速率的控管。因此，本章將針對生產速率控管之重要性及該三個主題的相關文獻，分節進行討論。

2.1 生產速率控管的重要性

在整個生產製程中的每一個時點，不論可供生產的資源是可以充份供應或是受到限制，當生產決策者決定承接一個新訂單後，如何決定該新訂單在生產計畫期間內各時點之生產速率的控制，是為本論文各主題的主要內容，其中生產速率含生產函數、生產起始時點、全產能生產起始時點及第一期交貨須額外生產的數量。

生產速率的控制對於一個生產者在擴大公司之生產利潤或減低其生產總成本上，是個很重要的決策（Chen & Lan, 2001a, 2001b; Chen & Chu, 2003; Feichtinger & Harth, 1985）。生產速率控制的重要性在於：如果過早開始生產或生產速率過快，不僅有生產作業成本浪費的問題，同時其存貨成本亦將快速累積；因此，基於生產作業成本與存貨成本因素的考量，過早開始

生產或生產速率過快，都並非是最適宜的。另一方面，如果太晚開始生產或生產速率過慢，則將會有無法如期交足貨品數量的違約危機，這種違約的損失不僅包括因延誤交貨或被退掉此訂單所造成的公司財務損失，也將造成公司無形的商譽損失，甚至永遠流失某些顧客。當生產期間內每一個時點的產能皆受到限制時，全產能生產（即產能利用率為百分之百）的起始時點亦是另外一個重要的決策因子；此外，對兩個不同交貨日期，於第一期交貨前必須額外生產多少數量，以應付第二期之所需，亦值得重視。正如 Soroush（1999）在其文章中所指出的，能符合應交貨日期是生產計畫管理實務中最重要的目標，亦是公司致勝的關鍵。

2.2 單一交貨期—各時點產能未受限

假設在整個生產製程中，生產者可供生產使用的資源均能充份地供應，亦即未考慮產能受限制的問題。此時，生產決策者必然可以承接新訂單；然而，當生產決策者在承接新的單一交貨日期之訂單時，他仍必須面對著生產作業成本（含單位成本及整備成本等）、存貨成本、交貨數量與交貨期限等的壓力。因此，他必須抉擇在何時間點才開始生產、以及應以何種的生產速率來從事生產活動，才能如期交足貨品數量且使得總成本（含生產作業成本、存貨成本）為最小。此問題見於 Kamien & Schwartz（1991）兩位作者所著的一書中；Kamien & Schwartz 在構建此問題之數學模式時，是利用連續動態函數的概念，且沒有考慮生產者在其未來整個生產製程中

有產能受限制的情況。本論文延續此一概念之數學模式的建構，但提出一個不同於該兩位作者求解的方式處理之，並進一步作最佳解之目標值的參數敏感度分析。

2.3 單一交貨期—各時點產能皆受限

一般而言，產能限制著產量上限，且每一個時點的產能上限更限制著該時點的生產速率。因此，在許多文獻模式中，產能上限經常是被假設為固定或充份到可忽略其限制的，如 Kamien & Schwartz（1991）。然而，各時點產能皆受限是生產決策者經常要面對的實務現況。Sox 和 Muckstadt（1997）在其文章中強調，一個有效率的生產計畫，基本上必須要能機動地有效調用他們的產能。如果在未來的生產期間內之每一個時點的產能是可以充份供應或可以任意擴充需求(如可向同業調貨等)，則在該時點將沒有必要特別強調產能受限制的狀況。在過去的文獻中，如 Chen & Lan（2001a; 2001b）是考慮以有限工時的方式加以處理；Grubbstrom & Wang（2003）探討多階段產能受限之生產存貨系統的隨機模式；Horiguchi, Raghavan, Uzsoy, & Venkateswaran（2001）等，對於半導體設備探討有限產能的生產計畫算則；本研究將利用動態規劃的方式來探討產能受限之單一交貨期訂單的生產速率。

當未來生產期間之每個時點的產能皆受到限制時，生產決策者首先必須面對的問題是新訂單的承接與否。一個生產決策者基於對舊訂單之交貨

承諾壓力，且又須面對一個在未來某時點應行交貨之新訂單是否可以接單的決策，他必須事先評估在未來的生產期間內各時點的產能狀況。因此，一個生產決策者對於新訂單所須承受的壓力，除了生產作業成本、存貨成本、交貨期限及交貨數量外，尚有在各時點之產能的受限問題。本研究是基於生產決策者經過評估在未來生產期間內各時點的最大產能並決定承接該新訂單後，從每一時點之生產速率皆受限於不超過其所評估之最大產能的情況下，來探討生產決策者在承接新訂單並實際從事生產活動之前，如何決定新訂單的最佳生產計畫問題。

2.4 兩個不同交貨期—各時點產能未受限

在生產實務運作上，對於某一種同型態的產品，顧客經常會有在一個訂單中載明多個不同的交貨數量及交貨日期，或同時間有多個訂單而各有其不同的交貨數量及交貨日期。對於一個生產決策者，若能規劃出一個具體的最佳生產計畫，以同時完成此多個不同交貨狀況的訂單需求，則是一件相當重要的事。在過去的文獻中，如在 Chen & Lan（2001a; 2001b）或 Grubbstrom & Wang（2003）的工作中，不論是從機器設備的可靠度或生產資源的可用性或多階段生產，或探討多階段產能受限之生產存貨系統的隨機模式，均是針對單一交貨日期的生產計畫問題；然而，有關多個交貨日期之訂單式生產的議題，甚少提到動態生產（dynamic production）之層面的理論探討。本研究將從成本的構面，在不考慮各時點產能受到限制的情

況下，利用連續動態規劃的表達方式來建構兩個不同交貨日期之訂單式生產的生產計畫模式，並尋求該模式的最佳解，同時探討最佳解中重要參數的敏感度分析。

第三章　各時點產能未受限制之單一交貨日期的最佳生產計畫模式

本章將針對單一交貨日期的訂單，在不考慮生產製程中每個時點之產能受限的情況下，來探討其最佳的生產計畫模式。本章將藉由問題分析，以了解問題的特性；然後在基本假設下，構建此問題的數學模式並尋求其最佳解、作最佳解的敏感度分析；最後，小結此問題之最佳解的管理意涵並提出本問題之最佳生產的決策流程圖，以供參考。

3.1　問題分析

假設在整個生產製程中，生產者可供生產使用的資源均能充份地供應（即不考慮產能受限制）。當生產決策者在承接一個新的單一交貨日期之訂單後，他仍必須面對著生產作業成本（含單位成本及整備成本等）、存貨成本、交貨數量與交貨期限等的壓力。這些壓力，有些是生產者可以事先掌控的因素，而有些則是生產者無法事先掌控的因素，它們是隨著顧客的訂單需求而異。因此，對此新訂單，生產決策者必須抉擇在何時間點開始生產以及應以何種生產速率來從事生產，才能如期交足貨品數量且使得其總成本（含生產作業成本、存貨成本）為最小。

本研究沿用 Kamien & Schwartz（1991）建構此問題模式的概念，將此問題製作成一個可具體討論並可使用變分法求解的數學模式，且提出一個

解決此一問題但不同於該兩位作者之求解思維的方式，以尋求所建構之數學模式的最佳解，並探討最佳解中重要參數的敏感度分析。本章最後將提出一個最佳生產的生產決策流程圖，作為生產實務決策者應用本模式時之生產決策參考。

3.2 基本假設

本問題屬於訂單式生產問題的一種。訂單式生產常會造成因未預期接單而出現須對某一新訂單緊急執行生產活動的現象，因而導致生產作業成本隨著生產速率的增大而增加。本研究假設在時點t之單位生產作業成本UC_t與當時點t之生產速率$w'(t)$成正比例，即$UC_t = c_1 \cdot w'(t)$，式中$c_1 > 0$為常數。

3.3 模式建構與最佳解

3.3.1 模式的建構

當生產者承接一張訂單，言明在時點T要交足貨品數量B單位時；則根據前面的符號及函數的定義與上節的基本假設，可得到在時點t之生產作業成本及存貨成本分別為$c_1\left(w'(t)\right)^2$與$c_2 w(t)$；故在時間區間$[t_w, T]$之總生產作業成本及總存貨成本分別為$\int_{t_w}^{T} c_1(w'(t))^2 \, dt$及$\int_{t_w}^{T} c_2 w(t) \, dt$。因此，如何尋求函數$w$使得其所對應之總成本為最小且能如期交貨的數學模式，可表示如下：

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \underset{w}{Min} \int_{t_w}^{T} \left[c_1 (w'(t))^2 + c_2 w(t) \right] dt \\ \quad s.t. \quad w(t_w) = 0,\ w(T) = B,\ w'(t) \geq 0,\ t_w \leq t \leq T \end{cases}$$

3.3.2 模式的最佳解

假設**模式(Ⅰ)**的最佳解存在，並以符號w^*表示之，且令t_{w^*}為w^*定義域之左端點。本研究先忽略**模式(Ⅰ)**之限制條件$w'(t) \geq 0$，$\forall\, t \in [t_w, T]$，而考慮下列的模式：

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} \underset{w}{Min} \int_{t_w}^{T} \left[c_1 (w'(t))^2 + c_2 w(t) \right] dt \\ \quad s.t. \quad w(t_w) = 0,\ w(T) = B \end{cases}$$

因為**模式(Ⅱ)**是一個標準型的變分法問題（Kamien & Schwartz, 1991, p.14）；因此，其最佳解必滿足變分法之尤拉方程式（Kamien & Schwartz, 1991; Chiang, 1992）。本研究企圖先獲得**模式(Ⅱ)**的最佳解，然後再檢驗此最佳解是否滿足**模式(Ⅰ)**的限制條件「$w'(t) \geq 0$」，以判斷**模式(Ⅱ)**的該最佳解是否亦為**模式(Ⅰ)**的最佳解。整個求解過程如下：

假設$\overline{w} = \overline{w}(t)$為**模式(Ⅱ)**的最佳解，$\forall\, t \in [t_{\overline{w}}, T]$。因為**模式(Ⅰ)**比**模式(Ⅱ)**多了一個限制條件$w'(t) \geq 0$，$\forall\, t \in [t_w, T]$；因此，如果可以證明下列的不等式成立，則$\overline{w}$也必然是**模式(Ⅰ)**的最佳解：

$$\overline{w}'(t) \geq 0,\quad \forall\, t \in [t_{\overline{w}}, T] \tag{3.3.1}$$

因為**模式(Ⅱ)**是一個標準型的變分法問題，其最佳解$\overline{w}(t)$必須要滿足變分法之尤拉方程式（Kamien & Schwartz, 1991, p.16），即

$$c_2 = 2c_1\overline{w}''(t) \qquad (3.3.2)$$

經兩次對t作積分後，得

$$\overline{w}(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2 + \frac{k_1}{2c_1}\cdot t + \frac{k_2}{2c_1} \text{ ， } \forall\, t \in [\, t_{\overline{w}}, T\,] \qquad (3.3.3)$$

式中k_1及k_2為積分常數。

情況 1：假設 $t_{\overline{w}} = 0$

由(3.3.3)式，利用$\overline{w}(0) = 0$及$\overline{w}(T) = B$，可以得到(3.3.3)式中之兩個積分常數之解為$k_1 = \dfrac{2c_1 B}{T} - \dfrac{c_2 T}{2}$及$k_2 = 0$；將此結果代入(3.3.3)式，得

$$\overline{w}(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2 + \left(\frac{B}{T} - \frac{c_2 T}{4c_1}\right)\cdot t \text{ ， } \forall\, t \in [\, 0, T\,] \qquad (3.3.4)$$

當$B \geq \dfrac{c_2 T^2}{4c_1}$時，由(3.3.4)式可得$\overline{w}'(0) = \dfrac{B}{T} - \dfrac{c_2 T}{4c_1} \geq 0$；又由(3.3.2)式得知，$\overline{w}'(t)$為$t$之嚴格增函數；因此，$\overline{w}'(t) \geq \overline{w}'(0) \geq 0,\ \forall\, t \in [\, 0, T\,]$。故由(3.3.1)式，當$B \geq \dfrac{c_2 T^2}{4c_1}$時，(3.3.4)式之$\overline{w}$亦為**模式(Ⅰ)**之最佳解，即$w^* = \overline{w}$。

情況 2：假設 $t_{\overline{w}} > 0$

因為可行解w的生產時間起始時點t_w是隨著可行解w的不同而不同；因此，由可行解邊界可移性條件（Transversality Condition）（Kamien &

Schwartz, 1991, p.57），可得**模式(Ⅱ)**之最佳解$\overline{w}$的生產起始時點$t_{\overline{w}}$必須滿足下列的條件：

$$\overline{w}'(t_{\overline{w}})=0 \tag{3.3.5}$$

（推導過程，請參見附錄 A-A.1）

由(3.3.3)式，利用(3.3.5)式及$\overline{w}(T)=B$，可以得到(3.3.3)式中之兩個積分常數的解為$k_1=-c_2t_{\overline{w}}$及$k_2=2c_1B-\dfrac{c_2T^2}{2}+c_2t_{\overline{w}}T$。將此結果代入(3.3.3)式，並利用$\overline{w}(t_{\overline{w}})=0$，可以解得$t_{\overline{w}}=T-2\sqrt{\dfrac{c_1B}{c_2}}>0$（即$B<\dfrac{c_2T^2}{4c_1}$）。此時$\overline{w}(t)$可表示如下：

$$\overline{w}(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2-\frac{c_2t_{\overline{w}}}{2c_1}\cdot t+\left(B-\frac{c_2T^2}{4c_1}+\frac{c_2t_{\overline{w}}T}{2c_1}\right),\ \forall\, t\in[t_{\overline{w}},T] \tag{3.3.6}$$

（$t_{\overline{w}}$之求解過程，請參見附錄 A-A.2）

由(3.3.2)式知，$\overline{w}'(t)$為t之嚴格增函數；再結合(3.3.5)式，知$\overline{w}'(t)\ge\overline{w}'(t_{\overline{w}})=0$，$\forall\, t\in[t_{\overline{w}},T]$；故由(3.3.1)式，當$B<\dfrac{c_2T^2}{4c_1}$時，(3.3.6)式之$\overline{w}$亦為**模式(Ⅰ)**之最佳解，即$w^*=\overline{w}$。

若定義決策準則函數$DF_1=DF_1(c_1,c_2,B,T)$如下：

$$DF_1(c_1,c_2,B,T)=B-\frac{c_2T^2}{4c_1} \tag{3.3.7}$$

則上述的最佳解 $w^*(t)$ ，可以表述如下：

情況 1：若 $DF_1 \geq 0$ ，則 $w^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot t^2 + \left(\frac{B}{T} - \frac{c_2 T}{4c_1} \right) \cdot t$ ， $\forall\, t \in [0, T]$ 。

情況 2：若 $DF_1 < 0$，則 $t_{w^*} = T - 2\sqrt{\frac{c_1 B}{c_2}} > 0$，且 $w^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot \left(t - t_{w^*} \right)^2$，$\forall\, t \in [t_{w^*}, T]$。

利用運算符號 $(m)^+$ 的意義，可將上述**情況 1** 與**情況 2** 的結果結合成一個式子如下：

$$w^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot \left(t - t_{w^*} \right)^2 + \frac{c_2}{4c_1 T} \cdot \left(\left(2\sqrt{\frac{c_1 B}{c_2}} \right)^2 - T^2 \right)^+ \cdot t \ ，\ \forall\, t \in [t_{w^*}, T] \tag{3.3.8}$$

式中 $t_{w^*} = \left(T - 2\sqrt{\frac{c_1 B}{c_2}} \right)^+$ 。

3.4 最佳解的敏感度分析

為了迎合顧客的訂單需求，在未考慮產能受限之單一交貨期生產計畫的數學模式中，生產決策者所在乎的是最佳生產起始時點與在任何給定時點的最佳生產函數。此外，最佳解之目標值函數隨著主要參數的變動，也可以提供生產決策者作為其生產決策的參考。本研究將著重在最佳生產起始時點 t_{w^*} 及最佳解之目標值函數的參數分析上。為了描述上的方便，當 $t_{w^*} = 0$ 時，稱最佳生產計畫為「立即生產（Immediate Production; **IP**）」；當 $t_{w^*} > 0$ 時，則稱其為「延後生產（Deferred Production; **DP**）」。

（註：**IP** 與 **DP 之簡稱，於生產函數為**x**及**W**時，亦一併延用之**）

3.4.1　生產起始時點的意涵

模式(Ⅰ)的最佳解為(3.3.8)式，它含有最佳生產函數$w^*(t)$及最佳生產起始時點t_{w^*}，其中最佳生產起始時點為$t_{w^*}=\left(T-2\sqrt{\frac{c_1B}{c_2}}\right)^+$。此最佳生產起始時點可能為「$t_{w^*}=0$」或「$t_{w^*}>0$」，其決策準則依函數$DF_1$之值而定（參見(3.3.7)式）；又$DF_1$之值是依據參數$c_1$、$c_2$、$B$、$T$之值的大小而定，其中參數$c_1$、$c_2$為生產者內部的成本因素，而參數$B$、$T$則為顧客之訂單的需求因素。若$DF_1\geq 0$，則得$t_{w^*}=0$，這表示生產決策者應採取 **IP**，即承接訂單後就立即生產，且此時之最佳生產計畫為上述之「**情況 1**」。若$DF_1<0$，則得$t_{w^*}>0$，這表示生產決策者應採取 **DP**，即承接訂單後延遲一些時間再開始生產，其最佳的延後生產時間長度為$T-2\sqrt{c_1B/c_2}$，且此時之最佳生產計畫為上述之「**情況 2**」。

很明顯地，當$t_{w^*}>0$時，t_{w^*}是參數c_1、c_2、B、T之函數，且隨著參數T增大、B減小、c_1減小、c_2增大而增大，如**表 3.1** 所示。因此，當生產決策者承接一個單一交貨日期的訂單時（不考慮產能受限制），應事先根據評估所得的參數值，計算函數DF_1的值，以決定應採取的最佳生產計畫是為 **IP** 或 **DP**。

表 3.1 參數變動對決策變數t_{w^*}的影響分析（當$t_{w^*}>0$時）

決策變數t_{w^*} ＼ 參數	T	B	c_1	c_2
一階導數	＋	－	－	＋

註：「＋」表示大於 0；「－」表示小於 0。

3.4.2 最佳解目標值的敏感度分析

在**模式(Ⅰ)**的最佳解中（參見(3.3.8)式），最佳生產函數$w^*(t)$與最佳生產起始時點t_{w^*}均含有參數c_1、c_2、B、T；因此，**模式(Ⅰ)**之最佳解的目標值函數亦必為這些參數的函數。若令該目標值函數為L，即

$$L = L(c_1, c_2, B, T) = \int_{t_{w^*}}^{T} \left[c_1\left(w^{*}{}'(t)\right)^2 + c_2 w^*(t) \right] dt$$

則可以得到函數L分別對各參數的偏導數，如下：

$$\frac{\partial L}{\partial B} = \int_{t_{w^*}(B)}^{T} \left[2c_1 \cdot w_B^{*}{}'(t) \cdot \frac{\partial w_B^{*}{}'(t)}{\partial B} + c_2 \cdot \frac{\partial w_B^*(t)}{\partial B} \right] dt \tag{3.4.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial T} = \left[c_1 \cdot \left(w_T^{*}{}'(T)\right)^2 + c_2 B \right] + \int_{t_{w^*}(T)}^{T} \left[2c_1 \cdot \left(w_T^{*}{}'(t)\right) \cdot \frac{\partial w_T^{*}{}'(t)}{\partial T} + c_2 \cdot \frac{\partial w_T^*(t)}{\partial T} \right] dt \tag{3.4.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_1} = \int_{t_{w^*}(c_1)}^{T} \left[c_1 \cdot 2 \cdot \left(w_{c_1}^{*}{}'(t)\right) \cdot \frac{\partial w_{c_1}^{*}{}'(t)}{\partial c_1} + \left(w_{c_1}^{*}{}'(t)\right)^2 + c_2 \cdot \frac{\partial w_{c_1}^*(t)}{\partial c_1} \right] dt \tag{3.4.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_2} = \int_{t_{w^*}(c_2)}^{T} \left[2c_1 \cdot \left(w_{c_2}^{*}{}'(t)\right) \cdot \frac{\partial w_{c_2}^{*}{}'(t)}{\partial c_2} + w_{c_2}^*(t) + c_2 \cdot \frac{\partial w_{c_2}^*(t)}{\partial c_2} \right] dt \tag{3.4.4}$$

上面四式中，以(3.4.1)式為例，本研究是以 $w_B^*(t)$ 及 $t_{w^*}(B)$ 表示 $w^*(t)$ 及 t_{w^*} 為參數 B 的函數；然後，在目標值函數 L 中，先以 $w_B^*(t)$ 及 $t_{w^*}(B)$ 取代 $w^*(t)$ 及 t_{w^*} 後，再將函數 L 對參數 B 求其偏導數而得；其餘各式的作法相同。

針對上面四式之每一個式子，再依 $DF_1 \ge 0$ 或 $DF_1 < 0$ 兩種情況分別加以探討；因此，可以得到函數 L 分別對參數 c_1 、 c_2 、 B 、 T 的一階及二階偏導數，彙整如**表 3.2** 及**表 3.3** 所示；且函數 L 對這些參數的變化率，彙整如**表 3.4** 所示。

（表 3.2~3.4 的推導過程，請參見附錄 A-A.3）

表 3.2 最佳解目標值 L 對各參數的偏導數（當 $DF_1 \ge 0$ 時）

函數 L / 參數	一階偏導數	二階偏導數
B	$\frac{\partial L}{\partial B} = c_2 T + 2c_1 \cdot \left(\frac{B}{T} - \frac{c_2 T}{4c_1}\right)$	$\frac{\partial^2 L}{\partial B^2} = \frac{2c_1}{T}$
T	$\frac{\partial L}{\partial T} = -c_1 \cdot \left\{\frac{B}{T} - \frac{c_2 T}{4c_1}\right\}^2$	$\frac{\partial^2 L}{\partial T^2} = \frac{2c_1}{T^3} \cdot \left[B^2 - \left(\frac{c_2 T^2}{4c_1}\right)^2\right]$
c_1	$\frac{\partial L}{\partial c_1} = \frac{c_2^2}{48c_1^2} \cdot T^3 + \frac{B^2}{T}$	$\frac{\partial^2 L}{\partial c_1^2} = \frac{-c_2^2}{24c_1^3} \cdot T^3$
c_2	$\frac{\partial L}{\partial c_2} = \frac{T}{2} \cdot \left(B - \frac{c_2 T^2}{12c_1}\right)$	$\frac{\partial^2 L}{\partial c_2^2} = \frac{-1}{24c_1} \cdot T^3$

表 3.3 最佳解目標值 L 對各參數的偏導數（當 $DF_1 < 0$ 時）

函數 L / 參數	一階偏導數	二階偏導數
B	$\frac{\partial L}{\partial B} = 2\sqrt{c_1 c_2 B}$	$\frac{\partial^2 L}{\partial B^2} = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{B}}$
T	$\frac{\partial L}{\partial T} = 0$	$\frac{\partial^2 L}{\partial T^2} = 0$
c_1	$\frac{\partial L}{\partial c_1} = \frac{2B}{3} \cdot \sqrt{\frac{c_2 B}{c_1}}$	$\frac{\partial^2 L}{\partial c_1^2} = \frac{-B}{3} \cdot \sqrt{\frac{c_2 B}{c_1^3}}$
c_2	$\frac{\partial L}{\partial c_2} = \frac{2B}{3} \cdot \sqrt{\frac{c_1 B}{c_2}}$	$\frac{\partial^2 L}{\partial c_2^2} = \frac{-B}{3} \cdot \sqrt{\frac{c_1 B}{c_2^3}}$

表 3.4 最佳解目標值 L 對各參數之偏導數的正負符號

條件	L 的偏導數	參數			
		B	T	c_1	c_2
$DF_1 \geq 0$（IP）	L 的一階偏導數	＋	－	＋	＋
	L 的二階偏導數	＋	＋	－	－
$DF_1 < 0$（DP）	L 的一階偏導數	＋	0	＋	＋
	L 的二階偏導數	＋	0	－	－

註：「＋」表示大於 0；「－」表示小於 0；「0」表示等於 0。

在表 **3.4** 中，首先，不管最佳生產計畫是為 **IP** 或 **DP**，L 皆為 B 之凹口向上的遞增函數；即在其它參數不變的情況下，當交貨數量愈大，則所需的總成本愈大，且會快速增加。其次，當最佳生產計畫為 **IP** 時，L 為 T 之凹口向上的遞減函數；即在其它參數不變的情況下，交貨期之長度 T 愈長，則所需的總成本會減小，且逐漸趨於定數；當 T 增大且使得 $DF_1 < 0$ 成

立時，最佳生產計畫即為 **DP**，此時所需的總成本將維持不變。事實上，當最佳生產計畫轉為 **DP** 時，因為必須對生產起始時點事先作評估，故 L 會與 T 無關。最後，不管最佳生產計畫是為 **IP** 或 **DP**，L 皆為 c_1 及 c_2 之凹口向下的遞增函數；即在其它參數不變的情況下，當單位生產作業成本或存貨成本增加時，則所需的總成本會緩慢增加。

3.5 小結

本章問題是在不考慮產能受限制的情況下，從成本的構面來建構單一交貨日期之訂單式生產的生產計畫模式，然後利用變分法之尤拉方程式來尋求其最佳解。由於其模式（**模式(Ⅰ)**）並非是標準型的變分法問題；因此，求本章問題之最佳解方式是先考慮忽略限制條件 $\overline{w}'(t) \geq 0$ 之模式的最佳解。這種忽略限制式所得模式為標準型的變分法模式（**模式(Ⅱ)**），利用標準型之變分法問題的方法求此**模式(Ⅱ)**之最佳解，然後再檢驗此**模式(Ⅱ)**最佳解是否會符合原忽略的限制條件，進而求得**模式(Ⅰ)**的最佳解。

在**模式(Ⅰ)**的最佳解中，它們含有多個不同的參數；在管理活動中，這些參數可以視為生產者所必須面對的內在及外在多變的環境因素。其中與成本因素有關的參數，長期仍可能為生產者事先可控制的因素；而交貨數量與交貨日期的參數，則恆為生產決策者事先無法控制的因素，概因它們是隨著顧客的訂單需求而定。因此，針對不同顧客的訂單需求，生產決策者所必須採用的最佳生產計畫決策模式，就會不盡相同。

本研究所得到的單一交貨日期之訂單式生產的最佳生產計畫，含有最佳生產函數w^*及最佳生產起始時點t_{w^*}（請參考(3.3.8)式），此最佳生產計畫可能為 **IP** 或為 **DP**。研究結果顯示：生產決策者之最佳解可依決策準則函數DF_1（請參考(3.3.7)式）之值大小而定，描述如下：

1.若 $DF_1 \geq 0$ ，則最佳生產起始時點為$t_{w^*} = 0$；生產決策者應採取 **IP**，即最佳生產計畫為「**情況 1**」（稱此最佳解為 **DCM1**）。

2.若 $DF_1 < 0$，則最佳生產起始時點為$t_{w^*} > 0$；生產決策者應採取 **DP**，且其最佳延後生產的時間長度為$T - 2\sqrt{c_1 B / c_2}$ ，即最佳生產計畫為「**情況 2**」（稱此最佳解為 **DCM2**）。

對於上述之決策準則(1)與(2)，本研究更進一步地建立一個簡單的最佳生產決策流程，如**圖 3.1** 所示之流程圖，以作為生產決策者的生產決策參考工具。另外，決策變數與最佳解之目標值函數對各參數的敏感度分析（請參見**表 3.1** 與**表 3.4**），亦可以提供給生產決策者作為其內部因素控管與因應外在因素變化的生產決策參考。

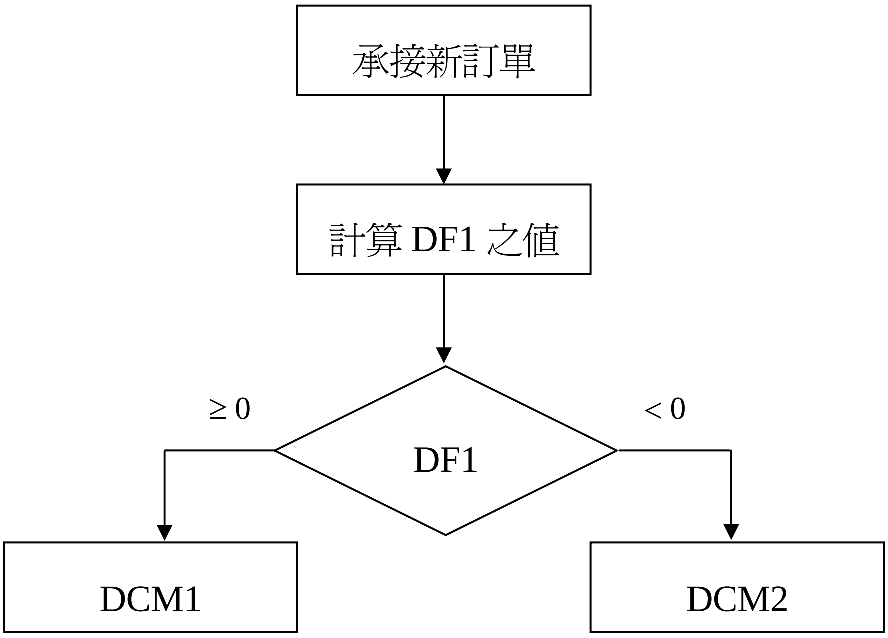


圖 3.1 各時點產能未受限制之單一交貨日期的最佳生產決策流程

第四章　各時點產能皆受限制之單一交貨日期的最佳生產計畫模式

本章仍針對單一交貨日期的訂單，但聚焦在各時點產能皆受限制時的情況下，來探討其最佳生產計畫模式。本章首先闡述本問題的狀況，接著在基本假設下構建數學模式並尋求其最佳解，然後作參數的敏感度分析及決策方式的管理意函；最後，小結本問題的最佳解結果並提出本問題之最佳生產決策的流程圖，以供參考。

4.1　問題分析

Chen 和 Lan （2001a; 2001b）曾指出：生產決策者在承接一個新訂單後，決定生產計畫的生產起始時點與在任何時點之生產速率的控制，對於一個製造商在擴大其生產利潤或減少其生產總成本是一個有效的方法。一個製造商在生產製程中的每一個時點可供生產利用的最大產能，除製造商本身的規模外，是與其當時生產中但尚未完成交貨之舊訂單的原生產計畫有關。基於製造商對舊訂單之交貨承諾的壓力，且又須面對一個在未來某時點應行交貨之新訂單是否可以接單的決策，此為本問題的背景。在不損及已進行中的舊訂單之生產排程下，生產決策者必須事先評估其在未來生產期間內各時點的最大產能狀況；然後在其原有的（已進行或尚未進行）生產計畫中，重新修訂生產製程計畫或額外新增產能規劃，以使能有效地

達成此新訂單的生產目標。因此，一個生產決策者對於新訂單所須承受的壓力，除了生產作業成本、存貨成本、交貨期限及交貨數量外，尚有在生產期間各時點之產能的受限。

假設在未來的生產期間之每一時點的產能上限值不大，而且新訂單之應行交貨的數量又在某一定的水準以上時，如果生產決策者貿然承接此新訂單，則可能會有無法如期交貨的違約損失；此違約損失不僅包括因延誤交貨或中途退掉此訂單所造成的公司財務損失，也將造成公司無形的商譽損失，甚至永遠流失該顧客。當公司應該承接的訂單而未承接或不該承接的訂單而卻承接，都終將造成公司的損失；因此，生產決策者在面臨新的訂單時，他必須慎重地依據未來各時點之產能上限值及應行交貨的時點與交貨的數量等關係，完成初步評估並決定應否承接該新的訂單。

當生產決策者經初步評估並接下該新訂單後，則他必須在所評估的產能水準下從事生產活動。如果過早開始生產或生產速率過快，不僅有生產作業成本浪費的問題，其存貨亦將快速累積成本。因此，過早開始生產或生產速率過快，都是不理想的生產方式。但是，如果太晚開始生產或生產速率過慢，將會因為產能水準的限制而導致無法如期交貨的違約損失。因此，生產決策者在接下新的訂單後，他必須抉擇應該在何時點開始生產、以何種生產速率生產、以及應在何時點開始採取「全產能生產（即產能利用率為百分之百）」措施，才能如期交貨且使得其總成本(含生產作業成本、存貨成本）為最小。

因為產能是不能累積儲存作為下一個時點之生產使用，所以在當時點就要考慮利用該產能的百分比；然而，產能過度使用又潛藏著生產作業成本與存貨成本遞增的危機；因此，本問題之數學模式的製作，是將「各時點不同產能利用率的生產作業成本是不同的」之特性表現出來。

本問題是基於生產決策者經過評估在未來生產期間之各時點的最大產能，並決定承接該訂單後，從每一個時點之生產速率皆受限於不超過該最大產能的情況下，來探討生產決策者在承接新訂單後並從事生產之前，如何決定新訂單的最佳生產計畫問題。本研究將此問題製作成一個可以具體討論的數學模式，並利用變分法尋求其最佳解（含最佳生產函數、最佳生產起始時點及最佳全產能生產起始時點等）及探討最佳解中重要參數的敏感度分析。最後，本研究提出一個最佳生產的決策流程圖，供生產決策者在面臨新訂單時的生產決策參考。

4.2 基本假設

因為訂單式生產常會因緊急狀況而造成生產決策者在生產資源調配與生產排程上的困擾；尤其是在未來生產期間之各時點的產能皆受到限制時，生產決策者必須要由既有的生產計畫中適度地調度生產資源，這無形中將會造成生產作業成本的增加（Wu & Chen, 1996）。因此，當各時點之產能皆受到限制時，各時點之產能利用率不同，其單位生產作業成本也是不同的，且會增加。本研究假設在時點t之單位生產作業成本UC_t與當時點

t 之產能利用率 $x'(t)/u(t)$ 成正比例關係，即 $UC_t = c_3 \cdot (x'(t)/u(t))$，其中 $c_3 > 0$ 為常數。

4.3 模式的建構與求解

根據前面的參數與函數之符號定義及第 4.2 節中之基本假設，可以得到在時點 t 之單位時間的存貨成本及生產作業成本分別為 $c_2 \cdot x(t)$ 與 $c_3 \cdot (x'(t))^2/u(t)$；故可得在時間區間 $[t_x, T]$ 內之總存貨成本及總生產作業成本分別為 $\int_{t_x}^{T} c_2 x(t)\, dt$ 及 $\int_{t_x}^{T} c_3 \cdot \left[(x'(t))^2/u(t)\right] dt$。因此，使得生產函數 x 所對應的總成本為最小之問題的數學模式，可表示如下：

$$
\textbf{(III)} \quad \begin{cases} \underset{x}{Min} \displaystyle\int_{t_x}^{T} \left\{ c_3 \cdot \frac{(x'(t))^2}{u(t)} + c_2 x(t) \right\} dt \\ s.t. \quad x(t_x) = 0,\ x(T) = B,\ 0 \le x'(t) \le u(t),\ \forall\, t \in [t_x, T] \end{cases}
$$

因為在時點 t 的生產速率 $x'(t)$ 必須滿足 $0 \le x'(t) \le u(t)$；因此，當等式 $x'(t)/u(t) = 1$ 成立時，表示生產者在時點 t 是採取「全產能生產」的措施。此種現象在下列情況可能產生：時點 t 相當靠近 T，使得可供生產的時間區間 $[t, T]$ 之長度很小，以致於生產者在 $[t, T]$ 內必須提高生產速率，方可如期於時點 T 之前完成訂單之需要量 B。

從**模式(Ⅲ)**的限制式易知，當 $\int_0^T u(s)\, ds < B$ 時，則**模式(Ⅲ)**是無可行解的；當 $\int_0^T u(s)\, ds = B$ 時，則 $x(t) = \int_0^t u(s)\, ds$ 為**模式(Ⅲ)**之唯一可行解（此唯一的可行解即為最佳解）。因此，對於本問題所建構的模式，本研究以下假設不等式 $\int_0^T u(s)\, ds > B$ 成立。

假設**模式(Ⅲ)**之最佳解存在，且以符號x^*表示最佳生產函數、t_{x^*}表示最佳生產起始時點、T_{x^*}表示最佳全產能生產起始時點，則可以得到以下的推論。

推論：

(1) $x^*(t)$必為時間區間$[t_{x^*}, T]$內之遞增函數；即在$[t_{x^*}, T]$內，$x^*{}'(t) > 0$幾乎皆成立（almost everywhere）。

(2) 若$Min\left\{ t \mid t_x \le t \le T, \text{且 } x'(t) = u(t) \right\}$存在，則$x^*{}'(t) = u(t)$，$\forall\, t \in [T_{x^*}, T]$。

（證明過程，請參見附錄 B-B.1）

由上述的**推論**可以得到，**模式(Ⅲ)**的最佳解必為下列兩種互斥的情況之一：

情況(Ⅰ)：$x^*{}'(t) < u(t)$，$\forall\, t \in [t_{x^*}, T)$。

情況(Ⅱ)：存在T_{x^*}，$0 < T_{x^*} < T$，使得$x^*{}'(t) < u(t)$，$\forall\, t \in [0, T_{x^*})$且$x^*{}'(t) = u(t)$，$\forall\, t \in [T_{x^*}, T]$。

（證明過程，請參見附錄 B-B.2）

根據上面之**推論-(1)**的結果知，**模式(Ⅲ)**之最佳解$x^*(t)$必滿足變分法之尤拉方程式（Kamien & Schwartz, 1991, p.16）。因此，利用尤拉方程式及邊界條件$x^*(t_{x^*}) = 0$，可得$x^*(t)$如下：

$$x^*(t) = \int_{t_{x^*}}^{t} \left(\frac{c_2}{2c_3} \cdot s + \frac{k}{2c_3} \right) \cdot u(s)\, ds \text{，} \forall\, t \in [t_{x^*}, T] \tag{4.3.1}$$

上式中k為積分常數。

（推導過程，請參見附錄 B-B.3）

本研究將分別針對最佳解是屬於**情況(Ⅰ)**或屬於**情況(Ⅱ)**來加以探討，最後並將該結果加以聯結。

4.3.1 假設最佳解是屬於情況(Ⅰ)

利用$x^*(T)=B$，則可解得(4.3.1)式中之積分常數k如下：

$$k=\frac{c_2}{\int_{t_{x^*}}^{T}u(s)\,ds}\cdot\left(\frac{2c_3B}{c_2}-\int_{t_{x^*}}^{T}s\cdot u(s)\,ds\right) \tag{4.3.2}$$

情況(I.1)：假設 $t_{x^*}=0$

由(4.3.1)式及(4.3.2)式，可得$x^*(t)$如下：

$$x^*(t)=\int_0^t\left(\frac{c_2}{2c_3}\cdot s+\frac{k}{2c_3}\right)\cdot u(s)\,ds\text{，}\forall\, t\in[0,T] \tag{4.3.3}$$

式中之積分常數k如下：

$$k=\frac{c_2}{\int_0^{T}u(s)\,ds}\cdot\left(\frac{2c_3B}{c_2}-\int_0^{T}s\cdot u(s)\,ds\right) \tag{4.3.4}$$

由(4.3.3)式與上述的**推論**得知，$x^{*}{}'(t)\ge 0$，$\forall\, t\in[0,T]$之充要條件為$k\ge 0$；又

由(4.3.4)式知，$k\ge 0$之充要條件為$\dfrac{2c_3B}{c_2}\ge\int_0^T s\cdot u(s)\,ds$。

情況(I.2)：假設$t_{x^*}>0$

此時之t_{x^*}是一個決策變數（free）。由起始時點為決策變數之邊界可移性條件（Transversality Condition；即最佳生產起始時點t_{x^*}必須要滿足的條件）（Kamien & Schwartz, 1991, p.57），可得

$$x^{*}{}'(t_{x^*}) = 0 \tag{4.3.5}$$

（推導過程，請參見附錄 B-B.4）

由(4.3.1)式及(4.3.5)式，得$\left(\frac{c_2}{2c_3}\cdot t_{x^*} + \frac{k}{2c_3}\right)\cdot u(t_{x^*}) = 0$，即$k = -c_2 \cdot t_{x^*}$。將此結果分別代入(4.3.1)式及(4.3.2)式，得

$$x^*(t) = \int_{t_{x^*}}^{t} \frac{c_2}{2c_3}\cdot\left(s - t_{x^*}\right)\cdot u(s)\, ds \text{，} \forall\, t \in [\, t_{x^*}, T\,] \tag{4.3.6}$$

且t_{x^*}必須滿足下列之關係式：

$$\int_{t_{x^*}}^{T} (s - t_{x^*})\cdot u(s)\, ds = \frac{2c_3 B}{c_2} \tag{4.3.7}$$

由**推論**及(4.3.5)式可知，$x^{*}{}'(t) \geq 0$必成立，$\forall\, t \in [\, t_{x^*}, T\,]$。此外，由(4.3.7)式可以得到，$t_{x^*} > 0$之充要條件為不等式$\int_0^T s\cdot u(s)\, ds > \frac{2c_1 B}{c_2}$必須成立。

綜合上述之**情況(I.1)**與**情況(I.2)**的分析，若**模式(Ⅲ)**之最佳解是屬於**情況(Ⅰ)**，則可得如下的結果：

1.若$\int_0^T s\cdot u(s)\, ds \leq \frac{2c_3 B}{c_2}$，則$t_{x^*} = 0$，且$x^*(t) = \int_0^t \left(\frac{c_2}{2c_3}\cdot s + \frac{k}{2c_3}\right)\cdot u(s)\, ds$，

$\forall\, t \in [\,0, T\,]$，式中 $k = \dfrac{c_2}{\int_0^T u(s)\,ds} \cdot \left(\dfrac{2c_3 B}{c_2} - \int_0^T s \cdot u(s)\,ds \right)$。

2.若 $\int_0^T s \cdot u(s)\,ds > \dfrac{2c_3 B}{c_2}$，則 $t_{x^*} > 0$，t_{x^*} 由等式 $\int_{t_{x^*}}^T (s - t_{x^*}) \cdot u(s)\,ds = \dfrac{2c_3 B}{c_2}$ 唯一決定，

且 $x^*(t) = \int_{t_{x^*}}^t \dfrac{c_2}{2c_3} \cdot \left(s - t_{x^*}\right) \cdot u(s)\,ds$，$\forall\, t \in [\,t_{x^*}, T\,]$。

4.3.2 假設最佳解是屬於情況(Ⅱ)

由(4.3.1)式知 $x^*(t) = \int_{t_{x^*}}^t \left(\dfrac{c_2}{2c_3} \cdot s + \dfrac{k}{2c_3} \right) \cdot u(s)\,ds$，$\forall\, t \in [\,t_{x^*}, T_{x^*}\,]$，式中 T_{x^*} 為最佳全產能生產起始時點，它是一個決策變數且滿足如下的關係式

$$x^*(T_{x^*}) = B - \int_{T_{x^*}}^T u(s)\,ds \tag{4.3.8}$$

由邊界可移性條件（Transversality Condition；即殘值問題之終點與終點值滿足一定關係式時之條件）（Kamien & Schwartz, 1991, p.71），可得

$$x^{*\prime}(T_{x^*}) = u(T_{x^*}) \tag{4.3.9}$$

（推導過程，請參見附錄 B-B.5）

利用(4.3.9)式，得積分常數 $k = 2c_3 - c_2 T_{x^*}$；且 $x^*(t)$ 如下：

$$x^*(t) = \int_{t_{x^*}}^t \left(1 - \frac{c_2}{2c_3} \cdot (T_{x^*} - s) \right) \cdot u(s)\,ds \text{，} t \in [\,t_{x^*}, T_{x^*}\,] \tag{4.3.10}$$

利用(4.3.8)式及(4.3.10)式，得t_{x^*}與T_{x^*}必須滿足下列的關係式：

$$\int_{t_{x^*}}^{T_{x^*}} \left(T_{x^*} - s\right)\cdot u(s)\, ds = \frac{2c_3}{c_2}\cdot\left\{\int_{t_{x^*}}^{T} u(s)\, ds - B\right\} \tag{4.3.11}$$

此外，可以證明下列之等式恒成立：

$$t_{x^*} = 0 \tag{4.3.12}$$

（**證明請參見附錄 B-B.6**）

若結合(4.3.11)式及(4.3.12)式，則得T_{x^*}由下列關係式所唯一決定：

$$\int_{0}^{T_{x^*}} \left(T_{x^*} - t\right)\cdot u(t)\, dt = \frac{2c_3}{c_2}\cdot\left\{\int_{0}^{T} u(t)\, dt - B\right\} \tag{4.3.13}$$

由(4.3.13)式可以證明，若**模式(Ⅲ)**之最佳解是屬於**情況(Ⅱ)**，則其充要條件為不等式$\int_0^T (T-t)\cdot u(t)\, dt - \frac{2c_3}{c_2}\cdot\left\{\int_0^T u(t)\, dt - B\right\} > 0$必須成立；此時，$T_{x^*}$由(4.3.13)式唯一決定，且$x^*(t)$如下：

$$x^*(t) = \int_0^t \left(1 - \frac{c_2}{2c_3}\cdot(T_{x^*} - s)^+\right)\cdot u(s)\, ds \text{ ， } \forall\, t \in [\,0, T\,] \tag{4.3.14}$$

4.3.3　模式(Ⅲ)之最佳解

由第 4.3.2 節之分析結果可以得到**模式(Ⅲ)**的最佳解如下：

1.當$\int_0^T (T-t)\cdot u(t)\, dt - \frac{2c_3}{c_2}\cdot\left\{\int_0^T u(t)\, dt - B\right\} > 0$時，得$t_{x^*} = 0$且$0 < T_{x^*} < T$，其中$T_{x^*}$由

等式$\int_0^{T_{x^*}} \left(T_{x^*} - t\right) \cdot u(t)\, dt = \frac{2c_3}{c_2} \cdot \left\{\int_0^T u(t)\, dt - B\right\}$唯一決定；且$x^*(t)$如下：

$$x^*(t) = \int_0^t \left(1 - \frac{c_2}{2c_3} \cdot (T_{x^*} - s)^+\right) \cdot u(s)\, ds \text{ ，} \forall\, t \in [\,0, T\,] \text{。}$$

2.當$\int_0^T (T - t) \cdot u(t)\, dt - \frac{2c_3}{c_2} \cdot \left\{\int_0^T u(t)\, dt - B\right\} \leq 0$時，得

(1) 若$\int_0^T s \cdot u(s)\, ds - \frac{2c_3 B}{c_2} \leq 0$，則$t_{x^*} = 0$，且$x^*(t)$如下：

$$x^*(t) = \int_0^t \left(\frac{c_2}{2c_3} \cdot s + \frac{k}{2c_3}\right) \cdot u(s)\, ds \text{ ，} \forall\, t \in [\,0, T\,] \text{，}$$

式中 $k = \frac{c_2}{\int_0^T u(s)\, ds} \cdot \left(\frac{2c_3 B}{c_2} - \int_0^T s \cdot u(s)\, ds\right)$。

(2) 若$\int_0^T s \cdot u(s)\, ds - \frac{2c_3 B}{c_2} > 0$，則$t_{x^*} > 0$，其中$t_{x^*}$由等式

$$\int_{t_{x^*}}^T (s - t_{x^*}) \cdot u(s)\, ds = \frac{2c_3 B}{c_2}$$唯一決定；且$x^*(t)$如下：

$$x^*(t) = \int_{t_{x^*}}^t \frac{c_2}{2c_3} \cdot \left(s - t_{x^*}\right) \cdot u(s)\, ds \text{ ，} \forall\, t \in [\,t_{x^*}, T\,] \text{。}$$

4.4　決策意涵及敏感度分析

在本問題中的最佳生產函數為x^*；其中最佳生產函數x^*所對應的最佳生產起始時點t_{x^*}及最佳全產能生產起始時點T_{x^*}，具有其管理意義。對於一個生產決策者而言，是否能掌握t_{x^*}及T_{x^*}的資訊，是最佳生產計畫能否被有效執行的關鍵；因此，本節研究內容將聚焦在t_{x^*}及T_{x^*}的參數分析，並說明其意涵。

給定產能上限$u(t)$後，稱DF_2、DF_3及DF_4為對應於模式參數的決策準則函數，其定義分別如下：

$$DF_2(B,T) = \int_0^T u(t)\,dt - B \tag{4.4.1}$$

$$DF_3(c_3,c_2,B,T) = \int_0^T (T-t)\cdot u(t)\,dt - \frac{2c_3}{c_2}\cdot\left\{\int_0^T u(t)\,dt - B\right\} \tag{4.4.2}$$

$$DF_4(c_3,c_2,B,T) = \int_0^T t\cdot u(t)\,dt - \frac{2c_3B}{c_2} \tag{4.4.3}$$

由**模式(Ⅲ)**的限制式及第 4.3 節的結果可知：函數DF_2之值的大小為決策者應否承接新訂單的判斷準則；函數DF_3之值的大小是在承接新訂單後，是否應採取「全產能生產」措施的判斷準則；函數DF_4之值的大小則是於承接新訂單後，在完全不用採取「全產能生產」措施的情況下，是否應採取「立即生產（**IP**）」的判斷準則。

當生產決策者面臨新的訂單時，對已經評估確定的產能上限值$u(t)$，首先必須評估函數DF_2之值，以初步決定是否承接此新的訂單。當承接該

訂單後，其生產的決策有可能須涉及「全產能生產」，也有可能完全不涉及「全產能生產」，其決策準則依函數 DF_3 之值而定。不涉及「全產能生產」是生產決策者應優先考慮的生產方式；而此時是否應採取「立即生產（**IP**）」，其決策準則依函數 DF_4 之值而定。因此，生產決策者在面臨新的訂單，當完全不採取「全產能生產」且又無法達到預期的生產目標時，將會退而採取部份或全部「全產能生產」的措施；若此時仍無法達到預期的生產目標時，則將再進一步地探討如何藉由參數的調整或產能水準的擴充，以資因應，達成目標。

由第 4.3 節的最佳解可知，當整個生產製程中完全不涉及「全產能生產」時，是沒有 T_{x^*} 的決定問題（此時僅須對 t_{x^*} 作決定即可）。又當必須涉及「全產能生產」時，則僅須對 T_{x^*} 作決定（因為此時 $t_{x^*}=0$ 恆成立，參見(4.3.12)式）。對已評估確定的產能上限值 $u(t)$，決策變數 t_{x^*} 及 T_{x^*} 二者均與參數 c_3、c_2、B 及 T 有關，其中參數 c_3 與 c_2 是生產者內部與成本有關的因素；而參數 B 與 T 則是生產者外在的訂單需求因素，它們是隨著顧客的訂單需求而異。一旦生產決策者面臨此新訂單後，生產決策者就可以根據這些參數及產能上限值 $u(t)$，透過決策準則函數 DF_2、DF_3 及 DF_4 等值的大小，計算出 t_{x^*} 或 T_{x^*} 之值，進而求得最佳生產函數 x^* 的對應型態，以資執行。

因為決策準則函數為參數 c_3、c_2、B 及 T 的函數；因此，本節將首先探討當各參數之值改變時，對決策準則函數的影響。其次探討當各參數之值改變時，對 t_{x^*} 或 T_{x^*} 的影響；最後再探討當產能上限值 $u(t)$ 整個變動時，對

整個生產決策的影響。

4.4.1 決策準則函數的決策意涵及參數分析

根據決策準則函數 DF_2 、 DF_3 及 DF_4 的參數條件，本研究展示**模式(Ⅲ)**最佳解的具體性質如下：

1.假設函數值 $DF_2 < 0$ ：（此情況之最佳決策記為 DM1）

此時生產決策者即使在各時點 t 皆以最大產能 $u(t)$ 生產，在時點 T 仍是無法達到應交貨數量 B 的生產目標；因此，其最佳生產函數（**模式(Ⅲ)**的最佳解）是不存在的。這表示生產決策者應該放棄承接該訂單。

如果生產決策者仍欲承接該訂單，則必須思維如何擴充其原有產能 $u(t)$ 的方式為之。

2.假設函數值 $DF_2 = 0$ ：（此情況之最佳決策記為 DM2）

此時 $t_{x^*} = T_{x^*} = 0$。此表示最佳生產計畫屬於立即生產（**IP**）的情況，且於開始生產時就應立即採取「全產能生產」的措施。

此時的生產決策完全取決於參數 B、T 值及產能上限 $u(t)$ 的大小，而與成本因素參數 c_3 、 c_2 之大小無關，其最佳生產函數為 $x^*(t) = \int_0^t u(s)\, ds$ ，$\forall\, t \in [0, T]$。

3.假設函數值 $DF_2 > 0$ 且 $DF_3 > 0$ ：（此情況之最佳決策記為 DM3）

此時 $t_{x^*} = 0$ 且 $0 < T_{x^*} < T$ ，其中 T_{x^*} 由(4.3.13)式唯一決定；此表示最佳生產計畫屬於立即生產（**IP**）的情況，且於時點 T_{x^*} 後就應該採取「全產能生

產」的措施。此時之最佳生產函數為 $x^*(t)$ ，如(4.3.14)式。

4.假設函數值 $DF_2 > 0$ 且 $DF_3 \le 0$ 且 $DF_4 \le 0$ ：（此情況之最佳決策記為 DM4）此時 $t_{x^*} = 0$ ；這表示最佳生產計畫屬於立即生產（**IP**）的情況，且整個生產製程均不必採「全產能生產」的措施。此時之最佳生產函數為 $x^*(t)$ ，如(4.3.3)及(4.3.4)式。

5.假設函數值 $DF_2 > 0$ 且 $DF_3 \le 0$ 且 $DF_4 > 0$ ：（此情況之最佳決策記為 DM5）此時 $t_{x^*} > 0$ ，且 t_{x^*} 由(4.3.7)式唯一決定；這表示最佳生產計畫屬於延後生產（**DP**）的情況；即於承接訂單後，在時點 t_{x^*} 才開始生產，且整個生產製程均不必採「全產能生產」的措施。此時之最佳生產函數為 $x^*(t)$ ，如(4.3.6)式。

對於上述五種不同參數狀況之最佳生產決策方式，本研究進一步建立其決策流程，如**附錄 B-B.7** 所示。當生產決策者面對新訂單時，生產決策者應該採取何種最佳生產決策方式，則是完全取決於決策準則函數 DF_2 、DF_3 及 DF_4 之值。對給定的產能上限值 $u(t)$，決策準則函數 DF_2、DF_3 及 DF_4 相對於各參數的變化，如**表 4.1** 所示。

表 4.1 參數變動對決策準則函數 DF_2、DF_3 及 DF_4 的影響分析

參數 決策準則函數	c_3	c_2	B	T
DF_2（參見(3-4.1)式）	×	×	－	＋
DF_3（參見(3-4.2)式）	－	＋	＋	＋
DF_4（參見(3-4.3)式）	－	＋	－	＋

註：「＋」表示決策準則函數為參數的增函數；「－」表示決策準則函數為參數的減函數；「×」表示決策準則函數與參數無關。

由表 4.1 可得下面的性質：

1.由決策準則函數 DF_2 的定義可知，它與參數 c_3 及 c_2 之值無關。這表示生產決策者面對新訂單，當考量是否有準時交貨之能力時，是與生產作業成本及存貨成本因素無關，僅取決於客戶訂單的交貨數量 B 與交貨期限 T 之值。

整體而言，當 B 值愈小、T 值愈大時，則愈容易使得函數 DF_2 的值大於 0 成立；因此，愈有利於生產決策者具有「承接該新訂單」之能力。

2.決策準則函數 DF_3 是同時與參數 c_3、c_2、B 及 T 之值有關；即生產決策者於承接新訂單後，在生產製程中應否必須採取「全產能生產」之措施是取決於參數 c_3、c_2、B 及 T 之值的相對大小關係。

整體而言，當 c_3 值愈大、c_2 值愈小、B 值愈小、T 值愈小時，則愈容易使得函數 DF_3 的值小於 0 成立；因此，愈支持生產決策者不必採取「全產能生產」的措施。

3.決策準則函數 DF_4 是同時與參數 c_3 、 c_2 、 B 及 T 之值有關；即生產決策者於承接新訂單後，在生產製程中完全不必採取「全產能生產」措施的情況下，其應採取「立即生產（**IP**）」或「延後生產（D**P**）」是取決於參數 c_3 、 c_2 、 B 及 T 之值的相對大小關係。

整體而言，當 c_3 值愈大、c_2 值愈小、B 值愈大、T 值愈小時，則愈容易使得函數 DF_4 的值小於 0 成立；因此，愈支持生產決策者採取「立即生產（**IP**）」的決策。

4.4.2 決策變數的參數分析

本節將聚焦在決策變數 t_{x^*} 及 T_{x^*} 的分析上。由 4.4.1 節可知，此二者係依各決策準則函數之值而定。對給定的產能上限值 $u(t)$ ，僅當函數值 $DF_2 > 0$ 、 $DF_3 \le 0$ 、 $DF_4 > 0$ 時，決策變數 t_{x^*} 之值才與參數 c_3 、 c_2 、 B 及 T 之值有關；而當函數值 $DF_2 > 0$、$DF_3 > 0$ 時，決策變數 T_{x^*} 之值才與參數 c_3、c_2、B 及 T 之值有關。此時，可以得到決策變數 t_{x^*} 及 T_{x^*} 相對於各參數的變化，如表 **4.2** 所示。

（推導過程，請參見附錄 B-B.8）

表 4.2 參數變動對決策變數 t_{x^*} 與 T_{x^*} 的影響分析

參數 / 決策變數	c_3	c_2	B	T	決策準則函數的條件
T_{x^*}；$0<T_{x^*}<T$（參見(3.3.13)式）	＋	－	－	＋	$DF_2>0$ 、 $DF_3>0$
t_{x^*}；$t_{x^*}>0$（參見(3.3.7)式）	－	＋	－	＋	$DF_2>0$ 、 $DF_3\le 0$ 、 $DF_4>0$

註:「＋」表示決策變數為參數的增函數;「－」表示決策變數為參數的減函數。

由表 **4.2** 可得下列的性質：

1.當函數值 $DF_2>0$ 、 $DF_3\le 0$ 、 $DF_4>0$ 時，得 $t_{x^*}>0$ ；此情況之最佳生產計畫為「延後生產（**DP**）」，且在整個生產製程中完全不必採取「全產能生產」的措施。

整體而言，當 c_3 值愈大、c_2 值愈小、B 值愈大、T 值愈小時，則愈容易使得 t_{x^*} 的值接近於 0；因此，將使得「延後生產（**DP**）」的時間長度縮短，愈容易趨使生產決策者採取「立即生產（**IP**）」的決策。

2.當函數值 $DF_2>0$、$DF_3>0$ 時，得 $0<T_{x^*}<T$ ；此情況之最佳生產計畫為「立即生產（**IP**）」，且在整個生產製程中部份時段必須採取「全產能生產」的措施。

整體而言，當 c_3 值愈大、c_2 值愈小、B 值愈小、T 值愈大時，則愈容易使得 T_{x^*} 的值接近於 T ；因此，愈容易使得最佳「全產能生產」的起始時點延後發生。

4.4.3 產能變動對最佳解的影響

當生產決策者面臨新訂單時，如果在現有評估所得的產能水準下，無法達成該訂單的生產目標，但又不想失去此訂單；於此情況下，生產決策者為了要承接該訂單，並能達成該訂單的生產目標，則他必須適度地調整相關的參數值。然而，對於顧客的需求條件（參數B或T）是相對地較難改變，但生產者本身內部的因素（參數c_3、c_2或產能上限值$u(t)$）則相對地較容易處理。

在生產者內部之生產作業成本及存貨成本因素不變的情況下，當各時點之產能上限值$u(t)$因增加設備或採取其它可增加產能水準的措施（如向同業調貨等）後，使得生產製程中的產能水準整體提昇m時（即新的產能上限值為$u_1(t)=u(t)+m$，$m>0$，$\forall\, t\in[0,T]$）；則此時對於決策準則函數DF_2、DF_3、DF_4的影響將會如何？

本研究將產能上限值由$u(t)$變動至$u_1(t)$時其相對應的決策準則函數，記作DF_2^m、DF_3^m、DF_4^m；則經由它們對m的分析，可以得到下面的結果：

1. 函數DF_2^m之值隨著m值的增加而增大；這表示可經由提昇整體產能水準的策略，而提高「承接新訂單」的能力。
2. 函數DF_3^m之值隨著m值的增加而減小；這表示可經由提昇整體產能水準的策略，而提高不必採取「全產能生產」措施的可能性。
3. 函數DF_4^m之值隨著m值的增加而增大；這表示經由提昇整體產能水準的策略，可以延緩採取「立即生產（**IP**）」的急迫性壓力。

上面的分析結果顯示，提昇整體產能水準是可以提高承接新訂單與節省成本的能力；但是，生產者藉由於提昇整體產能水準而所得到的經濟效益，相對於其花在提昇整體產能水準所必須付出的成本而言是否值得，這仍需要再作進一步地評估。

4.5 小結

本問題是假設單位時間之單位生產作業成本為產能利用率的線性函數及單位存貨成本為常數，且在考量每個時點之產能皆受限制的情況下，追求其總成本（含生產作業成本及存貨成本）的最小化。對於單一交貨期，本研究的結論如下：

1.當生產決策者面臨新訂單時，可以根據函數 DF_2 之值（參見(4.4.1)式），作為其是否有能力承接此新訂單的初步決策。在所評估的產能水準下，當 $DF_2 \geq 0$ 時，才可以承接該新訂單；而當 $DF_2 < 0$ 時，則應該放棄承接該新訂單，或採取提昇整體產能水準的措施並重新評估以承接該新訂單。此情況是完全沒有涉及生產與存貨之成本因素的考量。

2.當生產決策者於承接新訂單後，他有可能在整個生產製程中完全不必採取「全產能生產」的措施；如果必須採取「全產能生產」的措施，則可以證明該最佳「全產能生產」的區段，必發生在整個生產製程的最後階段（參見**第 4.3 節**的**推論**）。

3.本研究是使用產能利用率來描述生產作業成本；根據所建構之數學模式

的假設，採取「全產能生產」措施是較耗費成本的；而整個生產製程中是否必須採取「全產能生產」的措施，其決策工具為函數 DF_3 之值（參見(4.4.2)式）。當 $DF_3 \le 0$ 時，則於開始生產後，整個生產製程完全不必採取「全產能生產」的措施，就可達成準時供貨的目標；而當 $DF_3 > 0$ 時，則於開始生產後的某特定時點，生產製程就必須採取「全產能生產」的措施，才能達成準時供貨的目標。

4.在最佳生產計畫中，t_{x^*} 表示最佳生產起始時點（其中 x^* 為最佳生產函數）。當在生產製程中必須採取「全產能生產」的措施時，則 $t_{x^*} = 0$ 必成立（參見(4.3.12)式），且此時之最佳「全產能生產」起始時點 T_{x^*}，則由(4.3.13)式所唯一決定。

5.當於整個生產製程中完全不必採取「全產能生產」的措施時，生產決策者應該採取「立即生產（**IP**）」或「延後生產（**DP**）」，其決策工具為函數 DF_4 之值（參見(4.4.3)式）。當 $DF_4 \le 0$ 時，則必須採取「立即生產（**IP**）」；當 $DF_4 > 0$ 時，則採取「延後生產（**DP**）」，且其最佳延後生產的生產起始時點 t_{x^*}，由(4.3.7)式所唯一決定。

6.在生產者內部之成本因素不變的情況下，當產能上限值 $u(t)$ 因增加設備或採行其它可增加產能水準的措施，且使得整個生產製程中的產能水準整體提昇時，將使得承接新訂單的可能性增加；同時，也將使得最佳「全產能生產」的起始時點延後發生，甚至可能不會發生；而在完全不必採取「全產能生產」的措施時，其最佳生產起始時點亦將延後發生。因此，

整體產能水準的提昇是有助於提高承接新訂單與節省成本的能力。

7.本問題對於所探討的最佳生產計畫，本研究提供五種生產決策方式（DM1、DM2、DM3、DM4、DM5），並進一步製作成最佳生產決策流程（**請參見附錄 B-B.7**）及流程圖（如**圖 4.1** 所示），以供生產決策者的生產決策參考。

總之，一個製造商的生產決策者，當處於今日瞬息萬變的動態環境中時，掌握先機是該生產決策者必備的概念與能力，能掌握資訊並適時作最適的規劃更是相當重要的一件事。本研究所提供的五種生產決策方式，可進一步地製作成電腦程式，這是生產決策者掌握先機的利器。對於面臨新的訂單（緊急訂單），生產決策者經由其內外在因素的迅速評估並執行，不僅能迎合顧客的訂單需求，並可使公司獲致最大效益。

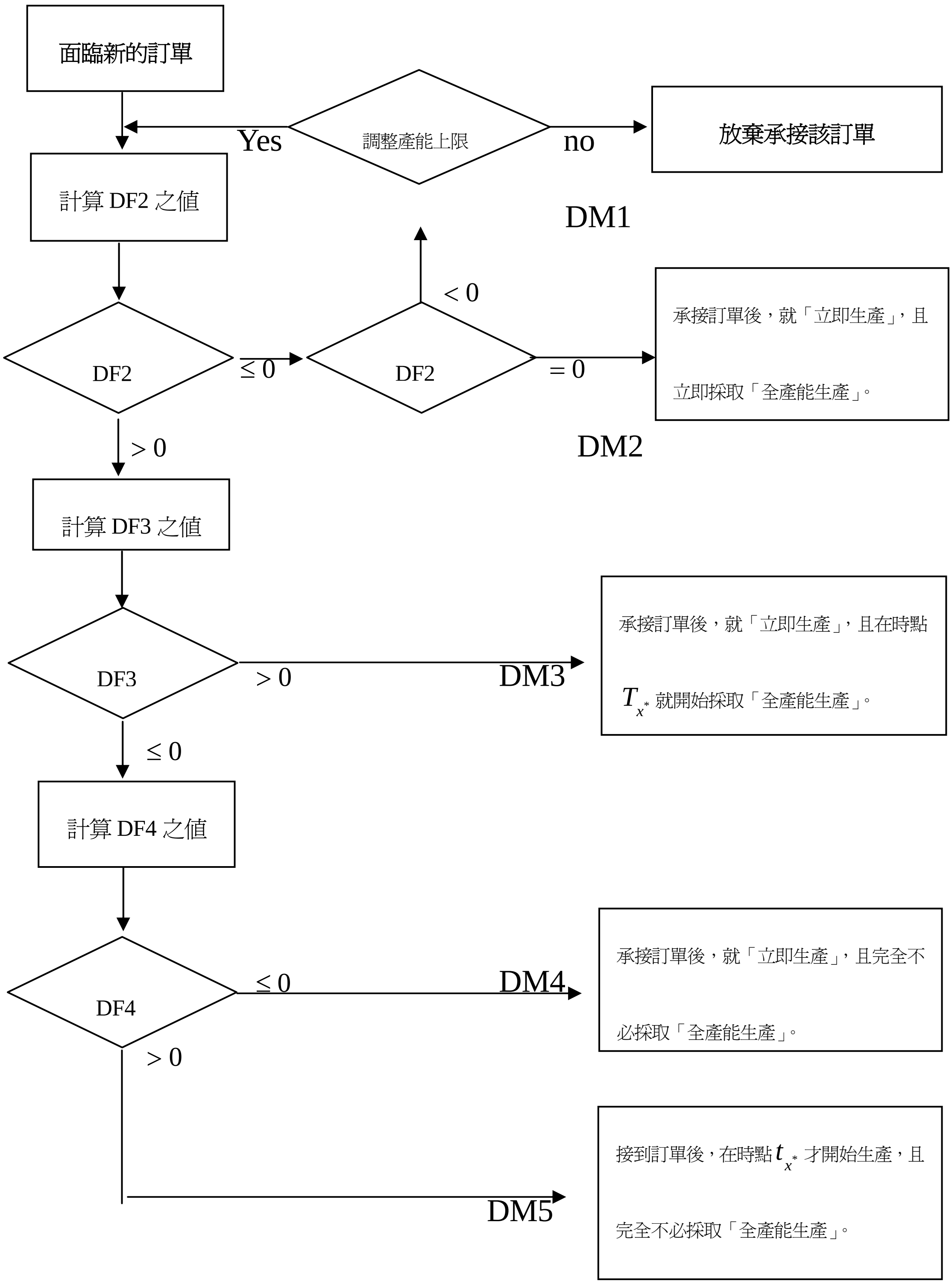


圖 4.1 各時點產能皆受限制之單一交貨日期的最佳生產決策流程

第五章　各時點產能未受限制之兩個不同交貨日期的最佳生產計畫模式

本章係延續第三章，在不考慮生產製程中每個時點之產能受限的情況下，針對兩個不同交貨日期的訂單，來探討其最佳的生產計畫模式。本章仍將藉由問題分析，以了解問題的特性；然後在基本假設下，利用第三章的模式建構方式及其最佳解結果，構建此問題的數學模式並尋求其最佳解、作最佳解的敏感度分析；最後，小結此問題之最佳解的管理意涵並提出本問題之最佳生產的決策流程圖，以供參考。

5.1　問題分析

假設在整個生產製程中，生產者之可供生產使用的資源均能充份地供應，即沒有產能受限的壓力。此時，不管生產決策者所面對的是何種狀況的新訂單，他仍必須面對著生產作業成本（含單位成本及整備成本等）、存貨成本、交貨數量與交貨期限等的壓力。

本問題是針對同型態的產品，且聚焦在兩個不同交貨日期（它可以是單一訂單或多個訂單的組合）之訂單式生產的生產計畫模式之建構與求解。當一個生產決策者在承接兩個不同交貨日期的訂單後，他必須抉擇在何時間點開始生產、應以何種的生產速率來從事生產、以及是否必須於第一期交貨前額外多生產一些數量，才能如期地交足貨品數量且使得其總成

本（含生產作業成本、存貨成本）為最小。

在滿足相關的訂單需求且使得其總成本為最小的情況下，本研究藉由單一交貨日期之訂單式生產的生產計畫模式（未考慮產能受限制）及其最佳解之結果，進一步來探討兩個不同交貨日期之訂單式生產的生產計畫模式及其最佳解；並探討最佳解中重要參數的敏感度分析及其管理意涵。最後，本研究圖示一個最佳生產的決策流程，以作為生產實務決策者之生產決策的參考。

5.2　基本假設

本問題是考慮各時點產能未受限制之情形下，藉由單一交貨日期的最佳生產計畫模式來加以探討的。本問題之數學模式製作的基本假設，與第三章所陳述的大致相同；其方法則是要藉由**模式(Ⅰ)**之最佳解的結果，將其推展到兩個不同交貨日期之數學模式的求解分析。

本研究令**模式(Ⅰ)**之最佳解的目標值函數為 $L(B,T)$ ，其定義如下：

$$L(B,T)=\int_{t_{w^*}(B)}^{T}\left[c_1\left(w_B^{*}{}'(t)\right)^2+c_2 w_B^*(t)\right]dt \tag{5.2.1}$$

式中 $t_{w^*}(B)$ 及 $w_B^*(t)$ 表示 t_{w^*} 與 $w^*(t)$ 均為參數 B 的函數。考慮 $L(B,T)$ 對參數 B 之一階及二階偏導數，可得：

$$\frac{\partial L(B,T)}{\partial B}=\begin{cases} c_2T+2c_1\left(\dfrac{B}{T}-\dfrac{c_2T}{4c_1}\right) & , \quad B\geq\dfrac{c_2T^2}{4c_1} \qquad (5.2.2)\\ 2\sqrt{c_1c_2B} & , \quad B<\dfrac{c_2T^2}{4c_1} \qquad (5.2.3)\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 L(B,T)}{\partial B^2}=\begin{cases} \dfrac{2c_1}{T} & , \quad B\geq\dfrac{c_2T^2}{4c_1} \qquad (5.2.4)\\ \sqrt{\dfrac{c_1c_2}{B}} & , \quad B<\dfrac{c_2T^2}{4c_1} \qquad (5.2.5)\end{cases}$$

（推導過程，請參見附錄 A-A.3）

5.3　模式的建構

假設生產者承接新訂單（單一個訂單或多個訂單的組合），並被要求在未來的時點T_1及T_2須分別交貨品數量B_1及B_2單位，其中B_1、B_2、T_1及T_2均為已知的參數。針對此兩個不同交貨日期T_1與T_2之訂單式生產的生產計畫，生產決策者必須抉擇生產起始時點、以何種的生產速率來從事生產，以及於第一期交貨前必須額外生產多少的數量，才能如期分別交足貨品數量且使得整個生產製程的總成本（含生產作業成本、存貨成本）為最小。

使用前面所介紹的函數及參數符號，同時仿照第三章建構數學模式的方式，則可以得到兩個不同交貨日期之生產計畫的數學模式，如下：

$$\textbf{(IV)}\quad \begin{cases} \underset{W}{Min}\ \displaystyle\int_{t_W}^{T_1}\left[\,c_1\big(W'(t)\big)^2+c_2W(t)\,\right]dt+\int_{T_1}^{T_2}\left[\,c_1\big(W'(t)\big)^2+c_2\big(W(t)-B_1\big)\,\right]dt \\ s.t.\ W(t_W)=0\,,\,t_W\geq 0\,,\,W(T_1)\geq B_1, W(T_2)=B_1+B_2, W'(t)\geq 0, \forall\, t\in[\,t_W\,,\,T_2\,] \end{cases}$$

（構建過程，請參見附錄 C-C.1）

利用變數變換的方法，可將**模式(Ⅳ)**中之第二個積分式，重新表示如下：

$$\int_0^{T_2-T_1}\left\{c_1(W'(t+T_1))^2+c_2(W(t+T_1)-W(T_1))\right\}dt+c_2\big(W(T_1)-B_1\big)\big(T_2-T_1\big) \tag{5.3.1}$$

任意給定**模式(Ⅳ)**的一個可行解W，此W可對應一組函數(y,z)，如下：

$$\begin{cases} y(t)=W(t) & , \quad t_W\le t\le T_1 \\ z(t)=W(t+T_1)-W(T_1) & , \quad 0\le t\le T_2-T_1 \end{cases} \tag{5.3.2}$$

反之，若任給一組函數(y,z)，其中$y(t)$為定義在時間區間$[\,t_y,T_1\,]$之增函數，且$t_y=Max\left\{t \mid y(t)=0,\, t\in[\,0,T_1\,]\right\}$；$z(t)$為定義在時間區間$[\,0,T_2-T_1\,]$之增函數；利用(5.3.2)式，函數$(y,z)$亦可對應**模式(Ⅳ)**之一個可行解$W$。此外，因為$W(T_1)\ge B_1$，故存在一個實數$a$，$a\in[\,0,B_2\,]$，使得$W(T_1)=B_1+a$。

利用(5.3.1)式、(5.3.2)式與等式$W(T_1)=B_1+a$，則**模式(Ⅳ)**可以表示如下：

(Ⅴ) $\underset{a\in[\,0,B_2\,]}{Min}\ f(a)$

其中$f(a)$如下：

(Ⅵ) $$f(a)=\begin{cases} \underset{(y,z)}{Min}\ \int_{t_y}^{T_1}\Big[c_1\big(y'(t)\big)^2+c_2 y(t)\Big]dt+\int_0^{T_2-T_1}\Big[c_1\big(z'(t)\big)^2+c_2 z(t)\Big]dt+c_2 a\big(T_2-T_1\big) \\ \quad s.t.\quad y(t_y)=0,\ t_y\ge 0,\ y(T_1)=B_1+a,\ y'(t)\ge 0,\ \forall t\in[\,t_y,T_1\,] \\ \qquad\qquad z(0)=0,\ z(T_2-T_1)=B_2-a,\ z'(t)\ge 0,\ \forall t\in[\,0,T_2-T_1\,] \end{cases}$$

當給定函數z之後，若令$t_z=Max\left\{t \mid z(t)=0,\, t\in[\,0,T_2-T_1\,]\right\}$，則**模式(Ⅵ)**中之第二個積分式可改寫為$\int_{t_z}^{T_2-T_1}\left(c_1(z'(t))^2+c_2 z(t)\right)dt$；因此，**模式(Ⅵ)**可進一步地表示如下：

(Ⅶ) $$f(a)=\begin{cases} \underset{y}{Min}\ \int_{t_y}^{T_1}\left[c_1(y'(t))^2+c_2y(t)\right]dt\ +\underset{z}{Min}\int_{t_z}^{T_2-T_1}\left[c_1(z'(t))^2+c_2z(t)\right]dt+c_2a(T_2-T_1) \\ \quad s.t.\quad y(t_y)=0,\ t_y\ge 0,\ y(T_1)=B_1+a,\ y'(t)\ge 0,\ \forall t\in[t_y,T_1] \\ \qquad\qquad z(t_z)=0,\ t_z\ge 0,\ z(T_2-T_1)=B_2-a,\ z'(t)\ge 0,\ \forall t\in[t_z,T_2-T_1] \end{cases}$$

對給定的a，得**模式(Ⅵ)**之可行解為(y,z)，其中y與z均可視為a的函數。令a^*為**模式(Ⅴ)**的最佳解、W^*為**模式(Ⅳ)**的最佳解；若能尋得a^*，則就可以得到W^*；因此，本研究首先將致力於尋找最佳解a^*。

若令$L_1(a)$及$L_2(a)$分別為下列兩個模式在其最佳解時的目標值函數，則**模式(Ⅶ)**可以改寫成為$f(a)=L_1(a)+L_2(a)+c_2a(T_2-T_1)$。

$$\begin{cases} \underset{y}{Min}\ \int_{t_y}^{T_1}\left[c_1(y'(t))^2+c_2y(t)\right]dt \\ \quad s.t.\quad y(t_y)=0, t_y\ge 0, y(T_1)=B_1+a\ , \\ \qquad\qquad y'(t)\ge 0, \forall t\in[t_y,T_1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underset{z}{Min}\ \int_{t_z}^{T_2-T_1}\left[c_1(z'(t))^2+c_2z(t)\right]dt \\ \quad s.t.\quad z(t_z)=0, t_z\ge 0, z(T_2-T_1)=B_2-a\ , \\ \qquad\qquad z'(t)\ge 0, \forall t\in[t_z,T_2-T_1] \end{cases}$$

5.4 模式的求解

利用(5.2.1)式，可以得到$f(a)$如下：

$$f(a)=L(B_1+a\ ,T_1)+L(B_2-a\ ,T_2-T_1)+c_2a(T_2-T_1)$$

將$f(a)$對a微分，得$f'(a)$如下：

$$f'(a)=\left.\frac{\partial L(B,T_1)}{\partial B}\right|_{B=B_1+a}-\left.\frac{\partial L(B,T_2-T_1)}{\partial B}\right|_{B=B_2-a}+c_2\left(T_2-T_1\right) \tag{5.4.1}$$

利用(5.2.4)式及(5.2.5)式，可更進一步地得到 $f''(a)$ 如下：

$$f''(a)=\begin{cases}\dfrac{2c_1}{T_1}+\dfrac{2c_1}{T_2-T_1} & ,\ B_1+a\geq\dfrac{c_2T_1^2}{4c_1}\text{ 且 }B_2-a\geq\dfrac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}\\ \dfrac{2c_1}{T_1}+\sqrt{\dfrac{c_1c_2}{B_2-a}} & ,\ B_1+a\geq\dfrac{c_2T_1^2}{4c_1}\text{ 且 }B_2-a<\dfrac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}\\ \sqrt{\dfrac{c_1c_2}{B_1+a}}+\dfrac{2c_1}{T_2-T_1} & ,\ B_1+a<\dfrac{c_2T_1^2}{4c_1}\text{ 且 }B_2-a\geq\dfrac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}\\ \sqrt{\dfrac{c_1c_2}{B_1+a}}+\sqrt{\dfrac{c_1c_2}{B_2-a}} & ,\ B_1+a<\dfrac{c_2T_1^2}{4c_1}\text{ 且 }B_2-a<\dfrac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}\end{cases} \tag{5.4.2}$$

（推導過程，請參見附錄 C-C.2）

由(5.4.2)式可知， $f''(a)>0$, $\forall\, a\in[\,0,B_2\,]$；故得

$$f'(a)\text{ 是一個嚴格遞增函數，}\forall\, a\in[\,0,B_2\,] \tag{5.4.3}$$

以下，本研究將致力於尋求**模式(V)**的最佳解 a^*，其求解過程如下：

情況 A：假設 $B_1\geq\dfrac{c_2T_1^2}{4c_1}$

由(5.4.1)式，若其前面兩項均利用(5.2.2)式，則可得到 $f'(a)$ 如下：

$$f'(a)=c_2T_1+2c_1\left(\frac{B_1+a}{T_1}-\frac{c_2T_1}{4c_1}\right)-2c_1\left(\frac{B_2-a}{T_2-T_1}-\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)}{4c_1}\right) \tag{5.4.4}$$

若其前面兩項分別利用(5.2.2)式及(5.2.3)式，則可得到 $f'(a)$ 如下：

$$f'(a)=c_2T_1+2c_1\left(\frac{B_1+a}{T_1}-\frac{c_2T_1}{4c_1}\right)-2\sqrt{c_1c_2(B_2-a)}+c_2\left(T_2-T_1\right) \tag{5.4.5}$$

由(5.4.3)式及(5.4.4)式知：

當 $B_2 \geq \frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}$ 時，若 $f'(0^+)\geq 0$ ，則 $f(a)$ 之最小值必發生在 $a=0$ 處。而

$f'(0^+)\geq 0$ 之充要條件為 $B_2 \leq \left(\frac{B_1}{T_1}+\frac{c_2T_1}{4c_1}\right)\cdot\left(T_2-T_1\right)+\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}$ 。故當

$$\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}\leq B_2 \leq \left(\frac{B_1}{T_1}+\frac{c_2T_1}{4c_1}\right)\cdot\left(T_2-T_1\right)+\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}\text{ 時，得 } a^*=0\text{。} \tag{5.4.6}$$

此外，由(5.4.3)式及(5.4.5)式知：

當 $B_2 < \frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}$ 時， $f'(0^+)>0$ 恆成立，得 $a^*=0$ 。 (5.4.7)

綜合(5.4.6)式及(5.4.7)式，可以得到：

當 $B_2 \leq \left(\frac{B_1}{T_1}+\frac{c_2T_1}{4c_1}\right)\cdot\left(T_2-T_1\right)+\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}$ 時，則 $a^*=0$ 必成立。 (5.4.8)

當 $B_2 > \left(\frac{B_1}{T_1}+\frac{c_2T_1}{4c_1}\right)\cdot\left(T_2-T_1\right)+\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}$ 時；則 a^* 必滿足 $f'(a^*)=0$ ，即

$$a^*=\frac{T_1B_2}{T_2}-\frac{\left(T_2-T_1\right)B_1}{T_2}-\frac{c_2T_1\left(T_2-T_1\right)}{4c_1}\text{，且 } a^*\in\left(0,\frac{T_1B_2}{T_2}\right)\text{。} \tag{5.4.9}$$

（a^* 之求解過程，請參見附錄 C-C.3）

情況 B：假設 $B_1 < \dfrac{c_2 T_1^{\,2}}{4c_1}$

由(5.4.1)式，若其前面兩項分別利用(5.2.3)式及(5.2.2)式，則可得到 $f'(a)$ 如下：

$$f'(a) = 2\sqrt{c_1 c_2 (B_1 + a)} - 2c_1\left(\frac{B_2 - a}{T_2 - T_1} - \frac{c_2\left(T_2 - T_1\right)}{4c_1}\right) \tag{5.4.10}$$

若其前面兩項均利用(5.2.3)式，則可得到 $f'(a)$ 如下：

$$f'(a) = 2\sqrt{c_1 c_2 (B_1 + a)} - 2\sqrt{c_1 c_2 (B_2 - a)} + c_2\left(T_2 - T_1\right) \tag{5.4.11}$$

由(5.4.3)式及(5.4.10)式知：

當 $B_2 \geq \dfrac{c_2\left(T_2 - T_1\right)^2}{4c_1}$ 時，若 $f'(0^+) \geq 0$ ，則 $f(a)$ 之最小值必發生在 $a = 0$ 處。而 $f'(0^+) \geq 0$ 之充要條件為 $B_2 \leq \left(T_2 - T_1\right)\sqrt{\dfrac{c_2 B_1}{c_1}} + \dfrac{c_2\left(T_2 - T_1\right)^2}{4c_1}$ 。故當

$$\frac{c_2\left(T_2 - T_1\right)^2}{4c_1} \leq B_2 \leq \left(T_2 - T_1\right)\sqrt{\frac{c_2 B_1}{c_1}} + \frac{c_2\left(T_2 - T_1\right)^2}{4c_1} \text{ 時，得 } a^* = 0 \text{。} \tag{5.4.12}$$

此外，由(5.4.3)式及(5.4.11)式知：

$$\text{當 } B_2 < \frac{c_2\left(T_2 - T_1\right)^2}{4c_1} \text{ 時，} f'(0^+) > 0 \text{ 恆成立，得 } a^* = 0 \text{。} \tag{5.4.13}$$

綜合(5.4.12)式及(5.4.13)式，可以得到：

當 $B_2 \le (T_2 - T_1)\sqrt{\dfrac{c_2 B_1}{c_1}} + \dfrac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$ 時，則 $a^* = 0$ 必成立。 (5.4.14)

當 $B_2 > (T_2 - T_1)\sqrt{\dfrac{c_2 B_1}{c_1}} + \dfrac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$ 時；則 a^* 必滿足 $f'(a^*) = 0$ ，即

$$a^* = B_2 + \frac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1} - (T_2 - T_1)\sqrt{\frac{c_2 (B_1 + B_2)}{c_1}} > 0 \text{。} \tag{5.4.15}$$

（a^* **的求解過程，請參見附錄 C-C.3**）

為了方便**模式(V)**之最佳解的描述，令 DF_5 為一個決策準則函數，如下：

$$DF_5 = DF_5(c_1, c_2, B_1, B_2, T_1, T_2)$$

$$= B_2 - \left\{ \frac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1} + (T_2 - T_1)\left[\left(\frac{B_1}{T_1} - \frac{c_2 T_1}{4c_1} \right)^+ + \frac{c_2 T_1}{2c_1} \odot \sqrt{\frac{c_2 B_1}{c_1}} \right] \right\} \tag{5.4.16}$$

綜合上述之**情況 A** 與**情況 B**，**模式(V)**之最佳解 a^* 可表示如下：

1.當 $DF_5 \le 0$ 時，則 $a^* = 0$ 。 (5.4.17)

2.當 $DF_5 > 0$ 時，得 $a^* > 0$ 且 a^* 如下：

$$a^* = \begin{cases} \dfrac{T_1 B_2}{T_2} - \dfrac{(T_2 - T_1) B_1}{T_2} - \dfrac{c_2 T_1 (T_2 - T_1)}{4c_1} & , \quad B_1 \ge \dfrac{c_2 T_1^2}{4c_1} \\ B_2 + \dfrac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1} - (T_2 - T_1)\sqrt{\dfrac{c_2 (B_1 + B_2)}{c_1}} & , \quad B_1 < \dfrac{c_2 T_1^2}{4c_1} \end{cases} \tag{5.4.18}$$

（**請參見附錄 C-C.4**）

由(5.4.17)式及(5.4.18)式中之 a^* ，利用(3.3.8)式，便可得**模式(VI)**的最佳解 (y^*, z^*) ；如果再利用(5.3.2)式，則可得**模式(IV)**之最佳解 W^* ，如下：

1.當 $DF_5 \le 0$ 時，得

$$W^*(t)=\begin{cases} W_1^*(t), & t\in[\,t_{W_1^*}, T_1\,],\ t_{W_1^*}=\left(T_1-2\sqrt{\dfrac{c_1B_1}{c_2}}\right)^+ \\ W_2^*(t), & t\in[\,t_{W_2^*}, T_2\,],\ t_{W_2^*}=T_1+\left(\left(T_2-T_1\right)-2\sqrt{\dfrac{c_1B_2}{c_2}}\right)^+ \end{cases} \tag{5.4.19}$$

其中 $W_1^*(t)=\dfrac{c_2}{4c_1}\cdot\left(t-t_{W_1^*}\right)^2+\dfrac{c_2}{4c_1T_1}\cdot\left(\left(2\sqrt{\dfrac{c_1B_1}{c_2}}\right)^2-T_1^2\right)^+\cdot t$

$$W_2^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left(t-t_{W_2^*}\right)^2+\frac{c_2}{4c_1\left(T_2-T_1\right)}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}\right)^2-\left(T_2-T_1\right)^2\right)^+\cdot\left(t-T_1\right)+B_1$$

2.當 $DF_5 > 0$ 時，得

$$W^*(t)=\begin{cases} W_3^*(t), & t\in[\,t_{W_3^*}, T_1\,],\ t_{W_3^*}=\left(T_1-2\sqrt{\dfrac{c_1(B_1+a^*)}{c_2}}\right)^+ \\ W_4^*(t), & t\in[\,t_{W_4^*}, T_2\,],\ t_{W_4^*}=T_1+\left(\left(T_2-T_1\right)-2\sqrt{\dfrac{c_1(B_2-a^*)}{c_2}}\right)^+ \end{cases} \tag{5.4.20}$$

其中 $W_3^*(t)=\dfrac{c_2}{4c_1}\cdot\left(t-t_{W_3^*}\right)^2+\dfrac{c_2}{4c_1T_1}\cdot\left(\left(2\sqrt{\dfrac{c_1(B_1+a^*)}{c_2}}\right)^2-T_1^2\right)^+\cdot t$

$$W_4^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left(t-t_{W_4^*}\right)^2$$

$$+\frac{c_2}{4c_1\left(T_2-T_1\right)}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1(B_2-a^*)}{c_2}}\right)^2-\left(T_2-T_1\right)^2\right)^+\cdot\left(t-T_1\right)+B_1+a^*$$

式中 $0<a^*\le B_2$ 且 a^* 滿足(5.4.18)式。

（分析過程，請參見附錄 C-C.5）

5.5 敏感度分析

為了迎合顧客的訂單需求，在本問題之最佳生產計畫中，生產決策者所在乎的是最佳生產起始時點、最佳生產函數、以及於第一期交貨前須額外生產的最佳數量。本研究將著重在最佳生產起始時點t_{W^*}與第一期交貨前須額外生產的最佳數量a^*的分析，藉以分析最佳生產計畫的模式狀態。

5.5.1 最佳生產計畫模式的分析

有關兩個不同交貨日期之生產計畫數學模式的最佳解，本研究是利用單一交貨日期之最佳生產計畫的結果而得到的；然而，所得到的結果有可能為一個「實質的兩個不同交貨日期的最佳生產計畫」或退化為兩個「各自獨立的單一交貨日期之最佳生產計畫」的組合，其決策準則為函數DF_5之值。對於生產決策者而言，其所關心的應該是在承接新訂單後的最初決策。因此，在本單元除了對最佳額外生產數量a^*的探討外，將專注在最佳生產起始時點t_{W^*}的分析，以探討生產決策者應採取的最佳生產計畫是為「立即生產（**IP**）」或為「延後生產（**DP**）」。

令兩個決策準則函數DF_6及DF_7，分別如下：

$$DF_6 = DF_6(c_1, c_2, B_1, T_1) = B_1 - \frac{c_2 T_1^2}{4c_1} \tag{5.5.1}$$

$$DF_7 = DF_7(c_1, c_2, B_2, T_1, T_2) = B_2 - \frac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1} \tag{5.5.2}$$

1.當 $DF_5 \le 0$ 時：

得**模式(IV)**之最佳解為(5.4.19)式，此時得 $a^* = 0$。此結果顯示第二期的應交貨數量及交貨期並非相對地緊迫，不需要在第一期交貨前額外多生產一些數量以資因應；因此，在時點 T_1 及 T_2 分別交貨 B_1 及 B_2 單位的最佳生產計畫，可以分別視其為在時間區間 $[0, T_1]$ 生產 B_1 單位及在時間區間 $[T_1, T_2]$ 生產 B_2 單位的單一交貨日期之最佳生產計畫，這個結果可以由(5.4.19)式之 $t_{W_1^*}$ 及 $t_{W_2^*}$ 明顯地看出（$t_{W_1^*}$ 與 B_2 無關；$t_{W_2^*}$ 與 B_1 無關）。此外，在時間區間 $[t_{W_1^*}, T_1]$ 之最佳生產計畫為 $W_1^*(t)$，它與 B_2 無關；而在時間區間 $[t_{W_2^*}, T_2]$ 之最佳生產計畫為 $W_2^*(t)$，它除了必須加入第一期已生產的數量 B_1 外（但在 T_1 時點已交貨），其餘的生產過程是與 B_1 無關的。綜合上述的分析可得第一期及第二期最佳生產計畫 $W_1^*(t)$ 及 $W_2^*(t)$ 的狀態，如**表 5.1** 所示：

表 5.1 最佳生產計畫 $W_1^*(t)$ 及 $W_2^*(t)$ 的狀態（當 $DF_5 \le 0$ 時）

條件	第一期最佳生產計畫		第二期最佳生產計畫	
	$t_{W_1^*}$	$W_1^*(t)$	$t_{W_2^*}$	$W_2^*(t)$
$DF_6 < 0$	$t_{W_1^*} > 0$	DP		
$DF_6 \ge 0$	$t_{W_1^*} = 0$	IP		
$DF_7 < 0$			$t_{W_2^*} > T_1$	DP
$DF_7 \ge 0$			$t_{W_2^*} = T_1$	IP

表 5.1 中顯示最佳生產計畫 $W_1^*(t)$ 及 $W_2^*(t)$ 是為 IP 或 DP，乃分別由函數 DF_6 與 DF_7 之值所決定。當最佳生產計畫為 DP 時，其延後生產的時間長度，則分別由 $t_{W_1^*}$ 及 $t_{W_2^*}$ 之值所決定，而此二者是與參數 T_1、T_2、c_1、c_2、B_1、B_2

有關。在「$t_{W_1^*}>0$」及「$t_{W_2^*}>T_1$」的情況下，分析這些參數的變動對$t_{W_1^*}$與$t_{W_2^*}$的影響變化，如**表 5.2** 所示。

表 5.2 參數變動對決策變數$t_{W_1^*}$與$t_{W_2^*}$的影響分析

參數 決策變數	c_1	c_2	T_1	T_2	B_1	B_2
$t_{W_1^*}$（$t_{W_1^*}>0$）	－	＋	＋	×	－	×
$t_{W_2^*}$（$t_{W_2^*}>T_1$）	－	＋	×	＋	×	－

註：「＋」表示決策變數為參數的增函數；「－」表示決策變數為參數的減函數；

「×」表示決策變數與參數無關。

由**表 5.2** 中的結果可知，當c_1愈大、c_2愈小、B_1愈大、T_1愈小時，第一期之最佳生產計畫其延後生產的時間長度將愈短；當c_1愈大、c_2愈小、B_2愈大、T_2愈小時；則第二期之最佳生產計畫其延後生產的時間長度將愈短，但與T_1無關。

2.當$DF_5>0$時：

得**模式(IV)**之最佳解為(5.4.20)式，此時得$a^*>0$。此結果顯示第二期的應交貨數量及交貨期相對地緊迫，必須在第一期交貨之前額外多生產a^*的數量，以因應第二期之所需；很顯然地，在第一期交貨時點T_1之前的累積生產量必然與B_2有關。然而，在整個生產製程中基於整體成本因素的考量，在時間區間$[0,T_1]$的最佳生產計畫$W_3^*(t)$，它不必然為 IP；但在時間區間$[T_1,T_2]$的最佳生產計畫$W_4^*(t)$，它必然為 IP。綜合上述的分析可得最佳生

產計畫 $W_3^*(t)$ 及 $W_4^*(t)$ 的狀態，如**表 5.3** 所示：

（分析過程，請參見附錄 C-C.6、附錄 C-C.7）

表 5.3 最佳生產計畫 $W_3^*(t)$ 及 $W_4^*(t)$ 的狀態（當 $DF_5 > 0$ 時）

條件		第一期最佳生產計畫		第二期最佳生產計畫	
		$t_{W_3^*}$	$W_3^*(t)$	$t_{W_4^*}$	$W_4^*(t)$
$DF_6 \geq 0$	$DF_6 + a^* \geq 0$ 必成立	$t_{W_3^*} = 0$	IP		
	$DF_7 - a^* \geq 0$ 必成立			$t_{W_4^*} = T_1$	IP
$DF_6 < 0$	若 $DF_6 + a^* \geq 0$	$t_{W_3^*} = 0$	IP		
	若 $DF_6 + a^* < 0$	$t_{W_3^*} > 0$	DP		
	$DF_7 - a^* \geq 0$ 必成立			$t_{W_4^*} = T_1$	IP

由**表 5.3** 中很明顯地可知決策變數 $t_{W_3^*}$ 可能為「$t_{W_3^*} > 0$」或「$t_{W_3^*} = 0$」，即第一期之最佳生產計畫 $W_3^*(t)$ 可能為 DP 或 IP，且取決於 $DF_6 + a^*$ 之值；而決策變數 $t_{W_4^*}$ 必僅為「$t_{W_4^*} = T_1$」，即第二期的最佳生產計畫 $W_4^*(t)$ 必為 IP。當 $W_3^*(t)$ 為 DP 時，其延後生產的時間長度為 $t_{W_3^*}$，它與參數 T_1、c_1、c_2、B_1 及 a^* 有關，而 $a^* > 0$ 亦為參數 T_1、T_2、c_1、c_2、B_1、B_2 的函數。因此，當 $t_{W_3^*} > 0$ 時，其延後生產的時間長度是否愈長，則須視參數 T_1、T_2、c_1、c_2、B_1、B_2 而定。這些參數的變動對決策變數 a^* 及 $t_{W_3^*}$ 的影響情形，如**表 5.4** 所示。

（分析過程，請參見附錄 C-C.8、附錄 C-C.9）

表 5.4 參數變動對決策變數a^*及$t_{W_3^*}$的影響分析

參數 / 決策變數	c_1	c_2	T_1	T_2	B_1	B_2
a^*（$a^* > 0$）	＋	－	＋	－	－	＋
$t_{W_3^*}$（$t_{W_3^*} > 0$）	－	＋	×	＋	－	－

註：「＋」表示決策變數為參數的增函數；「－」表示決策變數為參數的減函數；

「×」表示決策變數與參數無關。

在**表 5.4** 中，由決策變數a^*的變化可知，當c_1愈大、c_2愈小、T_1愈大、T_2愈小、B_1愈小、B_2愈大時，在時點T_1之前必須額外多生產的最佳數量a^*就要多一些。其次，當c_1愈大、c_2愈小、T_2愈小、B_1愈大、B_2愈大時，第一期之最佳生產起始時點$t_{W_3^*}$愈容易接近於 0，即延後生產的時間長度將愈短。此外，值得注意的是，$t_{W_3^*}$與T_1是無關的。

5.5.2 最佳生產計畫的決策方式分析

兩個不同交貨期之最佳生產計畫為(5.4.19)式及(5.4.20)式。如果利用(5.3.2)式再更進一步地詳細分析，則可以得到七種不同參數狀態的最佳生產計畫決策方式（本研究以$y^*(t)$、$z^*(t)$之型式表示之），如**表 5.5** 所示。**（分析過程，請參見附錄 C-C.10）**

在**表 5.5** 中所提出的七種不同參數狀態的最佳生產計畫決策方式，本研究更進一步地將它們作成最佳生產決策方式流程圖，如**圖 5.1** 所示，以方便生產決策者的生產決策活動。對於生產決策者而言，當承接新訂單後，

他必須要在最短的時間內決定應採取的最佳生產計畫，**圖 5.1** 的最佳生產決策方式流程，它提供了生產決策者一個最好及最便捷的決策工具，它具有實務上的價值。

表 5.5 各時點產能未受限制之兩個不同交貨期的最佳生產計畫決策方式

決策準則			交貨期	最佳生產計劃 $(y^*(t), z^*(t))$	時間區間		決策方式
$DF_6 \ge 0$	$B_2 \le D_1$，$a^* = 0$	$DF_7 \ge 0$	第一	$y_1^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2 + \left(\frac{B_1}{T_1} - \frac{c_2 T_1}{4c_1}\right)\cdot t$	$t \in [0, T_1]$	IP	M1
			第二	$z_1^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2 + \left(\frac{B_2}{T_2 - T_1} - \frac{c_2(T_2 - T_1)}{4c_1}\right)\cdot t$	$t \in [0, T_2 - T_1]$	IP	
		$DF_7 < 0$	第一	$y_2^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2 + \left(\frac{B_1}{T_1} - \frac{c_2 T_1}{4c_1}\right)\cdot t$	$t \in [0, T_1]$	IP	M2
			第二	$z_2^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t - \left((T_2 - T_1) - 2\sqrt{\frac{c_1 B_2}{c_2}}\right)\right]^2$	$t \in [t_{z^*}, T_2 - T_1]$	DP	
	$B_2 > D_1$，$a^* = D_3$		第一	$y_3^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2 + \left(\frac{B_1 + a^*}{T_1} - \frac{c_2 T_1}{4c_1}\right)\cdot t$	$t \in [0, T_1]$	IP	M3
			第二	$z_3^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2 + \left(\frac{B_2 - a^*}{T_2 - T_1} - \frac{c_2(T_2 - T_1)}{4c_1}\right)\cdot t$	$t \in [0, T_2 - T_1]$	IP	
$DF_6 < 0$	$B_2 \le D_2$，$a^* = 0$	$DF_7 \ge 0$	第一	$y_4^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t - \left(T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1 B_1}{c_2}}\right)\right]^2$	$t \in [t_{y^*}, T_1]$	DP	M4
			第二	$z_4^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2 + \left(\frac{B_2}{T_2 - T_1} - \frac{c_2(T_2 - T_1)}{4c_1}\right)\cdot t$	$t \in [0, T_2 - T_1]$	IP	
		$DF_7 < 0$	第一	$y_5^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t - \left(T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1 B_1}{c_2}}\right)\right]^2$	$t \in [t_{y^*}, T_1]$	DP	M5
			第二	$z_5^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t - \left((T_2 - T_1) - 2\sqrt{\frac{c_1 B_2}{c_2}}\right)\right]^2$	$t \in [t_{z^*}, T_2 - T_1]$	DP	
	$B_2 > D_2$，$a^* = D_4$	$DF_6 + a^* < 0$	第一	$y_6^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t - \left(T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1(B_1 + a^*)}{c_2}}\right)\right]^2$	$t \in [t_{y^*}, T_1]$	DP	M6
			第二	$z_6^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2 + \left(\frac{B_2 - a^*}{T_2 - T_1} - \frac{c_2(T_2 - T_1)}{4c_1}\right)\cdot t$	$t \in [0, T_2 - T_1]$	IP	
		$DF_6 + a^* \ge 0$	第一	$y_7^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2 + \left(\frac{B_1 + a^*}{T_1} - \frac{c_2 T_1}{4c_1}\right)\cdot t$	$t \in [0, T_1]$	IP	M7
			第二	$z_7^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2 + \left(\frac{B_2 - a^*}{T_2 - T_1} - \frac{c_2(T_2 - T_1)}{4c_1}\right)\cdot t$	$t \in [0, T_2 - T_1]$	IP	

註： $t_{y^*} = T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1(B_1 + a^*)}{c_2}}$ 及 $t_{z^*} = (T_2 - T_1) - 2\sqrt{\frac{c_1(B_2 - a^*)}{c_2}}$ 。

決策準則函數 DF_6 、 DF_7 ；請參見(5.5.1)及(5.5.2)式。

本表格中所使用的符號 D_1 、 D_2 、 D_3 、 D_4 ，分別如下：

$$D_1 = \frac{c_2(T_2 - T_1)^2}{4c_1} + (T_2 - T_1)\left(\frac{B_1}{T_1} + \frac{c_2 T_1}{4c_1}\right) 、 D_2 = \frac{c_2(T_2 - T_1)^2}{4c_1} + (T_2 - T_1)\sqrt{\frac{c_2 B_1}{c_1}} 、$$

$$D_3 = \frac{T_1 B_2}{T_2} - \frac{(T_2 - T_1)B_1}{T_2} - \frac{c_2 T_1(T_2 - T_1)}{4c_1} 、 \quad D_4 = B_2 + \frac{c_2(T_2 - T_1)^2}{4c_1} - (T_2 - T_1)\sqrt{\frac{c_2(B_1 + B_2)}{c_1}}$$

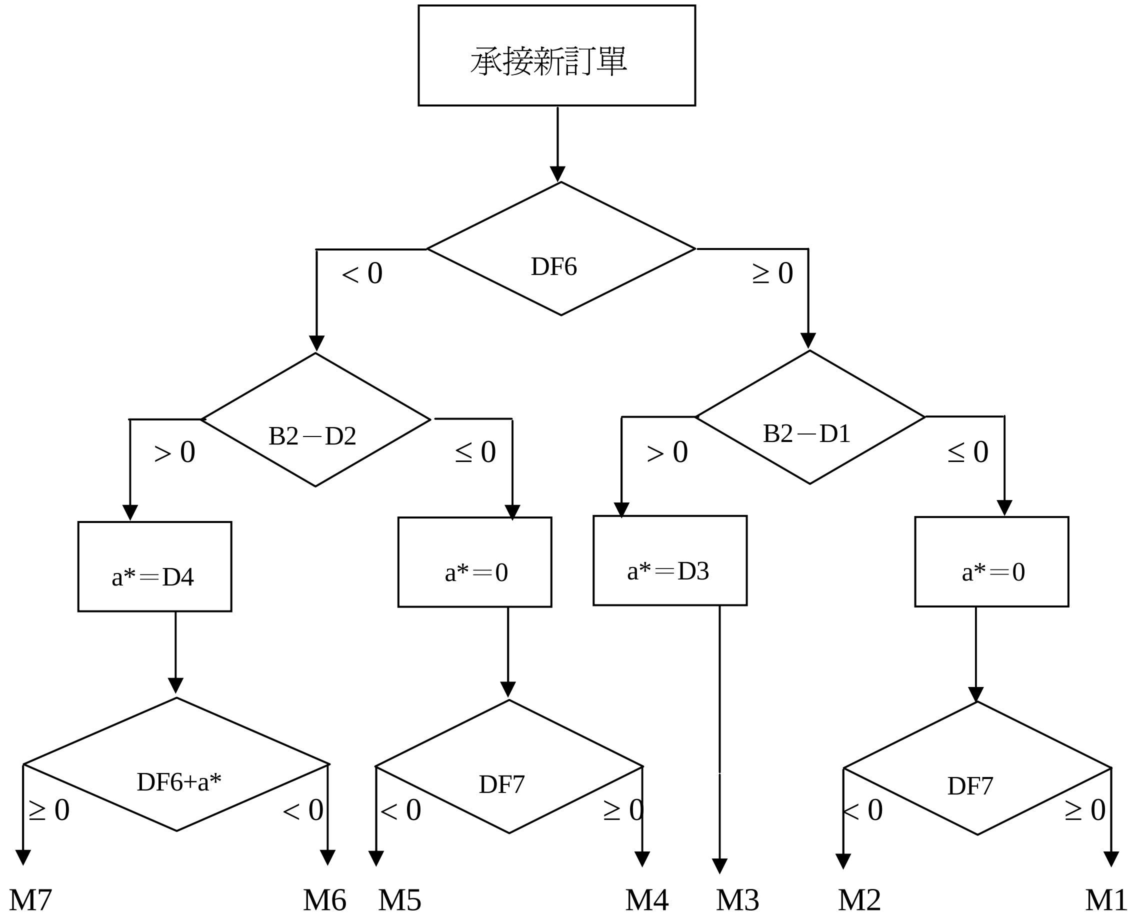


圖 5.1 各時點產能未受限制之兩個不同交貨日期的最佳生產決策流程

註：上圖中所使用的符號D_1、D_2、D_3、D_4，分別如下：

$$D_1=\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}+(T_2-T_1)\left(\frac{B_1}{T_1}+\frac{c_2T_1}{4c_1}\right)\text{、}\quad D_2=\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}+(T_2-T_1)\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}\text{、}$$

$$D_3=\frac{T_1B_2}{T_2}-\frac{(T_2-T_1)B_1}{T_2}-\frac{c_2T_1(T_2-T_1)}{4c_1}\text{、}\quad D_4=B_2+\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}-(T_2-T_1)\sqrt{\frac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}}$$

5.6 小結

本問題是針對同型態產品的訂單式生產，在未考慮產能受限制的情況下，藉由單一交貨日期之訂單式生產的最佳生產計畫之模式建構及其最佳解，來探討兩個不同交貨日期之訂單式生產的最佳生產計畫之模式建構與最佳解。首先，本研究得到的重要結果如下：

1.兩個不同交貨日期之訂單式生產的最佳生產計畫為W^*，它可能退化為兩個「各自獨立的單一交貨日期之訂單式生產的最佳生產計畫」之組合或為一個「實質的兩個不同交貨日期之訂單式生產的最佳生產計畫」，其決策準則為函數DF_5之值（請參考(5.4.16)式），如下：

(1) 若$DF_5 \le 0$，則$a^* = 0$；此表示在第一期交貨前不須要額外多生產一些數量，以供第二期交貨之所需。此時的最佳生產計畫可視為兩個「各自獨立的單一交貨日期之訂單式生產的最佳生產計畫」之組合（請參考(5.4.19)式）。

(2) 若$DF_5 > 0$，則$a^* > 0$；此表示在第一期交貨前必須額外多生產一些數量，以應付第二期交貨之所需，且其最佳額外生產數量為a^*之值。此時的最佳生產計畫為一個「實質的兩個不同交貨日期之訂單式生產的最佳生產計畫」（請參考(5.4.20)式）。

2.當最佳生產計畫退化為兩個「各自獨立的單一交貨日期之最佳生產計畫」之組合時，其各自為 **IP** 或 **DP**，則是分別取決於決策準則函數DF_6及DF_7之值（請參考(5.5.1)及(5.5.2)式），如下：

(1) 若 $DF_6 \geq 0$，則第一交貨期之最佳生產計畫 W_1^* 為 **IP**；否則，為 **DP**。

(2) 若 $DF_7 \geq 0$，則第二交貨期之最佳生產計畫 W_2^* 為 **IP**；否則，為 **DP**。

（請參考表 **5.1**）

3.當最佳生產計畫必須於第一期交貨前額外多生產 a^* 的數量，以應付第二期交貨之所需時，第二交貨期之最佳生產計畫為 W_4^*，其必為 **IP**；而第一交貨期之最佳生產計畫為 W_3^*，其為 **IP** 或 **DP**，則同時取決於函數 DF_6 與 $DF_6 + a^*$ 之值。當 $DF_6 < 0$ 且 $DF_6 + a^* < 0$ 時，則 W_3^* 為 **DP**；當 $DF_6 + a^* \geq 0$（不管 $DF_6 < 0$ 或 $DF_6 \geq 0$）時，則 W_3^* 為 **IP**。（請參考表 **5.3**）

4.根據參數條件，本研究提供了七種不同參數狀態的最佳生產計畫決策方式（請參考表 **5.5**），並將它們製作成最佳生產決策流程圖（請參考圖 **5.1**）；生產決策者只需要依據其內部之成本因素及顧客訂單之需求因素，就可以很快地決定出應該採行的最佳生產計畫決策方式，並付諸執行，達成生產目標。

5.由於單位時間之單位生產作業成本與存貨成本的假設，在第一期交貨後，存貨成本已消除大部份；然而，生產作業成本的壓力仍然繼續存留著。因此，由決策變數 a^*（當 $a^* > 0$ 時）的敏感度分析可知（請參考表 **5.4**），當顧客之訂單需求因素 T_1、T_2、B_1、B_2 維持不變，而生產者之成本因素 c_1 增加、c_2 減小時，應提早於第一期交貨前多生產一些數量，這樣對於生產者在追求其總成本最小化的目標上，是較為有利的。

其次，對於兩個不同交貨日期之訂單式生產的生產計畫模式（**模式(Ⅳ)**）之最佳解，本研究是運用單一交貨日期之最佳生產計畫模式（**模式(I)**）的結果而得到的。在所得的最佳解（最佳生產函數、最佳生產起始時點、必須於第一期交貨前額外生產的最佳數量等）中，它們含有多個不同的參數；在管理活動中，這些參數可視為生產者所必須面對的內在及外在多變的環境因素。其中成本因素的參數，長期仍可能為生產者事先可控制的因素；而交貨數量與交貨日期的參數，則恆為生產者事先無法控制的因素，它們是隨著顧客的訂單需求而定。因此，針對不同顧客的訂單需求，生產決策者必須採用的最佳生產計畫決策方式，就會不盡相同（請參考**圖 5.1**）。另外，各參數變動對決策變數的敏感度分析，亦可提供生產決策者作為其內部因素控管與因應外在因素變化的決策參考。

第六章　總結與未來研究的方向

由於顧客訂單的多樣性、需求的不可預測性、以及生產者之生產設備規模等因素，使得生產決策者所面臨的訂單式生產之型態，種類繁多。本論文僅探討三種訂單式生產的主題，這三個主題不僅可以視為各自獨立的訂單式生產問題；事實上，它們彼此之間也是有關聯性存在的。在第二個主題中，當視未來生產期間內之每一個時點的產能上限值為一個很大的常數時，那麼它就相當於是各時點產能未受限制的生產問題，此時即為第一個主題；而在第三個主題中，當必須於第一期交貨之前額外生產的最佳數量為 0 單位時，則它就相當於兩個各自獨立的第一個主題之生產問題的組合。因此，本論文將此三個主題一併討論之。然而，此三個議題僅是訂單式生產問題中的一小部份，更複雜的問題則仍是有待解決。

6.1　本論文的貢獻

本論文所探討的三個訂單式生產主題的數學模式，均是從成本的構面來加以建構的，其目的在追求總成本（含生產作業成本及存貨成本）的最小化。由於所構建的數學模式係為連續動態控制模式，其屬性係為變分法問題，因此本論文對於所構建的數學模式係使用變分法最佳解必要條件之尤拉方程式的技巧加以處理。對於此三個主題的訂單式生產，本論文的主要貢獻如下：

1.當不考慮未來生產期間內各時點之產能受限制時，生產決策者一旦面臨新訂單，其必然可以承接該新訂單。此時，生產決策者必須加以決策的問題是生產速率的管控，如下：

(1) 如果為單一交貨日期，則於承接新訂單後除了最佳生產函數的決策外，尚有最佳生產起始時點的決策（即應採取「立即生產（**IP**）」或「延後生產（**DP**）」)。對於此種型態的訂單式生產，本論文提供了一個明確的最佳生產決策流程圖，如**圖 3.1** 所示（請參見第三章)。

(2) 如果為兩個不同的交貨日期，則於承接新訂單後除了最佳生產函數、最佳生產起始時點（即應採取「立即生產（**IP**）」或「延後生產（**DP**）」) 的決策外，尚必須加以決策的是「於第一期交貨前必須額外生產的最佳數量」，以供第二期交貨之需。對於此種型態的訂單式生產，本論文提供了一個明確的最佳生產決策流程圖，如**圖 5.1** 所示（請參見第五章)。

2.由於生產者之生產資源的有限性及生產設備規模的大小，當考慮未來生產期間內各時點產能皆受限制時，生產決策者一旦面臨新訂單，其首先必須要面對的是新訂單是否有能力承接的問題。一旦承接該新訂單後，生產決策者必須要加以決策的問題是生產速率的管控。對於單一交貨日期，必須加以決策的有最佳生產函數、最佳生產起始時點（即應採取「立即生產（**IP**）」或「延後生產（**DP**）」)、及最佳全產能生產起始時點等的問題。對於此種型態的訂單式生產，本論文提供了一個明確的最佳生產

決策流程圖，如**圖 4.1** 所示（請參見第四章）。

對於上述兩點貢獻的陳述，亦即說明了本論文在第一章中所提出的三個主題之研究目的的結果。

6.2 本論文總結

綜合本論文所探討的三個主題，對於一個生產決策者，當其面臨新訂單時，他首先必須要確定該新訂單是為「單一交貨日期」或為「兩個不同的交貨日期」的屬性；其次，當確定為「單一交貨日期」的屬性時，再根據自身可支配的生產資源條件，迅速地決定出應採取「各時點產能皆受限制」或「各時點產能皆未受限制」的生產狀態；最後，當應採取的生產狀態確定後，便可再依其所面臨的內、外在因素（參數值或產能上限值），而採取最佳的生產計畫決策方式。因此，對於本論文探討的三個主題，總結如下：

1.有關訂單式生產的最佳生產計畫，本論文將所探討的三個主題之最佳解狀況結合成為一個最佳生產的決策流程，如**圖 6.1** 所示，以作為從事生產計畫實務之生產決策者在面臨新訂單時的生產決策參考工具。

2.一個生產決策者，當處於今日瞬息萬變的動態環境中時，掌握先機是該決策者必備的概念與能力，能掌握資訊並適時作最適切的規畫更是相當重要的致勝課題。本論文中所提出的每一個最佳生產決策流程圖（如第三章之圖 3.1、第四章之圖 4.1、及第五章之圖 5.1），均可進一步地製作

成電腦程式，這便是生產決策者掌握先機的利器。對於新的訂單，生產決策者經由其內、外在因素的迅速評估並執行，不僅能迎合顧客的訂單需求，更可使公司獲致最大效益，達到生產管理的目標。

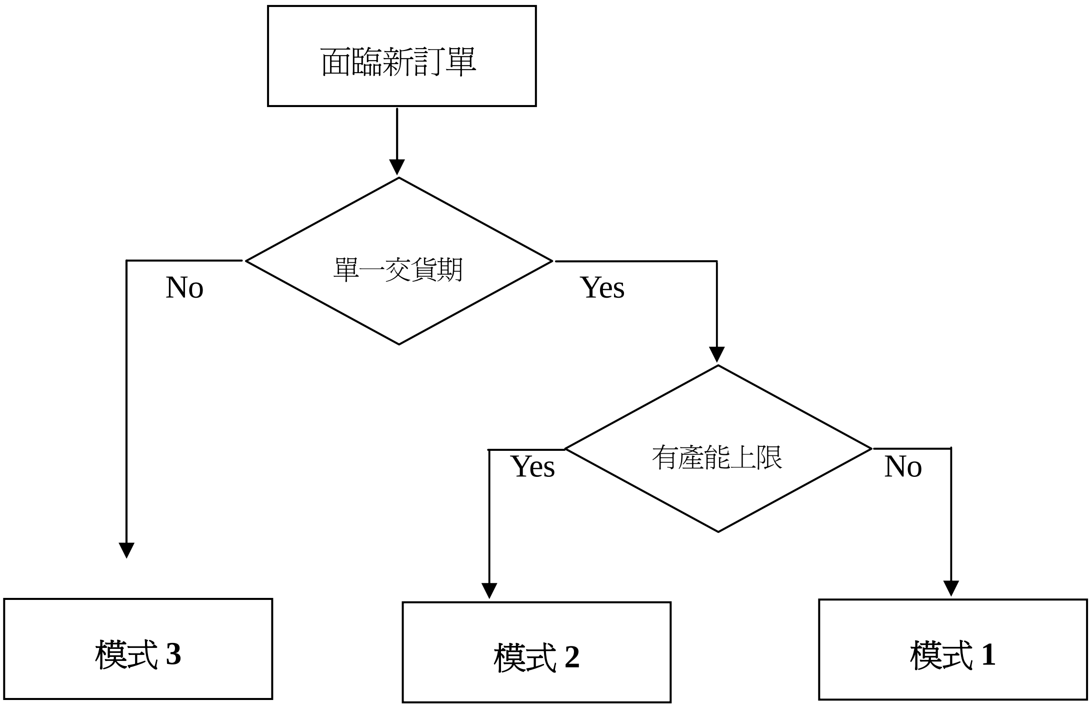


圖 6.1 本論文所探討之訂單式生產的最佳生產決策流程

6.3 未來可能研究的方向

本論文是屬於理論模式的構建與探討，它是一種連續動態規劃的變分法問題型態；因此，對於所構建之數學模式的求解與分析，是植基於變分法的求解技巧與微積分的概念運用。基於模式之構建與求解的方便性，本論文假設各時點的單位生產作業成本為當時點之生產速率或產能利用率的

線性函數，這是本論文之研究的限制。此外，在生產實務運作上，顧客之訂單需求是多樣性的，其種類繁多；然而，基於數學模式構建的受限性與方便性，本論文僅探討三種型態的訂單式生產計畫模式。因此，後續的研究可以朝下列的方向努力：

1.對於各時點的單位生產作業成本為成正比例於當時點之生產速率或產能利用率的假設，可以考慮為非線性函數的議題。

2.可以仿照第二個主題的模式構建方式，將第三個主題推廣至未來生產期間內之每一個時點的產能皆受限制的情況，來加以探討。

3.可更進一步地建構出多個不同交貨日期之最佳生產計畫模式的一般式，使模式的建構與分析更臻完善，更能符合生產實務的運作。

4.對於本論文所獲得的最佳解，以一個實例作實證。

參考文獻

1. Chen, M.S. & Lan, C.H. (2001a), Dynamic Production Plan of Probabilistic Market Demand and Fixed Selling Time with Unreliable Machines and Obtainable Working Hour Capacity, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 44, No. 1, pp. 57-66.

2. Chen, M.S. & Lan, C.H. (2001b), Two-stage Production with Unreliable Machine and Finite Working Hour Capacity, International Journal of Information and Management Sciences, Vol. 12, No. 2, pp.11-24.

3. Chen, M.S. & Chu, M.C. (2003), The Analysis of Optimal Control in Matching Problem Between Manufacturing and Marketing, European Journal of Operational Research, Vol. 150, pp.293-303.

4. Chiang, A. (1992), Dynamic optimization, McGraw-Hill, Inc., Singapore.

5. Feichtinger, G. & Harth, R. (1985), Optimal Pricing and Production in An Inventory Model, European Journal of Operational Research, Vol. 19, pp. 45-56.

6. Flatto, L. (1979), Advanced Calculus, Second printing, Mei Ya Publications, Inc. Taipei, Taiwan.

7. Friedman, A. (1983), Advanced Calculus, Fifth printing, Mei Ya Publications, Inc. Taipei, Taiwan.

8. Grubbstrom, R.W. & Wang, Z. (2003), A Stochastic Model of Multi-Level/ Multi-Stage Capacity Constrained Production-Inventory Systems, International Journal of Production Economics, Vol. 81, pp. 483-494.

9. Horiguchi, K., Raghavan, N., Uzsoy, R. & Venkateswaran, S. (2001), Finite Capacity Production Planning Algorithms for a Semiconductor wafer fabrication facility, International Journal of Production Research, Vol. 39, pp. 825-842.

10. Kamien, M.I. & Schwartz, N.L. (1991), Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, Second Edition, Elsevier, North Holland.

11. Soroush, H. (1999), Sequencing and due-date determination in the Stochastic single machine problem with earliness and tardiness costs, European Journal of Operational Research, Vol. 113, pp. 450-468.

12. Sox, C. & Muckstadt, J. (1997), Optimization-based Planning for the Stochastic Lot-scheduling Problem, IIE Transactions, Vol. 29, pp. 349-357.

13. Wu, M.C. & Chen, S.Y. (1996), Cost model for justifying the acceptance of rush orders, International Journal of Production Research, Vol. 34, No. 7, pp. 1963-1974.

附錄 A　第三章之相關公式推導或證明

A.1　(3.3.5)式之推導

當$t_{\overline{w}} > 0$時，此時視生產起始時點$t_{\overline{w}}$為一個「決策變數（free）」；因此，在忽略「$w'(t) \ge 0$, $\forall\, t \in [0,T]$」之限制條件下所得到的最佳解，不僅要滿足「尤拉方程式」，同時也要滿足生產起始時點為決策變數（free）之「邊界可移性條件」，即

$$\left(F - w' \cdot F_{w'}\right)\Big|_{t=t_{\overline{w}}} = 0$$

首先，因為$\overline{w}(t)$為**模式(Ⅱ)**之最佳解，$t_{\overline{w}} \le t \le T$；則由變分法之尤拉方程式可得

$$\overline{w}(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot t^2 + \frac{1}{2c_1} k_1 \cdot t + \frac{1}{2c_1} k_2$$

其次，由邊界可移性條件得

$$\left(F - \overline{w}' \cdot F_{\overline{w}'}\right)\Big|_{t=t_{\overline{w}}} = 0$$

即

$$\left(c_1 \cdot (\overline{w}'(t_{\overline{w}}))^2 + c_2 \cdot \overline{w}(t_{\overline{w}})\right) - \left(\overline{w}'(t_{\overline{w}}) \cdot 2c_1 \cdot \overline{w}'(t_{\overline{w}})\right) = 0$$

經整理得

$$c_2 \cdot \overline{w}(t_{\overline{w}}) - c_1 \cdot \left(\overline{w}'(t_{\overline{w}})\right)^2 = 0$$

因為$\overline{w}(t_{\overline{w}}) = 0$，將此結果代入上式，故得

$$\overline{w}'(t_{\overline{w}}) = 0$$

A.2　(3.3.6)式中之$t_{\overline{w}}$的求解

因為$\overline{w}(t_{\overline{w}})=0$，所以由(3.3.6)式可得

$$\frac{c_2}{4c_1}\cdot t_{\overline{w}}^2-\left(\frac{c_2}{2c_1}\cdot t_{\overline{w}}\right)\cdot t_{\overline{w}}+\left(B-\frac{c_2T^2}{4c_1}+\frac{c_2}{2c_1}\cdot t_{\overline{w}}\cdot T\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{c_2}{4c_1}\cdot t_{\overline{w}}^2-\frac{c_2}{2c_1}\cdot t_{\overline{w}}^2+\frac{c_2}{2c_1}\cdot t_{\overline{w}}\cdot T+B-\frac{c_2}{4c_1}\cdot T^2=0$$

$$\Rightarrow -\frac{c_2}{4c_1}\cdot t_{\overline{w}}^2+\frac{c_2}{2c_1}\cdot t_{\overline{w}}\cdot T+B-\frac{c_2}{4c_1}\cdot T^2=0$$

$$\Rightarrow t_{\overline{w}}^2-(2T)\cdot t_{\overline{w}}+(T^2-\frac{4c_1}{c_2}\cdot B)=0$$

解得

$$t_{\overline{w}}=\frac{2T\pm\sqrt{4T^2-4T^2+\frac{16c_1}{c_2}\cdot B}}{2}=T\pm 2\sqrt{\frac{c_1B}{c_2}}$$

又因為$t_{\overline{w}}<T$；故得

$$t_{\overline{w}}=T-2\sqrt{\frac{c_1B}{c_2}}$$

A.3 有關表 3.2~表 3.4 的內容推導

1.模式(I)之最佳解的目標值函數 $L = L(c_1, c_2, B, T)$ **對** B **之變化率：**

此時之函數表示為 $L(c_1, c_2, B, T) = \int_{t_{w^*}(B)}^{T} \left[c_1 \cdot \left(w_B^{*}{}'(t) \right)^2 + c_2 \cdot w_B^*(t) \right] dt$，且得函數 L 對

參數 B 的偏導數為

$$\frac{\partial L}{\partial B} = \int_{t_{w^*}(B)}^{T} \left[2c_1 \cdot w_B^{*}{}'(t) \cdot \frac{\partial w_B^{*}{}'(t)}{\partial B} + c_2 \cdot \frac{\partial w_B^*(t)}{\partial B} \right] dt \qquad \text{(A.3.1)}$$

（上式係微分後，再利用 $w_B^{*}{}'(t_{w^*}(B)) = 0$ 且 $w_B^*(t_{w^*}(B)) = 0$ 而得）

(1)當**情況 1** 發生時（即 $B \geq \dfrac{c_2 T^2}{4c_1}$ 或 $DF_1 \geq 0$）：

此時 $t_{w^*}(B) = 0$ 、 $w_B^{*}{}'(t) = \dfrac{c_2}{2c_1} \cdot t + \left(\dfrac{B}{T} - \dfrac{c_2 T}{4c_1} \right)$ 且 $\dfrac{\partial w_B^*(t)}{\partial B} = \dfrac{1}{T} \cdot t$ 、 $\dfrac{\partial w_B^{*}{}'(t)}{\partial B} = \dfrac{1}{T}$

將這些代入(A.3.1)式中，得

$$\frac{\partial L}{\partial B} = \int_0^T \left\{ 2c_1 \cdot \left[\frac{c_2}{2c_1} \cdot t + \left(\frac{B}{T} - \frac{c_2 T}{4c_1} \right) \right] \cdot \frac{1}{T} + c_2 \cdot \frac{1}{T} \cdot t \right\} dt = c_2 T + 2c_1 \cdot \left(\frac{B}{T} - \frac{c_2 T}{4c_1} \right) > 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial B^2} = \frac{2c_1}{T} > 0$$

(2)當**情況 2** 發生時（即 $B < \dfrac{c_2 T^2}{4c_1}$ 或 $DF_1 < 0$）：

此時 $t_{w^*}(B) = T - 2\sqrt{\dfrac{c_1 B}{c_2}}$ 、$\dfrac{\partial t_{w^*}(B)}{\partial B} = -\sqrt{\dfrac{c_1}{c_2 B}}$ 、$\dfrac{\partial w_B^*(t)}{\partial B} = -\dfrac{c_2}{2c_1} \cdot \left(t - t_{w^*}(B) \right) \cdot \dfrac{\partial t_{w^*}(B)}{\partial B}$、

$$w_B^{*}{}'(t) = \frac{c_2}{2c_1} \cdot \left(t - t_{w^*}(B) \right) \text{、} \frac{\partial w_B^{*}{}'(t)}{\partial B} = -\frac{c_2}{2c_1} \cdot \frac{\partial t_{w^*}(B)}{\partial B}$$

將這些代入(A.3.1)式中，得

$$\frac{\partial L}{\partial B}=\int_{t_{w^*}(B)}^{T}\left[2c_1\cdot w_B^{*}{}'(t)\cdot\frac{\partial w_B^{*}{}'(t)}{\partial B}+c_2\cdot\frac{\partial w_B^{*}(t)}{\partial B}\right]dt$$

$$=\int_{t_{w^*}(B)}^{T}\left[\sqrt{\frac{c_2^3}{c_1B}}\cdot\left(t-t_{w^*}(B)\right)\right]dt=2\sqrt{c_1c_2B}>0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial B^2}=\sqrt{\frac{c_1c_2}{B}}>0$$

故得 $L=L(c_1\,,c_2\,,B\,,T)$ 對 B 之變化率，如下：

(1)當**情況 1** 發生時，得 $\frac{\partial L}{\partial B}=c_2T+2c_1\cdot\left(\frac{B}{T}-\frac{c_2T}{4c_1}\right)>0$ 、 $\frac{\partial^2 L}{\partial B^2}=\frac{2c_1}{T}>0$ 。

(2)當**情況 2** 發生時，得 $\frac{\partial L}{\partial B}=2\sqrt{c_1c_2B}>0$ 、 $\frac{\partial^2 L}{\partial B^2}=\sqrt{\frac{c_1c_2}{B}}>0$ 。

2.模式(I)之最佳解的目標值函數 $L=L(c_1,c_2,B,T)$ 對 T 之變化率：

此時之函數表示為 $L=\int_{t_{w^*}(T)}^{T}\left[c_1\cdot\left(w_T^{*}{}'(t)\right)^2+c_2\cdot w_T^{*}(t)\right]dt$，且得函數 L 對參數 T 的偏導數為

$$\frac{\partial L}{\partial T}=\left[c_1\cdot\left(w_T^{*}{}'(T)\right)^2+c_2B\right]+\int_{t_{w^*}(T)}^{T}\left[2c_1\cdot\left(w_T^{*}{}'(t)\right)\cdot\frac{\partial w_T^{*}{}'(t)}{\partial T}+c_2\cdot\frac{\partial w_T^{*}(t)}{\partial T}\right]dt \qquad \text{(A.3.2)}$$

（上式係微分後，再利用 $w_T^{*}{}'(t_{w^*}(T))=0$ 、 $w_T^{*}(t_{w^*}(T))=0$ 、 $w_T^{*}(T)=B$ 而得）

(1)當**情況 1** 發生時（即 $B\ge\frac{c_2T^2}{4c_1}$ 或 $DF_1\ge 0$）：

此時 $t_{w^*}(T)=0$ 、 $w_T^{*}(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2+\left(\frac{B}{T}-\frac{c_2T}{4c_1}\right)\cdot t$ 、 $\frac{\partial w_T^{*}(t)}{\partial T}=\left(\frac{-B}{T^2}-\frac{c_2}{4c_1}\right)\cdot t$ 、

$$w_T^{*}{}'(t)=\frac{c_2}{2c_1}\cdot t+\left(\frac{B}{T}-\frac{c_2T}{4c_1}\right)\text{、}\frac{\partial w_T^{*}{}'(t)}{\partial T}=\frac{-B}{T^2}-\frac{c_2}{4c_1}\text{、}w_T^{*}{}'(T)=\frac{B}{T}+\frac{c_2T}{4c_1}$$

將這些代入(A.3.2)式中，得

$$\frac{\partial L}{\partial T}=\left[c_1\cdot\left(\frac{B}{T}+\frac{c_2T}{4c_1}\right)^2+c_2B\right]$$

$$+\int_0^T\left[2c_1\cdot\left(\frac{c_2}{2c_1}\cdot t+\frac{B}{T}-\frac{c_2T}{4c_1}\right)\cdot\left(\frac{-B}{T^2}-\frac{c_2}{4c_1}\right)+c_2\cdot\left(\frac{-B}{T^2}-\frac{c_2}{4c_1}\right)\cdot t\right]dt$$

$$=\left[c_1\cdot\left(\frac{B}{T}+\frac{c_2T}{4c_1}\right)^2+c_2B\right]+c_2\cdot\left(\frac{-B}{T^2}-\frac{c_2}{4c_1}\right)\cdot T^2+2c_1\cdot\left(\frac{B}{T}-\frac{c_2T}{4c_1}\right)\cdot\left(\frac{-B}{T^2}-\frac{c_2}{4c_1}\right)\cdot T$$

$$=-c_1\cdot\left\{\left(\frac{B}{T}\right)-\left(\frac{c_2T}{4c_1}\right)\right\}^2<0$$

$$\frac{\partial^2L}{\partial T^2}=-2c_1\left(\frac{B}{T}\right)\cdot\left(\frac{-B}{T^2}\right)+0-2c_1\cdot\left(\frac{c_2T}{4c_1}\right)\cdot\left(\frac{c_2}{4c_1}\right)=\frac{2c_1}{T^3}\cdot\left[B^2-\left(\frac{c_2T^2}{4c_1}\right)^2\right]\geq 0$$

(2)**當情況 2** 發生時（即 $B<\frac{c_2T^2}{4c_1}$ 或 $DF_1<0$）：

此時 $t_{w^*}(T)=T-2\sqrt{\frac{c_1B}{c_2}}$ 、 $\frac{\partial t_{w^*}(T)}{\partial T}=1$ ； $w_T^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(T)\right)^2$ 、

$$\frac{\partial w_T^*(t)}{\partial T}=-\frac{c_2}{2c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(T)\right)\text{；}w_T^{*}{}'(t)=\frac{c_2}{2c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(T)\right)\text{、}\frac{\partial w_T^{*}{}'(t)}{\partial T}=-\frac{c_2}{2c_1}$$

將這些代入(A.3.2)式中，得

$$\frac{\partial L}{\partial T}=\left[c_1\cdot\left(\frac{c_2}{2c_1}\cdot\left(T-t_{w^*}(T)\right)\right)^2+c_2B\right]$$

$$+\int_{t_{w^*}(T)}^T\left[2c_1\cdot\left(\frac{c_2}{2c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(T)\right)\right)\cdot\left(\frac{-c_2}{2c_1}\right)+c_2\cdot\left(\frac{-c_2}{2c_1}\right)\cdot\left(t-t_{w^*}(T)\right)\right]dt$$

$$= 2c_2B - \int_{t_{w^*}(T)}^{T} \left[\frac{c_2^2}{c_1} \cdot \left(t - t_{w^*}(T)\right) \right] dt = 2c_2B - 2c_2B = 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial T^2} = 0$$

故得 $L = L(c_1, c_2, B, T)$ 對 T 之變化率，如下：

(1)當**情況 1** 發生時，得

$$\frac{\partial L}{\partial T} = -c_1 \cdot \left\{ \left(\frac{B}{T}\right) - \left(\frac{c_2T}{4c_1}\right) \right\}^2 < 0 \text{ 、 } \frac{\partial^2 L}{\partial T^2} = \frac{2c_1}{T^3} \cdot \left[B^2 - \left(\frac{c_2T^2}{4c_1}\right)^2 \right] \geq 0 \text{ 。}$$

(2)當**情況 2** 發生時，得 $\dfrac{\partial L}{\partial T} = 0$ 、 $\dfrac{\partial^2 L}{\partial T^2} = 0$ ；表示與 T 無關。

3.模式(I)之最佳解的目標值函數 $L = L(c_1, c_2, B, T)$ 對 c_1 之變化率：

此時之函數表示為 $L = \int_{t_{w^*}(c_1)}^{T} \left[c_1 \cdot \left(w_{c_1}^{*}{}'(t)\right)^2 + c_2 \cdot w_{c_1}^{*}(t) \right] dt$ ，且得函數 L 對參數 c_1 的偏導數為

$$\frac{\partial L}{\partial c_1} = \int_{t_{w^*}(c_1)}^{T} \left[c_1 \cdot 2 \cdot \left(w_{c_1}^{*}{}'(t)\right) \cdot \frac{\partial w_{c_1}^{*}{}'(t)}{\partial c_1} + \left(w_{c_1}^{*}{}'(t)\right)^2 + c_2 \cdot \frac{\partial w_{c_1}^{*}(t)}{\partial c_1} \right] dt \tag{A.3.3}$$

（上式係微分後，再利用 $w_{c_1}^{*}{}'(t_{w^*}(c_1)) = 0$ 、 $w_{c_1}^{*}(t_{w^*}(c_1)) = 0$ 而得）

(1)當**情況 1** 發生時（即 $B \geq \dfrac{c_2T^2}{4c_1}$ 或 $DF_1 \geq 0$ ）：

此時 $t_{w^*}(c_1) = 0$ 、 $w_{c_1}^{*}(t) = \dfrac{c_2}{4c_1} \cdot t^2 + \left(\dfrac{B}{T} - \dfrac{c_2T}{4c_1}\right) \cdot t$ 、 $\dfrac{\partial w_{c_1}^{*}(t)}{\partial c_1} = -\dfrac{c_2}{4c_1^2} \cdot t^2 + \dfrac{c_2T}{4c_1^2} \cdot t$ 、

$$w_{c_1}^{*}{}'(t) = \frac{c_2}{2c_1} \cdot t + \left(\frac{B}{T} - \frac{c_2T}{4c_1}\right) \text{ 、 } \frac{\partial w_{c_1}^{*}{}'(t)}{\partial c_1} = -\frac{c_2}{2c_1^2} \cdot t + \frac{c_2T}{4c_1^2}$$

將這些代入(A.3.3)式中，得

$$\frac{\partial L}{\partial c_1}=\int_0^T\left[\begin{array}{l}2c_1\cdot\left(\frac{c_2}{2c_1}\cdot t+\frac{B}{T}-\frac{c_2T}{4c_1}\right)\cdot\left(\frac{-c_2}{2c_1^2}\cdot t+\frac{c_2T}{4c_1^2}\right)+\left(\frac{c_2}{2c_1}\cdot t+\frac{B}{T}-\frac{c_2T}{4c_1}\right)^2\\+c_2\cdot\left(\frac{-c_2}{4c_1^2}\cdot t^2+\frac{c_2T}{4c_1^2}\cdot t\right)\end{array}\right]dt$$

$$=\int_0^T\left[\frac{-c_2^2}{2c_1^2}\cdot t^2+\frac{c_2^2T}{2c_1^2}\cdot t+\left(\frac{B}{T}\right)^2-\left(\frac{c_2T}{4c_1}\right)^2\right]dt=\frac{c_2^2}{48c_1^2}\cdot T^3+\frac{B^2}{T^2}\cdot T\ >0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial c_1^2}=\frac{-c_2^2}{24c_1^3}\cdot T^3<0$$

(2)當**情況 2** 發生時（即 $B<\frac{c_2T^2}{4c_1}$ 或 $DF_1<0$）：

此時 $t_{w^*}(c_1)=T-2\sqrt{\frac{c_1B}{c_2}}$ 、 $\frac{\partial t_{w^*}(c_1)}{\partial c_1}=-2\sqrt{\frac{B}{c_2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{c_1}}=-\sqrt{\frac{B}{c_1c_2}}$ 、

$w_{c_1}^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_1)\right)^2$，得 $\frac{\partial w_{c_1}^*(t)}{\partial c_1}=\frac{-c_2}{4c_1^2}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_1)\right)^2+\frac{c_2}{2c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_1)\right)\cdot\sqrt{\frac{B}{c_1c_2}}$

$w_{c_1}^*{}'(t)=\frac{c_2}{2c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_1)\right)$，得 $\frac{\partial w_{c_1}^*{}'(t)}{\partial c_1}=\frac{-c_2}{2c_1^2}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_1)\right)-\frac{c_2}{2c_1}\cdot\sqrt{\frac{B}{c_1c_2}}$

將這些代入(A.3.3)式中，得

$$\frac{\partial L}{\partial c_1}=\int_{t_{w^*}(c_1)}^T\left[\begin{array}{l}2c_1\cdot\left(\frac{c_2}{2c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_1)\right)\right)\cdot\left(\frac{-c_2}{2c_1^2}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_1)\right)+\frac{c_2}{2c_1}\cdot\sqrt{\frac{B}{c_1c_2}}\right)\\+\left(\frac{c_2}{2c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_1)\right)\right)^2\\+c_2\cdot\left(\frac{-c_2}{4c_1^2}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_1)\right)^2+\frac{c_2}{2c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_1)\right)\cdot\sqrt{\frac{B}{c_1c_2}}\right)\end{array}\right]dt$$

$$=\int_{t_{w^*}(c_1)}^T\left[\frac{-c_2^2}{2c_1^2}\left(t-t_{w^*}(c_1)\right)^2+\frac{c_2}{c_1}\cdot\sqrt{\frac{c_2B}{c_1}}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_1)\right)\right]dt=\frac{2B}{3}\cdot\sqrt{\frac{c_2B}{c_1}}\ >0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial c_1^2}=\frac{2B}{3}\cdot\sqrt{c_2 B}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{c_1^3}}=\frac{-B}{3}\cdot\sqrt{\frac{c_2 B}{c_1^3}}<0$$

故得 $L=L(c_1, c_2, B, T)$ 對 c_1 之變化率，如下：

(1)當**情況 1** 發生時，得 $\frac{\partial L}{\partial c_1}=\frac{c_2^2}{48c_1^2}\cdot T^3+\frac{B^2}{T}>0$ 、 $\frac{\partial^2 L}{\partial c_1^2}=\frac{-c_2^2}{24c_1^3}\cdot T^3<0$ 。

(2)當**情況 2** 發生時，得 $\frac{\partial L}{\partial c_1}=\frac{2B}{3}\cdot\sqrt{\frac{c_2 B}{c_1}}>0$ 、 $\frac{\partial^2 L}{\partial c_1^2}=\frac{-B}{3}\cdot\sqrt{\frac{c_2 B}{c_1^3}}<0$ 。

4.模式(I)之最佳解的目標值函數 $L=L(c_1, c_2, B, T)$ **對** c_2 **之變化率：**

此時之函數表示為 $L=\int_{t_{w^*}(c_2)}^{T}\left[c_1\cdot\left(w_{c_2}^{*}{}'(t)\right)^2+c_2\cdot w_{c_2}^{*}(t)\right]dt$，且得函數 L 對參數 c_2 的

偏導數為

$$\frac{\partial L}{\partial c_2}=\int_{t_{w^*}(c_2)}^{T}\left[2c_1\cdot\left(w_{c_2}^{*}{}'(t)\right)\cdot\frac{\partial w_{c_2}^{*}{}'(t)}{\partial c_2}+w_{c_2}^{*}(t)+c_2\cdot\frac{\partial w_{c_2}^{*}(t)}{\partial c_2}\right]dt \tag{A.3.4}$$

（上式係微分後，再利用 $w_{c_2}^{*}{}'(t_{w^*}(c_2))=0$ 、 $w_{c_2}^{*}(t_{w^*}(c_2))=0$ 而得）

(1)當**情況 1** 發生時（即 $B\geq\frac{c_2T^2}{4c_1}$ 或 $DF_1\geq 0$）：

此時 $t_{w^*}(c_2)=0$ 、 $w_{c_2}^{*}(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2+\left(\frac{B}{T}-\frac{c_2T}{4c_1}\right)\cdot t$ 、 $\frac{\partial w_{c_2}^{*}(t)}{\partial c_2}=\frac{1}{4c_1}\cdot t^2-\frac{T}{4c_1}\cdot t$ 、

$w_{c_2}^{*}{}'(t)=\frac{c_2}{2c_1}\cdot t+\left(\frac{B}{T}-\frac{c_2T}{4c_1}\right)$ 、 $\frac{\partial w_{c_2}^{*}{}'(t)}{\partial c_2}=\frac{1}{2c_1}\cdot t-\frac{T}{4c_1}$

將這些代入(A.3.4)中，得

$$\frac{\partial L}{\partial c_2}=\int_0^T\left[\begin{array}{l}2c_1\cdot\left(\frac{c_2}{2c_1}\cdot t+\frac{B}{T}-\frac{c_2T}{4c_1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2c_1}\cdot t-\frac{T}{4c_1}\right)+\left(\frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2+\frac{B}{T}\cdot t-\frac{c_2T}{4c_1}\cdot t\right)\\+c_2\cdot\left(\frac{1}{4c_1}\cdot t^2-\frac{T}{4c_1}\cdot t\right)\end{array}\right]dt$$

$$=\int_0^T\left[\frac{c_2}{c_1}\cdot t^2+\frac{2B}{T}\cdot t-\frac{c_2T}{c_1}\cdot t-\left(\frac{B}{2}-\frac{c_2T^2}{8c_1}\right)\right]dt$$

$$=\frac{-c_2}{24c_1}\cdot T^3+\frac{B}{2}\cdot T=\frac{T}{2}\cdot\left(B-\frac{c_2T^2}{12c_1}\right)\ \geq\frac{T}{2}\cdot\left(\frac{c_2T^2}{4c_1}-\frac{c_2T^2}{12c_1}\right)=\frac{c_2T^3}{12c_1}>0$$

$$\frac{\partial^2L}{\partial c_2^2}=\frac{-1}{24c_1}\cdot T^3<0$$

(2)**當情況 2** 發生時（即 $B<\frac{c_2T^2}{4c_1}$ 或 $DF_1<0$）：

此時 $t_{w^*}(c_2)=T-2\sqrt{\frac{c_1\cdot B}{c_2}}$ 、$\frac{\partial t_{w^*}(c_2)}{\partial c_2}=-2\sqrt{c_1B}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{c_2^3}}=\frac{1}{c_2}\cdot\sqrt{\frac{c_1B}{c_2}}$ 、

$w_{c_2}^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_2)\right)^2$，得 $\frac{\partial w_{c_2}^*(t)}{\partial c_2}=\frac{1}{4c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_2)\right)^2-\frac{1}{2c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_2)\right)\cdot\sqrt{\frac{c_1B}{c_2}}$

$w_{c_2}^*{}'(t)=\frac{c_2}{2c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_2)\right)$，得 $\frac{\partial w_{c_2}^*{}'(t)}{\partial c_2}=\frac{1}{2c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_2)\right)-\frac{1}{2c_1}\cdot\sqrt{\frac{c_1B}{c_2}}$

將這些代入(A.3.4)式中，得

$$\frac{\partial L}{\partial c_2}=\int_{t_{w^*}(c_2)}^T\left[\begin{array}{l}2c_1\cdot\left(\frac{c_2}{2c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_2)\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{2c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_2)\right)-\frac{1}{2c_1}\cdot\sqrt{\frac{c_1B}{c_2}}\right)\\+\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_2)\right)^2+c_2\cdot\left(\frac{1}{4c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_2)\right)^2-\frac{1}{2c_1}\cdot\sqrt{\frac{c_1B}{c_2}}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_2)\right)\right)\end{array}\right]dt$$

$$=\int_{t_{w^*}(c_2)}^T\left[\frac{c_2}{c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_2)\right)^2-\sqrt{\frac{c_2B}{c_1}}\cdot\left(t-t_{w^*}(c_2)\right)\right]dt$$

$$=\frac{8}{3}\cdot\frac{c_1B}{c_2}\cdot\sqrt{\frac{c_2B}{c_1}}-2\cdot\frac{c_1B}{c_2}\cdot\sqrt{\frac{c_2B}{c_1}}=\frac{2B}{3}\cdot\sqrt{\frac{c_1B}{c_2}}>0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial c_2^2}=\frac{2B}{3}\cdot\sqrt{c_1B}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{c_2^3}}=\frac{-B}{3}\cdot\sqrt{\frac{c_1B}{c_2^3}}<0$$

故得 $L=L(c_1,c_2,B,T)$ 對 c_2 之變化率，如下：

(1)當**情況 1** 發生時，得 $\frac{\partial L}{\partial c_2}=\frac{T}{2}\cdot\left(B-\frac{c_2T^2}{12c_1}\right)>0$ 、 $\frac{\partial^2 L}{\partial c_2^2}=\frac{-1}{24c_1}\cdot T^3<0$ 。

(2)當**情況 2** 發生時，得 $\frac{\partial L}{\partial c_1}=\frac{2B}{3}\cdot\sqrt{\frac{c_1B}{c_2}}>0$ 、 $\frac{\partial^2 L}{\partial c_1^2}=\frac{-B}{3}\cdot\sqrt{\frac{c_1B}{c_2^3}}<0$ 。

5.表 3.2~表 3.4

綜合上面 1~4 之結果，彙整得下表 3.2、表 3.3、表 3.4，如下：

表 3.2 函數 L 對各參數的偏導數（當 $DF_1\geq 0$ 時）

函數 L / 參數	一階偏導數	二階偏導數
B	$\frac{\partial L}{\partial B}=c_2T+2c_1\cdot\left(\frac{B}{T}-\frac{c_2T}{4c_1}\right)$	$\frac{\partial^2 L}{\partial B^2}=\frac{2c_1}{T}$
T	$\frac{\partial L}{\partial T}=-c_1\cdot\left\{\frac{B}{T}-\frac{c_2T}{4c_1}\right\}^2$	$\frac{\partial^2 L}{\partial T^2}=\frac{2c_1}{T^3}\cdot\left[B^2-\left(\frac{c_2T^2}{4c_1}\right)^2\right]$
c_1	$\frac{\partial L}{\partial c_1}=\frac{c_2^2}{48c_1^2}\cdot T^3+\frac{B^2}{T}$	$\frac{\partial^2 L}{\partial c_1^2}=\frac{-c_2^2}{24c_1^3}\cdot T^3$
c_2	$\frac{\partial L}{\partial c_2}=\frac{T}{2}\cdot\left(B-\frac{c_2T^2}{12c_1}\right)$	$\frac{\partial^2 L}{\partial c_2^2}=\frac{-1}{24c_1}\cdot T^3$

表 3.3 函數 L 對各參數的偏導數（當 $DF_1 < 0$ 時）

函數 L ╲ 參數	一階偏導數	二階偏導數
B	$\frac{\partial L}{\partial B} = 2\sqrt{c_1 c_2 B}$	$\frac{\partial^2 L}{\partial B^2} = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{B}}$
T	$\frac{\partial L}{\partial T} = 0$	$\frac{\partial^2 L}{\partial T^2} = 0$
c_1	$\frac{\partial L}{\partial c_1} = \frac{2B}{3} \cdot \sqrt{\frac{c_2 B}{c_1}}$	$\frac{\partial^2 L}{\partial c_1^2} = \frac{-B}{3} \cdot \sqrt{\frac{c_2 B}{c_1^3}}$
c_2	$\frac{\partial L}{\partial c_2} = \frac{2B}{3} \cdot \sqrt{\frac{c_1 B}{c_2}}$	$\frac{\partial^2 L}{\partial c_2^2} = \frac{-B}{3} \cdot \sqrt{\frac{c_1 B}{c_2^3}}$

表 3.4 函數 L 的參數分析

參數 ╲ 函數 L	B	T	c_1	c_2	條件
一階導數	＋	－	＋	＋	$DF_1 \geq 0$ IP
二階導數	＋	＋	－	－	
一階導數	＋	0	＋	＋	$DF_1 < 0$ DP
二階導數	＋	0	－	－	

註：「＋」表示大於 0；「－」表示小於 0；「0」表示等於 0。

附錄 B　第四章之相關公式推導或證明

B.1 推論的證明

利用反證法，證明如下：

推論-(1)：

若 $x^*(t)$ 在時間區間 $[t_{x^*}, T]$ 內不是嚴格增函數，則在 $[t_{x^*}, T]$ 之區間中，必存在一個使得函數值 $x^*(t)$ 為常數的最大子區間，記作 $[a,b]$，即

$$x^{*}{}'(t) \equiv 0,\ \ \forall\, t \in [a,b] \subset [t_{x^*}, T] \qquad \text{(B.1.1)}$$

此表示生產者在時間區間 $[a,b]$ 上是採取停產的行為。

情況 1： $a > t_{x^*}$

因為 $x^{*}{}'(t)$ 在 a 的某一左近旁（left neighborhood）須滿足最佳解之必要條件—尤拉方程式，故得 $x^{*}{}'$ 在 a 的某一左近旁為 t 之正斜率線性函數，即 $\lim_{t\to a^-} x^{*}{}'(t) > 0$；又由(B.1.1)式可得 $\lim_{t\to a^+} x^{*}{}'(t) = 0$；此表示函數 $x^{*}{}'(t)$ 在 a 點處是不連續的，即 $x^*(t) \notin C^1[t_{x^*}, T]$。

此結果與 x^* 為最佳解的假設條件 $x^*(t) \in C^1[t_{x^*}, T]$ 互相矛盾。

情況 2： $b < T$

因為 $x^{*}{}'(t)$ 在 b 的某一右近旁（right neighborhood）須滿足最佳解之必要條件—尤拉方程式，故得 $x^{*}{}'$ 在 b 的某一右近旁為 t 之正斜率線性函數，即 $\lim_{t\to b^+} x^{*}{}'(t) > 0$；又由(B.1.1)式可得 $\lim_{t\to b^-} x^{*}{}'(t) = 0$；此表示函數 $x^{*}{}'(t)$ 在 b 點處是不連續的，即 $x^*(t) \notin C^1[t_{x^*}, T]$。

此結果與 x^* 為最佳解的假設條件 $x^*(t) \in C^1[t_{x^*}, T]$ 互相矛盾。

由上述之**情況 1** 與**情況 2** 的說明，則**推論-(1)**得證。

推論-(2)：

假設$T_{x^*} < T$且假設**推論-(2)**的結果不成立。令

$$t_1 = Max\left\{ t \,\middle|\, t \ge T_{x^*} \text{ 且 } x^*{}'(t) = u(t) \right\}$$

則由**推論-(1)**得知：存在t_2，$T_{x^*} \le t_1 < t_2 \le T$，使得$0 < x^*{}'(t) < u(t)$, $\forall\, t \in (t_1, t_2)$。

因為x^*在$[t_1, t_2]$必須滿足最佳解之必要條件---尤拉方程式，即

$$c_2 = \frac{d}{dt}\left[2c_3 \cdot \frac{x^*{}'(t)}{u(t)} \right] \text{，} \forall\, t \in [t_1, t_2]$$

將上述之等式兩邊積分，得

$$\frac{x^*{}'(t)}{u(t)} = \frac{c_2}{2c_3} \cdot t + \frac{k}{2c_3} \text{，} \forall\, t \in [t_1, t_2]$$，式中k為積分常數。

因此，可得

$\dfrac{x^*{}'(t)}{u(t)}$為在區間$[t_1, t_2]$上之嚴格增函數 (B.1.2)

由(B.1.2)式可知：

對任意$\delta > 0$，不等式$\dfrac{x^*{}'(t_1+\delta)}{u(t_1+\delta)} > \dfrac{x^*{}'(t_1)}{u(t_1)} = 1$恒成立；因而得

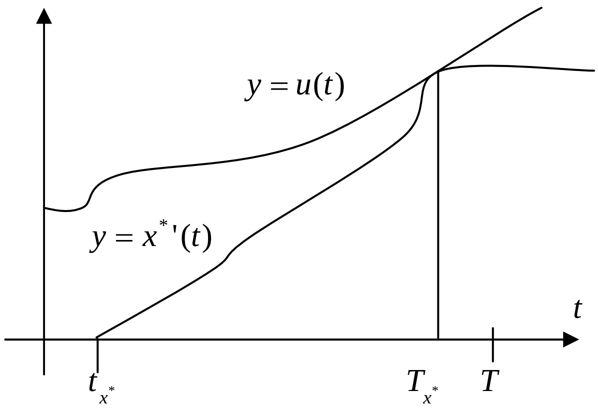
$$x^*{}'(t_1+\delta) > u(t_1+\delta)$$

此結果與**模式(Ⅲ)**之限制式$0 \le x^*{}'(t) \le u(t)$, $\forall\, t \in [t_{x^*}, T]$互相矛盾；

故**推論-(2)**得證。

B.2　情況(Ⅰ)與情況(Ⅱ)兩者間互斥的證明

由**推論-(2)**的結果知，對於最佳生產計畫 x^*，當「全產能生產」之起始時點 T_{x^*} 發生後，是不可能再有另一段的「非全產能生產」的區間產生；因此，如下圖的生產情況是不可能存在的。



1.如果**模式(Ⅲ)**之最佳解 x^* 是屬於**情況(Ⅰ)**，則 $\left\{t \,\middle|\, t_x \le t \le T,\ x'(t)=u(t)\right\}$為空集合，因而，$T_{x^*}$ 是不存在的；

因此，x^* 必不屬於**情況(Ⅱ)**。

2.如果**模式(Ⅲ)**之最佳解 x^* 是屬於**情況(Ⅱ)**，則 $\left\{t \,\middle|\, t_x \le t \le T,\ x'(t)=u(t)\right\}$不為空集合，且 $Min\left\{t \,\middle|\, t_{x^*} \le t \le T,\ x^{*}{}'(t)=u(t)\right\}$ 存在。

令 $T_{x^*}=Min\left\{t \,\middle|\, t_{x^*} \le t \le T,\ and\ x^{*}{}'(t)=u(t)\right\}$；

因此，x^* 必不屬於**情況(Ⅰ)**。

故**情況(Ⅰ)**與**情況(Ⅱ)**此兩種情況是為互斥的。

B.3 有關(4.3.1)式的證明

模式(Ⅲ)是一個變分法問題，且令 F 為**模式(Ⅲ)**的被積分函數，即

$$F = c_3 \cdot \frac{\left(x'(t)\right)^2}{u(t)} + c_2 \cdot x(t)$$

將函數 F 分別對 x 及 x' 作偏微分，得 $F_x = c_2$ 且 $F_{x'} = 2c_3 \cdot \dfrac{x'(t)}{u(t)}$ 。

利用變分法之尤拉方程式 $F_x = \dfrac{d}{dt} F_{x'}$ ，則**模式(Ⅲ)**的最佳解 x^* 必須滿足下列之必要條件：

$$c_2 = \frac{d}{dt}\left[2c_3 \cdot \frac{x^{*}{}'(t)}{u(t)}\right]$$

將上述之等式兩邊對 t 作積分，得

$$2c_3 \cdot \frac{x^{*}{}'(t)}{u(t)} = c_2 t + k$$ ，即

$$\frac{x^{*}{}'(t)}{u(t)} = \frac{c_2}{2c_3} \cdot t + \frac{k}{2c_3}$$ ，式中 k 為積分常數。

經整理後得

$$x^{*}{}'(t) = \left(\frac{c_2}{2c_3} \cdot t + \frac{k}{2c_3}\right) \cdot u(t)$$

將上述之等式再對 t 作積分，得

$$x^*(t) = \int_{t_{x^*}}^{t} \left(\frac{c_2}{2c_3} \cdot s + \frac{k}{2c_3}\right) \cdot u(s)\, ds, \quad \forall\, t \in [\, t_{x^*} \,, T\,]$$

B.4 有關(4.3.5)式的證明

因為$F - x' \cdot F_{x'} = c_3 \cdot \dfrac{(x'(t))^2}{u(t)} + c_2 \cdot x(t) - x'(t) \cdot 2c_3 \cdot \dfrac{x'(t)}{u(t)}$

$$= c_3 \cdot \frac{(x'(t))^2}{u(t)} + c_2 \cdot x(t) - 2c_3 \cdot \frac{(x'(t))^2}{u(t)}$$

$$= c_2 \cdot x(t) - c_3 \cdot \frac{(x'(t))^2}{u(t)}$$

又t_{x^*}滿足邊界可移性條件$\left\{F - x^{*}{}' \cdot F_{x^{*}{}'}\right\}\Big|_{t=t_{x^*}} = 0$，即

$$c_2 \cdot x^*(t_{x^*}) - c_3 \cdot \frac{(x^{*}{}'(t_{x^*}))^2}{u(t_{x^*})} = 0$$

利用$x^*(t_{x^*}) = 0$及$u(t_{x^*}) > 0$

故得 $x^{*}{}'(t_{x^*}) = 0$。

B.5　有關(4.3.9)式的證明

令 F 為**模式(Ⅲ)**之被積分函數，即 $F = c_3 \cdot \dfrac{(x'(t))^2}{u(t)} + c_2 \cdot x(t)$ ，則 $F_{x'} = 2c_3 \cdot \dfrac{x'(t)}{u(t)}$ 。

當最佳解為 $x^*(t)$ 時，則 $F = c_3 \cdot \dfrac{(x^{*}{}'(t))^2}{u(t)} + c_2 \cdot x^*(t)$ ，則 $F_{x'} = 2c_3 \cdot \dfrac{x^{*}{}'(t)}{u(t)}$ 。

因為 T_{x^*} 滿足的關係式為 $R(T_{x^*}) = B - \int_{T_{x^*}}^{T} u(s)\, ds$ ，則 $R'(T_{x^*}) = u(T_{x^*})$ 。

又殘值（Salvage Value）之函數及其偏導數如下：

$$G(T_{x^*}, x^*(T_{x^*})) = c_2 \cdot x^*(T_{x^*}) \cdot (T - T_{x^*}) + \int_{T_{x^*}}^{T} \left\{ c_3 \cdot u(t) + c_2 \cdot \int_{T_{x^*}}^{t} u(s)\, ds \right\} dt$$

$$G_2 = \frac{\partial G}{\partial x^*(T_{x^*})} = c_2 \cdot (T - T_{x^*})\ ;$$

$$G_1 = \frac{\partial G}{\partial T_{x^*}} = -c_2 \cdot x^*(T_{x^*}) + 0 - \left(c_3 \cdot u(T_{x^*}) + c_2 \cdot \int_{T_{x^*}}^{T_{x^*}} u(s)\, ds \right) + \int_{T_{x^*}}^{T} \left[0 - c_2 \cdot u(T_{x^*}) \right] dt$$

$$= -c_2 \cdot x^*(T_{x^*}) - c_3 \cdot u(T_{x^*}) + \int_{T_{x^*}}^{T} \left[-c_2 \cdot u(T_{x^*}) \right] dt$$

$$= -c_2 \cdot x^*(T_{x^*}) - c_3 \cdot u(T_{x^*}) - c_2 \cdot u(T_{x^*}) \cdot (T - T_{x^*})$$

故由殘值與關係式必須滿足的邊界可移性條件，得

$$F + F_{x'} \cdot (R' - x') + G_2 \cdot R' + G_1$$

$$= c_3 \cdot \frac{(x^{*}{}'(t))^2}{u(t)} + c_2 \cdot x^*(t) + 2c_3 \cdot \frac{x^{*}{}'(t)}{u(t)} \cdot \left(u(T_{x^*}) - x^{*}{}'(t) \right)$$

$$+ c_2 \cdot (T - T_{x^*}) \cdot u(T_{x^*}) - c_2 \cdot x^*(T_{x^*}) - c_3 \cdot u(T_{x^*}) - c_2 \cdot u(T_{x^*}) \cdot (T - T_{x^*})$$

$$= c_3 \cdot \frac{(x^{*}{}'(t))^2}{u(t)} + c_2 \cdot x^*(t) + 2c_3 \cdot \frac{x^{*}{}'(t)}{u(t)} \cdot u(T_{x^*})$$

$$-2c_3 \cdot \frac{\left(x^{*}{}'(t)\right)^2}{u(t)} - c_2 \cdot x^{*}(T_{x^*}) - c_3 \cdot u(T_{x^*})$$

$$= -c_3 \cdot \frac{\left(x^{*}{}'(t)\right)^2}{u(t)} + c_2 \cdot x^{*}(t) + 2c_3 \cdot \frac{x^{*}{}'(t)}{u(t)} \cdot u(T_{x^*}) - c_2 \cdot x^{*}(T_{x^*}) - c_3 \cdot u(T_{x^*})$$

當 $t = T_{x^*}$ 時，得

$$\left\{F + F_{x'} \cdot \left(R' - x'\right) + G_2 \cdot R' + G_1\right\}\Big|_{t = T_{x^*}}$$

$$= -c_3 \cdot \frac{\left(x^{*}{}'(T_{x^*})\right)^2}{u(T_{x^*})} + c_2 \cdot x^{*}(T_{x^*}) + 2c_3 \cdot \frac{x^{*}{}'(T_{x^*})}{u(T_{x^*})} \cdot u(T_{x^*}) - c_2 \cdot x^{*}(T_{x^*}) - c_3 \cdot u(T_{x^*})$$

$$= -c_3 \cdot \frac{\left(x^{*}{}'(T_{x^*})\right)^2}{u(T_{x^*})} + 2c_3 \cdot x^{*}{}'(T_{x^*}) - c_3 \cdot u(T_{x^*})$$

令 $\left\{F + F_{x'} \cdot \left(R' - x'\right) + G_2 \cdot R' + G_1\right\}\Big|_{t = T_{x^*}} = 0$ ，則得

$$-c_3 \cdot \frac{\left(x^{*}{}'(T_{x^*})\right)^2}{u(T_{x^*})} + 2c_3 \cdot x^{*}{}'(T_{x^*}) - c_3 \cdot u(T_{x^*}) = 0$$

解得 $x^{*}{}'(T_{x^*}) = u(T_{x^*})$

B.6 有關(4.3.12)式的證明

在**模式(Ⅲ)**中，當$t \in [t_{x^*}, T_{x^*}]$時，利用其尤拉方程式可以得到

$$x^*(t) = \int_{t_{x^*}}^{t} \left(1 - \frac{c_2}{2c_3} \cdot (T_{x^*} - s)\right) \cdot u(s)\, ds \ ,$$

且t_{x^*}及T_{x^*}滿足下列關係式：

$$\int_{t_{x^*}}^{T_{x^*}} \left(T_{x^*} - t\right) \cdot u(t)\, dt = \frac{2c_3}{c_2} \cdot \left\{\int_{t_{x^*}}^{T} u(t)\, dt - B\right\} \ , \ 0 \le t_{x^*} < T_{x^*} \le T$$

為了方便，在下列的證明過程中暫以符號$\bar{T}$代替T_{x^*}，並以符號$\bar{t}$代替t_{x^*}。

給定$\bar{t}$，將$\bar{T}$考慮成$\bar{t}$的函數，記作$\bar{T} = \bar{T}(\bar{t})$，且$\bar{t}$與$\bar{T}$滿足下列的關係式：

$$\int_{\bar{t}}^{\bar{T}} \left(\bar{T} - s\right) \cdot u(s)\, ds = \frac{2c_3}{c_2} \cdot \left\{\int_{\bar{t}}^{T} u(s)\, ds - B\right\} \text{，式中 } \bar{t} < \bar{T} \le T \qquad \text{(B.6.1)}$$

將**模式(Ⅲ)**的最佳解記為$x_{\bar{t}}(t)$，則

$$x_{\bar{t}}(t) = \int_{\bar{t}}^{t} \left(1 - \frac{c_2}{2c_3} \cdot (\bar{T} - s)\right) \cdot u(s)\, ds \text{ ；且得 } x_{\bar{t}}'(t) = \left(1 - \frac{c_2}{2c_3} \cdot (\bar{T} - t)\right) \cdot u(t) \text{ 。}$$

令$L(\bar{t})$為$x_{\bar{t}}(t)$所對應的目標值函數，即

$$L(\bar{t}) = \int_{\bar{t}}^{\bar{T}} \left\{c_3 \cdot \frac{\left(x_{\bar{t}}'(t)\right)^2}{u(t)} + c_2 \cdot x_{\bar{t}}(t)\right\} dt + G(\bar{T}) \qquad \text{(B.6.2)}$$

式中

$$G(\bar{T}) = \int_{\bar{T}}^{T} \left\{c_3 u(t) + c_2 \cdot \int_{\bar{T}}^{t} u(s)\, ds\right\} dt + c_2 \cdot \left[B - \int_{\bar{T}}^{T} u(s)\, ds\right] \cdot (T - \bar{T}) \qquad \text{(B.6.3)}$$

以下要證明$\dfrac{\partial L(\bar{t})}{\partial \bar{t}} \ge 0$，$\forall\, \bar{t} \ge 0$；進而得到$L(0) = \underset{\bar{t} \ge 0}{Min}\, L(\bar{t})$。

證明：(先將 $x_{\bar{t}}(t)$ 及 $x_{\bar{t}}'(t)$ 代入 $L(\bar{t})$ 後並整理，再求 $\dfrac{d\,L(\bar{t})}{d\,\bar{t}}$ =？)

將 $x_{\bar{t}}(t)$ 及 $x_{\bar{t}}'(t)$ 代入(B.6.2)式，得

$$L(\bar{t})=\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}\left\{c_3\cdot\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-t)\right)^2\cdot u(t)+c_2\cdot\int_{\bar{t}}^{t}\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-s)\right)\cdot u(s)\,ds\right\}dt+G(\bar{T})$$

$$=\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}c_3\cdot\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-t)\right)^2\cdot u(t)\,dt$$

$$+c_2\cdot\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}\left\{\int_{\bar{t}}^{t}\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-s)\right)\cdot u(s)\,ds\right\}dt+G(\bar{T}) \tag{B.6.4}$$

對(B.6.4)式中之積分式 $\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}c_3\cdot\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-t)\right)^2\cdot u(t)\,dt$ ，利用分部積分法作積分，如下：

令 $M=c_3\cdot\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-t)\right)$ ， $dN=\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-t)\right)\cdot u(t)\,dt$ ；

則 $dM=\frac{c_2}{2}\,dt$ ， $N=\int_{\bar{t}}^{t}\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-s)\right)\cdot u(s)\,ds$

得 $\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}c_3\cdot\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-t)\right)^2\cdot u(t)\,dt$

$$=c_3\cdot\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-t)\right)\cdot\int_{\bar{t}}^{t}\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-s)\right)\cdot u(s)\,ds\Bigg|_{t=\bar{t}}^{t=\bar{T}}$$

$$-\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}\frac{c_2}{2}\cdot\left\{\int_{\bar{t}}^{t}\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-s)\right)\cdot u(s)\,ds\right\}dt$$

$$=c_3\cdot\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-s)\right)\cdot u(s)\,ds$$

$$-\frac{c_2}{2}\cdot\int_{\bar t}^{\bar T}\left\{\int_{\bar t}^{t}\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar T-s)\right)\cdot u(s)\,ds\right\}dt \tag{B.6.5}$$

將(B.6.5)式代入(B.6.4)式中，得

$$L(\bar t)=c_3\cdot\int_{\bar t}^{\bar T}\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar T-s)\right)\cdot u(s)\,ds$$

$$+\frac{c_2}{2}\cdot\int_{\bar t}^{\bar T}\left\{\int_{\bar t}^{t}\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar T-s)\right)\cdot u(s)\,ds\right\}dt+G(\bar T)$$

將函數$L(\bar t)$對$\bar t$作微分，可得：（將$\bar T$考慮為$\bar t$的函數）

$$\frac{d\,L(\bar t)}{d\,\bar t}=c_3\cdot\left\{\begin{array}{l}\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar T-\bar T)\right)\cdot u(\bar T)\cdot\frac{d\,\bar T}{d\,\bar t}-\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar T-\bar t)\right)\cdot u(\bar t)\\ +\int_{\bar t}^{\bar T}\left(0-\frac{c_2}{2c_3}\cdot\frac{d\,\bar T}{d\,\bar t}\right)\cdot u(s)\,ds\end{array}\right\}$$

$$+\frac{c_2}{2}\cdot\left\{\begin{array}{l}\int_{\bar t}^{\bar T}\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar T-s)\right)\cdot u(s)\,ds\cdot\frac{d\,\bar T}{d\,\bar t}-\int_{\bar t}^{\bar t}\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar T-s)\right)\cdot u(s)\,ds\\ +\int_{\bar t}^{\bar T}\left\{0-\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar T-\bar t)\right)\cdot u(\bar t)+\int_{\bar t}^{t}\left(0-\frac{c_2}{2c_3}\cdot\frac{d\,\bar T}{d\,\bar t}\right)\cdot u(s)\,ds\right\}dt\end{array}\right\}+\frac{d\,G(\bar T)}{d\,\bar t}$$

$$=c_3\cdot\left\{\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar T-\bar T)\right)\cdot u(\bar T)\cdot\frac{d\,\bar T}{d\,\bar t}-\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar T-\bar t)\right)\cdot u(\bar t)-\frac{c_2}{2c_3}\cdot\frac{d\,\bar T}{d\,\bar t}\cdot\int_{\bar t}^{\bar T}u(s)\,ds\right\}$$

$$+\frac{c_2}{2}\cdot\left\{\begin{array}{l}\frac{d\,\bar T}{d\,\bar t}\cdot\int_{\bar t}^{\bar T}\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar T-s)\right)\cdot u(s)\,ds-0\\ \qquad+\int_{\bar t}^{\bar T}\left\{-\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar T-\bar t)\right)\cdot u(\bar t)-\frac{c_2}{2c_3}\cdot\frac{d\,\bar T}{d\,\bar t}\cdot\int_{\bar t}^{t}u(s)\,ds\right\}dt\end{array}\right\}+\frac{d\,G(\bar T)}{d\,\bar t}$$

$$=c_3\cdot\left\{u(\bar T)\cdot\frac{d\,\bar T}{d\,\bar t}-\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar T-\bar t)\right)\cdot u(\bar t)-\frac{c_2}{2c_3}\cdot\frac{d\,\bar T}{d\,\bar t}\cdot\int_{\bar t}^{\bar T}u(s)\,ds\right\}$$

$$+\frac{c_2}{2}\cdot\left\{\begin{array}{l}\frac{d\,\bar T}{d\,\bar t}\cdot\int_{\bar t}^{\bar T}\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar T-s)\right)\cdot u(s)\,ds-\int_{\bar t}^{\bar T}\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar T-\bar t)\right)\cdot u(\bar t)\,dt\\ \qquad-\frac{c_2}{2c_3}\cdot\frac{d\,\bar T}{d\,\bar t}\cdot\int_{\bar t}^{\bar T}\left(\int_{\bar t}^{t}u(s)\,ds\right)dt\end{array}\right\}+\frac{d\,G(\bar T)}{d\,\bar t}$$

$$= c_3 \cdot u(\overline{T}) \cdot \frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}} - c_3 \cdot \left(1 - \frac{c_2}{2c_3} \cdot (\overline{T} - \bar{t})\right) \cdot u(\bar{t}) - \frac{c_2}{2} \cdot \frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}} \cdot \int_{\bar{t}}^{\overline{T}} u(s)\, ds$$

$$+ \frac{c_2}{2} \cdot \frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}} \cdot \int_{\bar{t}}^{\overline{T}} \left(1 - \frac{c_2}{2c_3} \cdot (\overline{T} - s)\right) \cdot u(s)\, ds - \frac{c_2}{2} \cdot \int_{\bar{t}}^{T} \left(1 - \frac{c_2}{2c_3} \cdot (\overline{T} - \bar{t})\right) \cdot u(\bar{t})\, dt$$

$$- \frac{c_2^2}{4c_3} \cdot \frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}} \cdot \int_{\bar{t}}^{\overline{T}} \left(\int_{\bar{t}}^{t} u(s)\, ds\right) dt + \frac{d\,G(\overline{T})}{d\,\bar{t}}$$

$$= c_3 \cdot u(\overline{T}) \cdot \frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}} - c_3 \cdot \left(1 - \frac{c_2}{2c_3} \cdot (\overline{T} - \bar{t})\right) \cdot u(\bar{t}) - \frac{c_2}{2} \cdot \frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}} \cdot \int_{\bar{t}}^{\overline{T}} u(s)\, ds + \frac{c_2}{2} \cdot \frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}} \cdot \int_{\bar{t}}^{\overline{T}} u(s)\, ds$$

$$- \frac{c_2^2}{4c_3} \cdot \frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}} \cdot \int_{\bar{t}}^{\overline{T}} (\overline{T} - s) \cdot u(s)\, ds - \frac{c_2}{2} \cdot \left(1 - \frac{c_2}{2c_3} \cdot (\overline{T} - \bar{t})\right) \cdot u(\bar{t}) \cdot (\overline{T} - \bar{t})$$

$$- \frac{c_2^2}{4c_3} \cdot \frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}} \cdot \int_{\bar{t}}^{\overline{T}} \left(\int_{\bar{t}}^{t} u(s)\, ds\right) dt + \frac{d\,G(\overline{T})}{d\,\bar{t}}$$

$$= c_3 \cdot u(\overline{T}) \cdot \frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}} - \left(1 - \frac{c_2}{2c_3} \cdot (\overline{T} - \bar{t})\right) \cdot u(\bar{t}) \cdot \left(c_3 + \frac{c_2}{2} \cdot (\overline{T} - \bar{t})\right)$$

$$- \frac{c_2^2}{4c_3} \cdot \frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}} \cdot \int_{\bar{t}}^{\overline{T}} (\overline{T} - s) \cdot u(s)\, ds - \frac{c_2^2}{4c_3} \cdot \frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}} \cdot \int_{\bar{t}}^{\overline{T}} \left(\int_{\bar{t}}^{t} u(s)\, ds\right) dt + \frac{d\,G(\overline{T})}{d\,\bar{t}} \qquad \text{(B.6.6)}$$

由(B.6.3)式，可得

$$\frac{d\,G(\overline{T})}{d\,\bar{t}} = -c_3 \cdot u(\overline{T}) \cdot \frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}} - c_2 \cdot \left(B - \int_{\overline{T}}^{T} u(s)\, ds\right) \cdot \frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}$$

（見下方證明 **A**）

將此代入(B.6.6)式中，得

$$\frac{d\,L(\bar{t})}{d\,\bar{t}} = c_3 \cdot u(\overline{T}) \cdot \frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}} - \left(1 - \frac{c_2}{2c_3} \cdot (\overline{T} - \bar{t})\right) \cdot u(\bar{t}) \cdot \left(c_3 + \frac{c_2}{2} \cdot (\overline{T} - \bar{t})\right)$$

$$- \frac{c_2^2}{4c_3} \cdot \frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}} \cdot \int_{\bar{t}}^{\overline{T}} (\overline{T} - s) \cdot u(s)\, ds - \frac{c_2^2}{4c_3} \cdot \frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}} \cdot \int_{\bar{t}}^{\overline{T}} \left(\int_{\bar{t}}^{t} u(s)\, ds\right) dt$$

$$-c_3\cdot u(\bar{T})\cdot\frac{d\,\bar{T}}{d\,\bar{t}}-c_2\cdot\left(B-\int_{\bar{T}}^{T}u(s)\,ds\right)\cdot\frac{d\,\bar{T}}{d\,\bar{t}}$$

$$=-\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-\bar{t})\right)\cdot u(\bar{t})\cdot\left(c_3+\frac{c_2}{2}\cdot(\bar{T}-\bar{t})\right)-\frac{c_2^2}{4c_3}\cdot\frac{d\,\bar{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}\left(\bar{T}-s\right)\cdot u(s)\,ds$$

$$-\frac{c_2^2}{4c_3}\cdot\frac{d\,\bar{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}\left(\int_{\bar{t}}^{t}u(s)\,ds\right)dt-c_2\cdot\left(B-\int_{\bar{T}}^{T}u(s)\,ds\right)\cdot\frac{d\,\bar{T}}{d\,\bar{t}} \tag{B.6.7}$$

又由(B.6.1)式，可得

$$\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}\left(\bar{T}-s\right)\cdot u(s)\,ds=\frac{2c_3}{c_2}\cdot\left\{\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}u(s)\,ds+\int_{\bar{T}}^{T}u(s)\,ds-B\right\}$$

（見下方證明 **B-(c)**）

將此結果代入(B.6.7)式，得

$$\frac{d\,L(\bar{t})}{d\,\bar{t}}=-\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-\bar{t})\right)\cdot u(\bar{t})\cdot\left(c_3+\frac{c_2}{2}\cdot(\bar{T}-\bar{t})\right)$$

$$-\frac{c_2}{2}\cdot\frac{d\,\bar{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\left(\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}u(s)\,ds+\int_{\bar{T}}^{T}u(s)\,ds-B\right)$$

$$-\frac{c_2^2}{4c_3}\cdot\frac{d\,\bar{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}\left(\int_{\bar{t}}^{t}u(s)\,ds\right)dt-c_2\cdot\left(B-\int_{\bar{T}}^{T}u(s)\,ds\right)\cdot\frac{d\,\bar{T}}{d\,\bar{t}}$$

$$=-\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-\bar{t})\right)\cdot u(\bar{t})\cdot\left(c_3+\frac{c_2}{2}\cdot(\bar{T}-\bar{t})\right)-\frac{c_2}{2}\cdot\frac{d\,\bar{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}u(s)\,ds$$

$$+\frac{c_2}{2}\cdot\frac{d\,\bar{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\left(B-\int_{\bar{T}}^{T}u(s)\,ds\right)-\frac{c_2^2}{4c_3}\cdot\frac{d\,\bar{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}\left(\int_{\bar{t}}^{t}u(s)\,ds\right)dt$$

$$-c_2\cdot\left(B-\int_{\bar{T}}^{T}u(s)\,ds\right)\cdot\frac{d\,\bar{T}}{d\,\bar{t}}$$

$$=-\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-\bar{t})\right)\cdot u(\bar{t})\cdot\left(c_3+\frac{c_2}{2}\cdot(\bar{T}-\bar{t})\right)-\frac{c_2}{2}\cdot\frac{d\,\bar{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}u(s)\,ds$$

$$-\frac{c_2}{2}\cdot\frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\left(B-\int_{\overline{T}}^{T}u(s)\,ds\right)-\frac{c_2^2}{4c_3}\cdot\frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}\left(\int_{\bar{t}}^{t}u(s)\,ds\right)dt \qquad \text{(B.6.8)}$$

由(B.6.1)式，可得

$$u(\bar{t})\cdot\left(1-\frac{c_2}{2c_3}(\overline{T}-\bar{t})\right)=-\frac{c_2}{2c_3}\cdot\frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}u(s)\,ds$$

（見下方證明 **B-(b)**）

將此結果代入(B.6.8)式，得

$$\frac{d\,L(\bar{t})}{d\,\bar{t}}=\frac{c_2}{2c_3}\cdot\frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}u(s)\,ds\cdot\left(c_3+\frac{c_2}{2}\cdot(\overline{T}-\bar{t})\right)-\frac{c_2}{2}\cdot\frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}u(s)\,ds$$

$$-\frac{c_2}{2}\cdot\frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\left(B-\int_{\overline{T}}^{T}u(s)\,ds\right)-\frac{c_2^2}{4c_3}\cdot\frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}\left(\int_{\bar{t}}^{t}u(s)\,ds\right)dt$$

$$=\frac{c_2}{2}\cdot\frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}u(s)\,ds+\frac{c_2^2}{4c_3}\cdot\frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}\cdot(\overline{T}-\bar{t})\cdot\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}u(s)\,ds-\frac{c_2}{2}\cdot\frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}u(s)\,ds$$

$$-\frac{c_2}{2}\cdot\frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\left(B-\int_{\overline{T}}^{T}u(s)\,ds\right)-\frac{c_2^2}{4c_3}\cdot\frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}\left(\int_{\bar{t}}^{t}u(s)\,ds\right)dt$$

$$=\frac{c_2^2}{4c_3}\cdot(\overline{T}-\bar{t})\cdot\frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}u(s)\,ds-\frac{c_2}{2}\cdot\frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\left(B-\int_{\overline{T}}^{T}u(s)\,ds\right)$$

$$-\frac{c_2^2}{4c_3}\cdot\frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}\left(\int_{\bar{t}}^{t}u(s)\,ds\right)dt$$

$$=\frac{c_2^2}{4c_3}\cdot\frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\left\{\begin{array}{l}(\overline{T}-\bar{t})\cdot\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}u(s)\,ds\\ -\frac{2c_3}{c_2}\cdot\left(B-\int_{\overline{T}}^{T}u(s)\,ds\right)-\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}\left(\int_{\bar{t}}^{t}u(s)\,ds\right)dt\end{array}\right\} \qquad \text{(B.6.9)}$$

因為

$$\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}\left(\int_{\bar{t}}^{t}u(s)\,ds\right)dt=-\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}\left(t-\overline{T}\right)\cdot u(t)\,dt$$

（見下方證明 **C**）

$$\frac{2c_3}{c_2}\cdot\left\{B-\int_{\bar{T}}^{T}u(s)\,ds\right\}=\frac{2c_3}{c_2}\cdot\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}u(s)\,ds-\int_{\bar{t}}^{T}\left(\bar{T}-s\right)\cdot u(s)\,ds$$（見下方證明 **B-(d)**）

將此結果代入(B.6.9)式，得

$$\frac{d\,L(\bar{t})}{d\,\bar{t}}=\frac{c_2^2}{4c_3}\cdot\frac{d\,\bar{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\left\{\begin{aligned}&(\bar{T}-\bar{t})\cdot\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}u(s)\,ds-\frac{2c_3}{c_2}\cdot\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}u(s)\,ds\\&\quad+\int_{\bar{t}}^{T}(\bar{T}-s)\cdot u(s)\,ds+\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}(s-\bar{T})\cdot u(s)\,ds\end{aligned}\right\}$$

$$=\frac{c_2^2}{4c_3}\cdot\frac{d\,\bar{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\left\{(\bar{T}-\bar{t})\cdot\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}u(s)\,ds-\frac{2c_3}{c_2}\cdot\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}u(s)\,ds\right\}$$

$$=\frac{c_2^2}{4c_3}\cdot\frac{d\,\bar{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}\left((\bar{T}-\bar{t})-\frac{2c_3}{c_2}\right)\cdot u(s)\,ds$$

$$=\frac{c_2^2}{4c_3}\cdot\frac{d\,\bar{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\left((\bar{T}-\bar{t})-\frac{2c_3}{c_2}\right)\cdot\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}u(s)\,ds \qquad \text{(B.6.10)}$$

最後，再將

$$\frac{d\,\bar{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\bar{T}}u(s)\,ds=-\frac{2c_3}{c_2}\cdot u(\bar{t})\cdot\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-\bar{t})\right)$$（見下方證明 **B-(a)**）

代入(B.6.10)式，得

$$\frac{d\,L(\bar{t})}{d\,\bar{t}}=\frac{c_2^2}{4c_3}\cdot\left(-\frac{2c_3}{c_2}\right)\cdot u(\bar{t})\cdot\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-\bar{t})\right)\times\left((\bar{T}-\bar{t})-\frac{2c_3}{c_2}\right)$$

$$=c_3\cdot u(\bar{t})\cdot\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-\bar{t})\right)^2 \qquad \text{(B.6.11)}$$

在(B.6.11)式中，因為 $c_3\cdot u(\bar{t})\cdot\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\bar{T}-\bar{t})\right)^2\geq 0$ ；所以得

函數 $L(\bar{t})$ 對 $\bar{t}$ 的微分 $\frac{d\,L(\bar{t})}{d\,\bar{t}}\geq 0$ ，$\forall\,\bar{t}\geq 0$ 。

由此可知$L(\bar{t})$為$\bar{t}$之增函數，$\forall\, \bar{t} \geq 0$；

所以，當$\bar{t}=0$時，$L(\bar{t})$有最小值；即$L(0)=\underset{\bar{t}\geq 0}{Min}\, L(\bar{t})$；故得$t_{x^*}=0$。

證明 A： $\dfrac{d\, G(\overline{T})}{d\, \bar{t}} = ?$

因為 $G(\overline{T}) = \int_{\overline{T}}^{T} \left\{ c_3 u(t) + c_2 \cdot \int_{\overline{T}}^{t} u(s)\, ds \right\} dt + c_2 \cdot \left[B - \int_{\overline{T}}^{T} u(s)\, ds \right] \cdot (T - \overline{T})$，且

$$\frac{d\, G(\overline{T})}{d\, \bar{t}} = \frac{d\, G(\overline{T})}{d\, \overline{T}} \cdot \frac{d\, \overline{T}}{d\, \bar{t}} \quad ;$$

又
$$\frac{d\, G(\overline{T})}{d\, \overline{T}} = 0 - c_3 \cdot u(\overline{T}) - c_2 \cdot \int_{\overline{T}}^{\overline{T}} u(s)\, ds + \int_{\overline{T}}^{T} \left(0 - c_2 \cdot u(\overline{T})\right) dt$$

$$+ c_2 \cdot \left(0 + u(\overline{T})\right) \cdot (T - \overline{T}) - c_2 \cdot \left(B - \int_{\overline{T}}^{T} u(s)\, ds \right)$$

$$= -c_3 \cdot u(\overline{T}) - c_2 \cdot u(\overline{T}) \cdot (T - \overline{T}) + c_2 \cdot u(\overline{T}) \cdot (T - \overline{T}) - c_2 \cdot \left(B - \int_{\overline{T}}^{T} u(s)\, ds \right)$$

$$= -c_3 \cdot u(\overline{T}) - c_2 \cdot \left(B - \int_{\overline{T}}^{T} u(s)\, ds \right)$$

得
$$\frac{d\, G(\overline{T})}{d\, \bar{t}} = -c_3 \cdot u(\overline{T}) \cdot \frac{d\, \overline{T}}{d\, \bar{t}} - c_2 \cdot \left(B - \int_{\overline{T}}^{T} u(s)\, ds \right) \cdot \frac{d\, \overline{T}}{d\, \bar{t}}$$

證明 B：

在(B.6.1)式之等號兩邊同時對$\bar{t}$作微分（$\overline{T}$為$\bar{t}$的函數關係），可得

$$\left(\overline{T} - \overline{T}\right) \cdot u(\overline{T}) \cdot \frac{d\, \overline{T}}{d\, \bar{t}} - \left(\overline{T} - \bar{t}\right) \cdot u(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^{\overline{T}} \left(\frac{d\, \overline{T}}{d\, \bar{t}} - 0 \right) \cdot u(s)\, ds = \frac{2c_3}{c_2} \cdot \left\{ 0 - u(\bar{t}) + 0 - 0 \right\}$$

$$\Rightarrow -\left(\overline{T}-\bar{t}\right)\cdot u(\bar{t})+\frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}u(s)\,ds=-\frac{2c_3}{c_2}\cdot u(\bar{t})$$

$$\Rightarrow \frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}u(s)\,ds=-\frac{2c_3}{c_2}\cdot u(\bar{t})+\left(\overline{T}-\bar{t}\right)\cdot u(\bar{t})=-\frac{2c_3}{c_2}\cdot u(\bar{t})\cdot\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\overline{T}-\bar{t})\right) \qquad \text{(a)}$$

即

$$\frac{d\,\overline{T}}{d\,\bar{t}}\cdot\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}u(s)\,ds=-\frac{2c_3}{c_2}\cdot u(\bar{t})\cdot\left(1-\frac{c_2}{2c_3}\cdot(\overline{T}-\bar{t})\right) \qquad \text{(b)}$$

此外，(B.6.1)式可改寫如下：

$$\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}\left(\overline{T}-s\right)\cdot u(s)\,ds=\frac{2c_3}{c_2}\cdot\left\{\int_{\bar{t}}^{T}u(s)\,ds-B\right\}=\frac{2c_3}{c_2}\cdot\left\{\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}u(s)\,ds+\int_{\overline{T}}^{T}u(s)\,ds-B\right\} \qquad \text{(c)}$$

另外，將上式作移項整理，可得

$$\frac{2c_3}{c_2}\cdot\left\{B-\int_{\overline{T}}^{T}u(s)\,ds\right\}=\frac{2c_3}{c_2}\cdot\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}u(s)\,ds-\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}\left(\overline{T}-s\right)\cdot u(s)\,ds \qquad \text{(d)}$$

證明 C： $\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}\left(\int_{\bar{t}}^{t}u(s)\,ds\right)dt=?$

利用分部積分，如下：

令 $M=\int_{\bar{t}}^{t}u(s)\,ds$ ， $dN=dt \;\Rightarrow\; dM=u(t)\,dt$ ， $N=t-\overline{T}$

得 $\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}\left(\int_{\bar{t}}^{t}u(s)\,ds\right)dt=\left\{(t-\overline{T})\cdot\int_{\bar{t}}^{t}u(s)\,ds\right\}\Bigg|_{t=\bar{t}}^{t=\overline{T}}-\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}\left(t-\overline{T}\right)\cdot u(t)\,dt$

$$=0-\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}\left(t-\overline{T}\right)\cdot u(t)\,dt=-\int_{\bar{t}}^{\overline{T}}\left(t-\overline{T}\right)\cdot u(t)\,dt$$

B.7　各時點產能皆受限之最佳生產決策流程

Step 1：決策者面臨新訂單（單一交貨期）。

Step 2：計算 $DF_2=\int_0^T u(s)\,ds-B$ 之值。

Step 3：初步判斷是否接受此新訂單。

$DF_2<0$：若能調整以提昇產能水準，則於調整產能水準後，回到 Step 2。

若無法調整以提昇產能水準，則『放棄接單』;Stop。（DM1）

$DF_2=0$：承接此新訂單，且於承接新訂單後就「立即生產」，並立即採取「全產能生產」；Stop。（DM2）

此時最佳生產函數為 $x^*(t)=\int_0^t u(s)\,ds$ ，$\forall\, t\in[\,0,T\,]$。

$DF_2>0$：承接此新訂單，且到 Step 4。

Step 4：計算 $DF_3=\int_0^T (T-t)\cdot u(t)\,dt-\frac{2c_3}{c_2}\cdot\left\{\int_0^T u(t)\,dt-B\right\}$ 之值。

Step 5：判斷是否採取「全產能生產」的措施，並決定最佳「全產能生產」的起始時點。

若 $DF_3>0$ ，則於承接新訂單後就「立即生產」，且在時點 T_{x^*} 就必須採取「全產能生產」；Stop。（DM3）

此時最佳生產函數為 $x^*(t)$ ，如(4.3.14)式。

若 $DF_3\le 0$ ，則完全不必採取「全產能生產」的措施，到 Step 6。

Step 6：計算 $DF_4=\int_0^T s\cdot u(s)\,ds-\frac{2c_3B}{c_2}$ 之值。

Step 7：判斷是該採取「立即生產」或「延後生產」，並決定「延後生產」

的最佳起始時點。

若 $DF_4 \le 0$ ，則於承接新訂單後就「立即生產」；Stop。（DM4）

此時最佳生產函數為 $x^*(t)$ ，如(4.3.3)及(4.3.4)式。

若 $DF_4 > 0$ ，則於承接新訂單後採取「延後生產」，且於時點 t_{x^*} 才開始生產；Stop。（DM5）

此時最佳生產函數為 $x^*(t)$ ，如(4.3.6)式。

註：T_{x^*} 由等式 $\int_0^{T_{x^*}} \left(T_{x^*} - t\right) \cdot u(t)\, dt = \frac{2c_3}{c_2} \cdot \left\{ \int_0^T u(t)\, dt - B \right\}$ 所唯一決定。

t_{x^*} 由等式 $\int_{t_{x^*}}^T (s - t_{x^*}) \cdot u(s)\, ds = \frac{2c_3 B}{c_2}$ 所唯一決定。

B.8　決策變數 T_{x^*} 與 t_{x^*} 的參數分析（表 4.2）

1.當 $DF_2 > 0$ 且 $DF_3 > 0$ 時，得 $t_{x^*} = 0$，且 T_{x^*} 滿足下列關係式：

$$\int_0^{T_{x^*}} \left(T_{x^*} - t\right) \cdot u(t)\,dt = \frac{2c_3}{c_2} \cdot \left\{\int_0^T u(t)\,dt - B\right\}$$

此時，視 T_{x^*} 為各參數的函數，並利用隱函數微分法，在上述之等式兩邊同時對各參數微分，得結果如下：

$$0 + \int_0^{T_{x^*}} \frac{\partial T_{x^*}}{\partial c_3} \cdot u(t)\,dt = \frac{2}{c_2} \cdot \left\{\int_0^T u(t)\,dt - B\right\} \Rightarrow \frac{\partial T_{x^*}}{\partial c_3} = \frac{2}{c_2} \cdot \frac{\int_0^T u(t)\,dt - B}{\int_0^{T_{x^*}} u(t)\,dt} > 0$$

$$0 + \int_0^{T_{x^*}} \frac{\partial T_{x^*}}{\partial c_2} \cdot u(t)\,dt = \frac{-2c_3}{c_2^2} \cdot \left\{\int_0^T u(t)\,dt - B\right\} \Rightarrow \frac{\partial T_{x^*}}{\partial c_2} = -\frac{2c_3}{c_2^2} \cdot \frac{\int_0^T u(t)\,dt - B}{\int_0^{T_{x^*}} u(t)\,dt} < 0$$

$$0 + \int_0^{T_{x^*}} \frac{\partial T_{x^*}}{\partial B} \cdot u(t)\,dt = \frac{-2c_3}{c_2} \Rightarrow \frac{\partial T_{x^*}}{\partial B} = -\frac{2c_3}{c_2} \cdot \frac{1}{\int_0^{T_{x^*}} u(t)\,dt} < 0$$

$$0 + \int_0^{T_{x^*}} \frac{\partial T_{x^*}}{\partial T} \cdot u(t)\,dt = \frac{2c_3}{c_2} \cdot u(T) \Rightarrow \frac{\partial T_{x^*}}{\partial T} = \frac{2c_3}{c_2} \cdot \frac{u(T)}{\int_0^{T_{x^*}} u(t)\,dt} > 0$$

2.當 $DF_2 > 0$ 且 $DF_3 \le 0$ 且 $DF_4 \le 0$ 時，得 $t_{x^*} > 0$，且 t_{x^*} 滿足下列關係式：

$$\int_{t_{x^*}}^T (s - t_{x^*}) \cdot u(s)\,ds = \frac{2c_3 B}{c_2}$$

此時，視 t_{x^*} 為各參數的函數，並利用隱函數微分法，在上述之等式兩邊同時對各參數微分，得結果如下：

$$\int_{t_{x^*}}^T (0 - \frac{\partial t_{x^*}}{\partial c_3}) \cdot u(s)\,ds = \frac{2B}{c_2} \Rightarrow \frac{\partial t_{x^*}}{\partial c_3} = -\frac{2B}{c_2} \cdot \frac{1}{\int_{t_{x^*}}^T u(t)\,dt} < 0$$

$$\int_{t_{x^*}}^{T} \left(0 - \frac{\partial t_{x^*}}{\partial c_2}\right) \cdot u(s)\, ds = -\frac{2c_3 B}{c_2^2} \Rightarrow \frac{\partial t_{x^*}}{\partial c_2} = \frac{2c_3 B}{c_2^2} \cdot \frac{1}{\int_{t_{x^*}}^{T} u(t)\, dt} > 0$$

$$\int_{t_{x^*}}^{T} \left(0 - \frac{\partial t_{x^*}}{\partial B}\right) \cdot u(s)\, ds = \frac{2c_3}{c_2} \Rightarrow \frac{\partial t_{x^*}}{\partial B} = -\frac{2c_3}{c_2} \cdot \frac{1}{\int_{t_{x^*}}^{T} u(t)\, dt} < 0$$

$$(T - t_{x^*}) \cdot u(T) + \int_{t_{x^*}}^{T} \left(0 - \frac{\partial t_{x^*}}{\partial T}\right) \cdot u(s)\, ds = 0 \Rightarrow \frac{\partial t_{x^*}}{\partial T} = \frac{(T - t_{x^*}) \cdot u(T)}{\int_{t_{x^*}}^{T} u(t)\, dt} > 0$$

附錄 C　第五章之相關公式推導或證明

C.1　模式(IV)的建構說明

設至T_1時點之累積產量為Q_1單位（$Q_1 \ge B_1$），即$W(T_1)=Q_1$；因此，在時間區間$[t_W, T_1]$之總成本為

$$\int_{t_W}^{T_1}\left(c_1\cdot(W'(t))^2+c_2\cdot W(t)\right)\,dt\text{ ；式中 } t_W=Max\left\{t \,\middle|\, W(t)=0\,,\,t\in[0\,,T_1]\right\}$$

但在T_1時間點交貨量為B_1單位，此時尚有Q_1-B_1單位的存貨量；因此，在$[T_1,T_2]$之累積產量函數為$W(t)-B_1$（即Q_1-B_1單位會保留至T_2時，才一併出清）。所以，在$[T_1,T_2]$之總成本為 $\int_{T_1}^{T_2}\left(c_1\cdot(W'(t))^2+c_2\cdot(W(t)-B_1)\right)\,dt$ 。

得在$[t_W,T_2]$之總成本為

$$\int_{t_W}^{T_1}\left(c_1\cdot(W'(t))^2+c_2\cdot W(t)\right)\,dt\;+\;\int_{T_1}^{T_2}\left(c_1\cdot(W'(t))^2+c_2\cdot(W(t)-B_1)\right)\,dt$$

故在$[t_W,T_2]$之數學模式如下：

$$\textbf{(IV)}\quad\begin{cases}\underset{W}{Min}\;\int_{t_W}^{T_1}\left[c_1\cdot\left(W'(t)\right)^2+c_2\cdot W(t)\right]dt+\int_{T_1}^{T_2}\left[c_1\cdot\left(W'(t)\right)^2+c_2\cdot\left(W(t)-B_1\right)\right]dt\\[2ex] s.t.\quad W(t_W)=0,\,t_W\ge 0,\,W(T_1)\ge B_1,\,W(T_2)=B_1+B_2,\,W'(t)\ge 0,\,\forall\,t\in[\,t_W\,,T_2\,]\end{cases}$$

C.2　有關(5.4.1)式與(5.4.2)式的推導

因為 $L_1(a)$ 及 $L_2(a)$ 均符合**模式(Ⅰ)**之最佳解目標值函數 $L(B,T)$；因此，利用**模式(Ⅰ)**之最佳解目標值函數 $L(B,T)$，得 $f(a)$ 如下：

$$
\begin{aligned}
f(a) &= L_1(a) + L_2(a) + c_2 a \cdot (T_2 - T_1) \\
&= L(B_1 + a, T_1) + L(B_2 - a, T_2 - T_1) + c_2 a \cdot (T_2 - T_1)
\end{aligned}
$$

考慮 $f(a)$ 對變數 a 之一階及二階偏導數如下：

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \left.\frac{\partial L(B, T_1)}{\partial B}\right|_{B=B_1+a} \cdot \frac{d(B_1 + a)}{da} + \left.\frac{\partial L(B, T_2 - T_1)}{\partial B}\right|_{B=B_2-a} \cdot \frac{d(B_2 - a)}{da} + c_2 \cdot (T_2 - T_1) \\
&= \left.\frac{\partial L(B, T_1)}{\partial B}\right|_{B=B_1+a} - \left.\frac{\partial L(B, T_2 - T_1)}{\partial B}\right|_{B=B_2-a} + c_2 \cdot (T_2 - T_1)
\end{aligned}
$$

$$
f''(a) = \left.\frac{\partial^2 L(B, T_1)}{\partial B^2}\right|_{B=B_1+a} + \left.\frac{\partial^2 L(B, T_2 - T_1)}{\partial B^2}\right|_{B=B_2-a}
$$

再利用(5.2.4)式、(5.2.5)式，可更進一步得 $f''(a)$ 如下：

(1) 當 $B_1 + a \ge \frac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ 且 $B_2 - a \ge \frac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$，得 $f''(a) = \frac{2c_1}{T_1} + \frac{2c_1}{T_2 - T_1}$

(2) 當 $B_1 + a \ge \frac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ 且 $B_2 - a < \frac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$，得 $f''(a) = \frac{2c_1}{T_1} + \sqrt{\frac{c_1 c_2}{B_2 - a}}$

(3) 當 $B_1 + a < \frac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ 且 $B_2 - a \ge \frac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$，得 $f''(a) = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{B_1 + a}} + \frac{2c_1}{T_2 - T_1}$

(4) 當 $B_1 + a < \frac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ 且 $B_2 - a < \frac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$，得 $f''(a) = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{B_1 + a}} + \sqrt{\frac{c_1 c_2}{B_2 - a}}$

C.3　有關 a^* 的推導

1.假設 $B_1 \ge \dfrac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ **：**

當 $B_2 > \left(\dfrac{B_1}{T_1} + \dfrac{c_2 T_1}{4c_1}\right) \cdot (T_2 - T_1) + \dfrac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$ 成立時，則 a^* 必滿足 $f'(a^*) = 0$ ；

由(5.4.4)式，得

$$c_2 T_1 + 2c_1 \cdot \left(\frac{B_1 + a^*}{T_1} - \frac{c_2 T_1}{4c_1}\right) - 2c_1 \cdot \left(\frac{B_2 - a^*}{T_2 - T_1} - \frac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)}{4c_1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow c_2 T_1 + \frac{2c_1 B_1}{T_1} + \frac{2c_1}{T_1} \cdot a^* - \frac{c_2 T_1}{2} - \frac{2c_1 B_2}{T_2 - T_1} + \frac{2c_1}{T_2 - T_1} \cdot a^* + \frac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2c_1}{T_1} + \frac{2c_1}{T_2 - T_1}\right) \cdot a^* = -c_2 T_1 - \frac{2c_1 B_1}{T_1} + \frac{c_2 T_1}{2} + \frac{2c_1 B_2}{T_2 - T_1} - \frac{c_2 T_2}{2} + \frac{c_2 T_1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2c_1 T_2}{T_1 \cdot (T_2 - T_1)}\right) \cdot a^* = \frac{2c_1 B_2}{T_2 - T_1} - \frac{2c_1 B_1}{T_1} - \frac{c_2 T_2}{2}$$

$$\Rightarrow a^* = \frac{T_1 \cdot (T_2 - T_1)}{T_2} \cdot \left(\frac{B_2}{T_2 - T_1} - \frac{B_1}{T_1} - \frac{c_2 T_2}{4c_1}\right)$$

$$= \frac{T_1 B_2}{T_2} - \frac{(T_2 - T_1) \cdot B_1}{T_2} - \frac{T_1 \cdot (T_2 - T_1) \cdot c_2}{4c_1}$$

因為 $f'(0^+) < 0$ ，所以 $a^* > 0$ 必成立；又 $a^* \le \dfrac{T_1 B_2}{T_2} < B_2$ ；

故得 $a^* \in \left(0, \dfrac{T_1 B_2}{T_2}\right)$ 。

2.假設 $B_1 < \frac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ ：

當 $B_2 > (T_2 - T_1) \cdot \sqrt{\frac{c_2 B_1}{c_1} + \frac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)^2}{4c_1}}$ 成立時，則 a^* 必滿足 $f'(a^*) = 0$ ；

由(5.4.10)式，得

$$2\sqrt{c_1 c_2 \cdot (B_1 + a^*)} - 2c_1 \cdot \left(\frac{B_2 - a^*}{T_2 - T_1} - \frac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)}{4c_1} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{c_1 c_2 \cdot (B_1 + a^*)} = c_1 \cdot \left(\frac{B_2 - a^*}{T_2 - T_1} - \frac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)}{4c_1} \right)$$

$$\Rightarrow c_1 c_2 \cdot (B_1 + a^*) = c_1^2 \cdot \left(\frac{B_2 - a^*}{T_2 - T_1} - \frac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)}{4c_1} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{c_2 \cdot (B_1 + a^*)}{c_1} = \left(\frac{B_2 - a^*}{T_2 - T_1} - \frac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)}{4c_1} \right)^2$$

$$\Rightarrow a^* = \left(B_2 + \frac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1} \right) - (T_2 - T_1)\sqrt{\frac{c_2 (B_1 + B_2)}{c_1}}$$

上述之 a^* 的求解過程如下： （為了方便，令 $x = a^*$ ）

$$\frac{c_2 \cdot (B_1 + x)}{c_1} = \left(\frac{B_2 - x}{T_2 - T_1} - \frac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)}{4c_1} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{c_2 B_1}{c_1} + \frac{c_2}{c_1} \cdot x = \left(\frac{B_2}{T_2 - T_1} - \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot x - \frac{c_2 (T_2 - T_1)}{4c_1} \right)^2$$

$$= \left(\frac{B_2}{T_2 - T_1} - \frac{c_2 (T_2 - T_1)}{4c_1} - \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot x \right)^2$$

$$=\left(\frac{B_2}{T_2-T_1}-\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)}{4c_1}\right)^2$$

$$-2\cdot\left(\frac{B_2}{T_2-T_1}-\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)}{4c_1}\right)\cdot\left(\frac{1}{T_2-T_1}\right)\cdot x+\frac{1}{\left(T_2-T_1\right)^2}\cdot x^2$$

$$=\left(\frac{B_2}{T_2-T_1}-\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)}{4c_1}\right)^2-\left(\frac{2B_2}{\left(T_2-T_1\right)^2}-\frac{c_2}{2c_1}\right)\cdot x+\frac{1}{\left(T_2-T_1\right)^2}\cdot x^2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\left(T_2-T_1\right)^2}\cdot x^2-\left(\frac{2B_2}{\left(T_2-T_1\right)^2}-\frac{c_2}{2c_1}+\frac{c_2}{c_1}\right)\cdot x+\left(\frac{B_2}{T_2-T_1}-\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)}{4c_1}\right)^2-\frac{c_2B_1}{c_1}=0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\left(T_2-T_1\right)^2}\cdot x^2-\left(\frac{2B_2}{\left(T_2-T_1\right)^2}+\frac{c_2}{2c_1}\right)\cdot x+\left(\frac{B_2}{T_2-T_1}-\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)}{4c_1}\right)^2-\frac{c_2B_1}{c_1}=0$$

$$\Rightarrow x^2-\left(2B_2+\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{2c_1}\right)\cdot x+\left(T_2-T_1\right)^2\cdot\left(\frac{B_2}{T_2-T_1}-\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)}{4c_1}\right)^2-\frac{c_2B_1\left(T_2-T_1\right)^2}{c_1}=0$$

此為一個一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$，其中

$a=1$、$b=-\left(2B_2+\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{2c_1}\right)$、$c=\left(T_2-T_1\right)^2\cdot\left(\frac{B_2}{T_2-T_1}-\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)}{4c_1}\right)^2-\frac{c_2B_1\left(T_2-T_1\right)^2}{c_1}$

因為判別式

$$b^2-4ac=\left(2B_2+\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{2c_1}\right)^2-4\left(T_2-T_1\right)^2\cdot\left(\frac{B_2}{T_2-T_1}-\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)}{4c_1}\right)^2+\frac{4c_2B_1\left(T_2-T_1\right)^2}{c_1}$$

$$=4B_2^2+\frac{2c_2B_2\left(T_2-T_1\right)^2}{c_1}+\frac{c_2^2\left(T_2-T_1\right)^4}{4c_1^2}+\frac{4c_2B_1\left(T_2-T_1\right)^2}{c_1}$$

$$-4\left(T_2-T_1\right)^2\cdot\left(\frac{B_2^2}{\left(T_2-T_1\right)^2}-\frac{c_2B_2}{2c_1}+\frac{c_2^2\left(T_2-T_1\right)^2}{16c_1^2}\right)$$

$$=4B_2^2+\frac{2c_2B_2\left(T_2-T_1\right)^2}{c_1}+\frac{c_2^2\left(T_2-T_1\right)^4}{4c_1^2}+\frac{4c_2B_1\left(T_2-T_1\right)^2}{c_1}$$

$$-4B_2^2+\frac{2c_2B_2(T_2-T_1)^2}{c_1}-\frac{c_2^2(T_2-T_1)^4}{4c_1^2}$$

$$=\frac{2c_2B_2(T_2-T_1)^2}{c_1}+\frac{4c_2B_1(T_2-T_1)^2}{c_1}+\frac{2c_2B_2(T_2-T_1)^2}{c_1}$$

$$=\frac{4c_2B_2(T_2-T_1)^2}{c_1}+\frac{4c_2B_1(T_2-T_1)^2}{c_1}$$

$$=\frac{4c_2(B_1+B_2)\cdot(T_2-T_1)^2}{c_1}>0$$

所以，方程式有兩相異實根，即

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{\left(2B_2+\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{2c_1}\right)\pm\sqrt{\frac{4c_2(B_1+B_2)(T_2-T_1)^2}{c_1}}}{2}$$

$$=\left(B_2+\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}\right)\pm(T_2-T_1)\sqrt{\frac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}}$$

又因為$0<x\leq B_2$，且$\left(B_2+\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}\right)>(T_2-T_1)\sqrt{\frac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}}$（見下方證明 **A**）

所以，取 $x=\left(B_2+\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}\right)-(T_2-T_1)\sqrt{\frac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}}$

即 $a^*=\left(B_2+\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}\right)-(T_2-T_1)\sqrt{\frac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}}$

證明 A： $\left(B_2+\dfrac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}\right)>\left(T_2-T_1\right)\sqrt{\dfrac{c_2\left(B_1+B_2\right)}{c_1}}$ 必成立。

因為不等式兩邊均為正，將兩邊平方相減如下：

$$\left(B_2+\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}\right)^2-\left(T_2-T_1\right)^2\cdot\left(\frac{c_2\left(B_1+B_2\right)}{c_1}\right)$$

$$=B_2^2+\frac{c_2B_2\left(T_2-T_1\right)^2}{2c_1}+\frac{c_2^2\left(T_2-T_1\right)^4}{16c_1^2}-\frac{c_2B_1\left(T_2-T_1\right)^2}{c_1}-\frac{c_2B_2\left(T_2-T_1\right)^2}{c_1}$$

$$=B_2^2-\frac{c_2B_2\left(T_2-T_1\right)^2}{2c_1}+\frac{c_2^2\left(T_2-T_1\right)^4}{16c_1^2}-\frac{c_2B_1\left(T_2-T_1\right)^2}{c_1}$$

$$=\frac{1}{16c_1^2}\cdot\left[16c_1^2B_2^2-8c_1c_2B_2\left(T_2-T_1\right)^2+c_2^2\left(T_2-T_1\right)^4-16c_1c_2B_1\left(T_2-T_1\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{16c_1^2}\cdot\left\{\left[4c_1B_2-c_2\left(T_2-T_1\right)^2\right]^2-16c_1c_2B_1\left(T_2-T_1\right)^2\right\}$$

因為

$$B_2>\left(T_2-T_1\right)\cdot\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}+\frac{c_2\cdot\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}$$

$$\Rightarrow 4c_1B_2>4c_1\left(T_2-T_1\right)\cdot\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}+c_2\left(T_2-T_1\right)^2$$

$$\Rightarrow 4c_1B_2-c_2\left(T_2-T_1\right)^2>4c_1\left(T_2-T_1\right)\cdot\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}$$

兩邊平方，得

$$\left[4c_1B_2-c_2\left(T_2-T_1\right)^2\right]^2>16c_1^2\left(T_2-T_1\right)^2\left(\frac{c_2B_1}{c_1}\right)=16c_1c_2B_1\left(T_2-T_1\right)^2$$

所以 $\left[4c_1B_2-c_2\left(T_2-T_1\right)^2\right]^2-16c_1c_2B_1(T_2-T_1)^2>0$

得$\left(B_2+\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}\right)^2-\left(T_2-T_1\right)^2\cdot\left(\frac{c_2\left(B_1+B_2\right)}{c_1}\right)>0$

故 $\left(B_2+\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}\right)>\left(T_2-T_1\right)\sqrt{\frac{c_2\left(B_1+B_2\right)}{c_1}}$ 必成立。

C.4 模式(V)之最佳解

結合**情況 A** 與**情況**Ｂ，得**模式(V)**之最佳解 a^* 如下：

Case 1：

(1)若 $B_1 \geq \dfrac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ 時，則由(5.4.8)式知：

當 $B_2 \leq \left(\dfrac{B_1}{T_1} + \dfrac{c_2 T_1}{4c_1}\right) \cdot (T_2 - T_1) + \dfrac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$ 時，則 $a^* = 0$ 必成立。

(2)若 $B_1 < \dfrac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ 時，則由(5.4.14)式知：

當 $B_2 \leq (T_2 - T_1) \cdot \sqrt{\dfrac{c_2 B_1}{c_1}} + \dfrac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$ 時，則 $a^* = 0$ 必成立。

將(1)與(2)兩式結合成一式，得

當 $B_2 \leq \dfrac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1} + (T_2 - T_1)\left[\left(\dfrac{B_1}{T_1} - \dfrac{c_2 T_1}{4c_1}\right)^{+} + \dfrac{c_2 T_1}{2c_1} \odot \sqrt{\dfrac{c_2 B_1}{c_1}}\right]$ 時，則 $a^* = 0$ 。

Case 2：

(1)若 $B_1 \geq \dfrac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ 時，則由(5.4.9)式知：

當 $B_2 > \left(\dfrac{B_1}{T_1} + \dfrac{c_2 T_1}{4c_1}\right) \cdot (T_2 - T_1) + \dfrac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$ 時，則 $a^* > 0$ ，且滿足

$$a^* = \frac{T_1 B_2}{T_2} - \frac{(T_2 - T_1) \cdot B_1}{T_2} - \frac{c_2 T_1 \cdot (T_2 - T_1)}{4c_1} \text{ 。}$$

(2)若 $B_1 < \dfrac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ 時，則由(5.4.15)式知：

當 $B_2 > (T_2 - T_1)\cdot\sqrt{\frac{c_2 B_1}{c_1} + \frac{c_2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1}}$ 時，則 $a^* > 0$ ，且滿足

$$a^* = \left(B_2 + \frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}\right) - (T_2-T_1)\sqrt{\frac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}}$$ 。

將(1)與(2)兩式結合成一式，得

當 $B_2 > \frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1} + (T_2-T_1)\left[\left(\frac{B_1}{T_1} - \frac{c_2 T_1}{4c_1}\right)^+ + \frac{c_2 T_1}{2c_1} \odot \sqrt{\frac{c_2 B_1}{c_1}}\right]$ 時，則 $a^* > 0$ ，且

滿足

若 $B_1 \geq \frac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$ ，則 $a^* = \frac{T_1 B_2}{T_2} - \frac{(T_2-T_1)\cdot B_1}{T_2} - \frac{c_2 T_1\cdot(T_2-T_1)}{4c_1}$

若 $B_1 < \frac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$ ，則 $a^* = \left(B_2 + \frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}\right) - (T_2-T_1)\sqrt{\frac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}}$

若使用決策準則函數 DF_5 ，則**模式(V)**之最佳解 a^* 表示如下：

1.當 $DF_5 \leq 0$ 時，則 $a^* = 0$ 。

2.當 $DF_5 > 0$ 時，得 $a^* > 0$ 且 a^* 如下：

$$a^* = \begin{cases} \frac{T_1 B_2}{T_2} - \frac{(T_2-T_1)B_1}{T_2} - \frac{c_2 T_1(T_2-T_1)}{4c_1} & , \quad B_1 \geq \frac{c_2 T_1^2}{4c_1} \\ B_2 + \frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1} - (T_2-T_1)\sqrt{\frac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}} & , \quad B_1 < \frac{c_2 T_1^2}{4c_1} \end{cases}$$

C.5 模式(IV)之最佳解

1.當 $B_2 \le \frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}+(T_2-T_1)\left[\left(\frac{B_1}{T_1}-\frac{c_2T_1}{4c_1}\right)^+ + \frac{c_2T_1}{2c_1}\odot\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}\right]$ 時，得 $a^*=0$ 。

此時**模式(IV)**之最佳解 W^* 可對應一組最佳解(y^* , z^*) 如下：

$$y^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t-\left(T_1-2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}}\right)^+\right]^2+\frac{c_2}{4c_1T_1}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}}\right)^2-T_1^2\right)^+\cdot t\ ,$$

$$\forall\, t\in[t_{y^*}\ ,T_1\,]\text{；其中 } t_{y^*}=\left(T_1-2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}}\right)^+$$

$$z^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t-\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}\right)^+\right]^2$$

$$+\frac{c_2}{4c_1(T_2-T_1)}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}\right)^2-(T_2-T_1)^2\right)^+\cdot t\ ,$$

$$\forall\, t\in[t_{z^*}\ ,T_2-T_1\,]\text{；其中 } t_{z^*}=\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}\right)^+$$

由(5.3.2)式：

因為 $y(t)=W(t)$ ，$\forall\, t\in[t_W\ ,T_1\,]$；

$z(u)=W(u+T_1)-W(T_1)$ ，$\forall\, u\in[u_0\ ,T_2-T_1]$

其中 $u_0=Max\left\{u \mid z(u)=0\ ,\ 0\le u\le T_2-T_1\right\}$；$u=t-T_1$ ，$\forall\, t\in[T_1\ ,T_2\,]$

所以可將上面之 $y^*(t)$ 、 $z^*(t)$ 改為 $W^*(t)$ ，如下：

由 $y(t)=W(t)$ ，得

$$W^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t-\left(T_1-2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}}\right)^+\right]^2+\frac{c_2}{4c_1T_1}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}}\right)^2-T_1^2\right)^+\cdot t\ ,$$

$$\forall\, t\in[t_{W^*}\ ,T_1\,]\text{；其中 } t_{W^*}=\left(T_1-2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}}\right)^+$$

由 $z(u)=W(u+T_1)-W(T_1)$ ，得

$$W^*(u+T_1)-W^*(T_1)=z^*(u)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[u-\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}\right)^+\right]^2$$

$$+\frac{c_2}{4c_1(T_2-T_1)}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}\right)^2-(T_2-T_1)^2\right)^+\cdot u$$

得

$$W^*(t)-W^*(T_1)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[(t-T_1)-\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}\right)^+\right]^2$$

$$+\frac{c_2}{4c_1(T_2-T_1)}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}\right)^2-(T_2-T_1)^2\right)^+\cdot(t-T_1)$$

因為 $a^*=0$ ，所以 $W^*(T_1)=B_1$ ；代入上式得

$$W^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[(t-T_1)-\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}\right)^+\right]^2$$

$$+\frac{c_2}{4c_1(T_2-T_1)}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}\right)^2-(T_2-T_1)^2\right)^+\cdot(t-T_1)+B_1$$

$\forall\, t\in[t_{W^*},T_2]$，其中 $t_{W^*}=T_1+\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}\right)^+$

若令 $W_1^*(t)$ 為由 $y^*(t)$ 而得；$W_2^*(t)$ 為由 $z^*(t)$ 而得，則得

$$W^*(t)=\begin{cases}W_1^*(t), & t\in[t_{W_1^*},T_1]\ ,\ t_{W_1^*}=\left(T_1-2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}}\right)^+\\ W_2^*(t), & t\in[t_{W_2^*},T_2]\ ,\ t_{W_2^*}=T_1+\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}\right)^+\end{cases}$$

其中

$$W_1^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t-\left(T_1-2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}}\right)^+\right]^2+\frac{c_2}{4c_1T_1}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}}\right)^2-T_1^2\right)^+\cdot t$$

$$W_2^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[(t-T_1)-\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}\right)^+\right]^2$$

$$+\frac{c_2}{4c_1(T_2-T_1)}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}\right)^2-(T_2-T_1)^2\right)^+\cdot(t-T_1)+B_1$$

2.當 $B_2>\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}+(T_2-T_1)\left[\left(\frac{B_1}{T_1}-\frac{c_2T_1}{4c_1}\right)^++\frac{c_2T_1}{2c_1}\odot\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}\right]$ 時，則 $a^*>0$ ，且

若 $B_1\geq\frac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$ ，則 $a^*=\frac{T_1B_2}{T_2}-\frac{(T_2-T_1)\cdot B_1}{T_2}-\frac{c_2T_1\cdot(T_2-T_1)}{4c_1}$

若 $B_1<\frac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$ ，則 $a^*=\left(B_2+\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}\right)-(T_2-T_1)\sqrt{\frac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}}$

此時**模式(IV)**之最佳解 W^* 可對應一組最佳解 (y^*,z^*) 如下：

$$y^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t-\left(T_1-2\sqrt{\frac{c_1(B_1+a^*)}{c_2}}\right)^+\right]^2+\frac{c_2}{4c_1T_1}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1(B_1+a^*)}{c_2}}\right)^2-T_1^2\right)^+\cdot t\text{，}$$

$$\forall\, t\in[t_{y^*},T_1]\text{，其中 } t_{y^*}=\left(T_1-2\sqrt{\frac{c_1(B_1+a^*)}{c_2}}\right)^+$$

$$z^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t-\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1(B_2-a^*)}{c_2}}\right)^+\right]^2$$

$$+\frac{c_2}{4c_1(T_2-T_1)}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1(B_2-a^*)}{c_2}}\right)^2-(T_2-T_1)^2\right)^+\cdot t\text{，}$$

$$\forall\, t\in[t_{z^*},T_2-T_1]\text{，其中 } t_{z^*}=\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1(B_2-a^*)}{c_2}}\right)^+$$

由(5.3.2)式，因為 $y(t)$ 、$z(t)$ 跟 $W(t)$ 的對應關係如前；所以，可將上面之 $y^*(t)$ 、$z^*(t)$ 改為 $W^*(t)$ ，如下：

由 $y(t)=W(t)$，得

$$W^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t-\left(T_1-2\sqrt{\frac{c_1(B_1+a^*)}{c_2}}\right)^+\right]^2+\frac{c_2}{4c_1T_1}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1(B_1+a^*)}{c_2}}\right)^2-T_1^2\right)^+\cdot t$$

$$\forall\, t\in[t_{W^*},T_1]\text{，其中 } t_{W^*}=\left(T_1-2\sqrt{\frac{c_1(B_1+a^*)}{c_2}}\right)^+$$

由 $z(u)=W(u+T_1)-W(T_1)$，得

$$W^*(t)-W^*(T_1)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[(t-T_1)-\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1(B_2-a^*)}{c_2}}\right)^+\right]^2$$

$$+\frac{c_2}{4c_1(T_2-T_1)}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1(B_2-a^*)}{c_2}}\right)^2-(T_2-T_1)^2\right)^+\cdot(t-T_1)$$

因為 $W^*(T_1)=B_1+a^*$；代入上式得

$$W^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[(t-T_1)-\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1(B_2-a^*)}{c_2}}\right)^+\right]^2$$

$$+\frac{c_2}{4c_1(T_2-T_1)}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1(B_2-a^*)}{c_2}}\right)^2-(T_2-T_1)^2\right)^+\cdot(t-T_1)+B_1+a^*$$

$$\forall\, t\in[t_{W^*},T_2]\text{，其中 } t_{W^*}=T_1+\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1(B_2-a^*)}{c_2}}\right)^+$$

若令 $W_3^*(t)$ 為由 $y^*(t)$ 而得；$W_4^*(t)$ 為由 $z^*(t)$ 而得，則得

$$W^*(t)=\begin{cases} W_3^*(t), & t\in[t_{W_3^*},T_1]\text{，}t_{W_3^*}=\left(T_1-2\sqrt{\frac{c_1(B_1+a^*)}{c_2}}\right)^+ \\ W_4^*(t), & t\in[t_{W_4^*},T_2]\text{，}t_{W_4^*}=T_1+\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1(B_2-a^*)}{c_2}}\right)^+ \end{cases}$$

其中

$$W_3^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t-\left(T_1-2\sqrt{\frac{c_1(B_1+a^*)}{c_2}}\right)^+\right]^2+\frac{c_2}{4c_1T_1}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1(B_1+a^*)}{c_2}}\right)^2-T_1^2\right)^+\cdot t$$

$$W_4^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[(t-T_1)-\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1(B_2-a^*)}{c_2}}\right)^+\right]^2$$

$$+\frac{c_2}{4c_1(T_2-T_1)}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1(B_2-a^*)}{c_2}}\right)^2-(T_2-T_1)^2\right)^+\cdot(t-T_1)+B_1+a^*$$

式中$0<a^*<B_2$且滿足下列

若$B_1\geq\frac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$，則$a^*=\frac{T_1B_2}{T_2}-\frac{(T_2-T_1)\cdot B_1}{T_2}-\frac{c_2T_1\cdot(T_2-T_1)}{4c_1}$

若$B_1<\frac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$，則$a^*=\left(B_2+\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}\right)-(T_2-T_1)\sqrt{\frac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}}$

C.6　有關 $t_{W_3^*}=0$ 或 $t_{W_3^*}>0$ 的證明

當 $B_2 > \dfrac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1} + (T_2-T_1)\left[\left(\dfrac{B_1}{T_1}-\dfrac{c_2T_1}{4c_1}\right)^+ + \dfrac{c_2T_1}{2c_1}\odot\sqrt{\dfrac{c_2B_1}{c_1}}\right]$ 時，最佳生產計畫為 $W_3^*(t)$ 及 $W_4^*(t)$ 的組合。

1.若 $B_1 \geq \dfrac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$ 時，得 $B_2 > \left(\dfrac{B_1}{T_1}+\dfrac{c_2T_1}{4c_1}\right)\cdot(T_2-T_1)+\dfrac{c_2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1}$ ，且

$$a^* = \frac{T_1B_2}{T_2} - \frac{(T_2-T_1)\cdot B_1}{T_2} - \frac{c_2T_1\cdot(T_2-T_1)}{4c_1} > 0$$

此時，$B_1 + a^* \geq \dfrac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$ 必成立，得 $t_{W_3^*}=0$ ，此為「立即生產」。

2.若 $B_1 < \dfrac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$ 時，得 $B_2 > (T_2-T_1)\cdot\sqrt{\dfrac{c_2B_1}{c_1}}+\dfrac{c_2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1}$ ，且

$$a^* = B_2 + \frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1} - (T_2-T_1)\sqrt{\frac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}} > 0$$

此時，B_1+a^* 有可能為「$B_1+a^* < \dfrac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$」或「$B_1+a^* \geq \dfrac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$」。

若 $B_1+a^* \geq \dfrac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$ ，則 $t_{W_3^*}=0$ ，此為「立即生產」。

若 $B_1+a^* < \dfrac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$ ，則 $t_{W_3^*} = T_1 - 2\sqrt{\dfrac{c_1\cdot(B_1+a^*)}{c_2}}$ ，此為「延後生產」。

C.7 有關 $t_{W_4^*} = T_1$ 的證明

1.當 $B_1 \ge \frac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ 、 $B_2 > \left(\frac{B_1}{T_1} + \frac{c_2 T_1}{4c_1}\right) \cdot (T_2 - T_1) + \frac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$ 、

$a^* = \frac{T_1 B_2}{T_2} - \frac{(T_2 - T_1) \cdot B_1}{T_2} - \frac{c_2 T_1 \cdot (T_2 - T_1)}{4c_1} > 0$ 時，則 $B_2 - a^* > \frac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$ 必成立。

證明：

$$B_2 - a^* - \frac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1} = B_2 - \frac{T_1 B_2}{T_2} + \frac{(T_2 - T_1) \cdot B_1}{T_2} + \frac{c_2 T_1 \cdot (T_2 - T_1)}{4c_1} - \frac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$$

$$= \frac{T_2 B_2}{T_2} - \frac{T_1 B_2}{T_2} + \frac{(T_2 - T_1) \cdot B_1}{T_2} + \frac{c_2 T_1 \cdot (T_2 - T_1)}{4c_1} - \frac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$$

$$= \frac{(T_2 - T_1) \cdot (B_1 + B_2)}{T_2} + \frac{c_2 T_1 \cdot (T_2 - T_1)}{4c_1} - \frac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$$

$$= \frac{T_2 - T_1}{4c_1 T_2} \cdot \left(4c_1 (B_1 + B_2) + c_2 T_1 T_2 - c_2 T_2 (T_2 - T_1)\right)$$

$$= \frac{T_2 - T_1}{4c_1 T_2} \cdot \left(4c_1 (B_1 + B_2) + 2c_2 T_1 T_2 - c_2 T_2^2\right) \tag{C.7.1}$$

因為 $B_1 + B_2 > \frac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1} + \left(\frac{B_1}{T_1} + \frac{c_2 T_1}{4c_1}\right) \cdot (T_2 - T_1) + \frac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$

得

$$4c_1 (B_1 + B_2) > c_2 T_1^2 + \frac{4c_1 B_1 (T_2 - T_1)}{T_1} + c_2 T_1 (T_2 - T_1) + c_2 (T_2 - T_1)^2$$

$$= c_2 T_1^2 + \frac{4c_1 B_1 (T_2 - T_1)}{T_1} + c_2 T_1 (T_2 - T_1) + c_2 T_2^2 - 2c_2 T_1 T_2 + c_2 T_1^2$$

$$= 2c_2T_1^2 + \frac{4c_1B_1\left(T_2 - T_1\right)}{T_1} + c_2T_1\left(T_2 - T_1\right) + c_2T_2^2 - 2c_2T_1T_2$$

將上式結果代入(C.7.1)式之括弧內，得

$$4c_1\left(B_1 + B_2\right) + 2c_2T_1T_2 - c_2T_2^2$$

$$> 2c_2T_1^2 + \frac{4c_1B_1\left(T_2 - T_1\right)}{T_1} + c_2T_1\left(T_2 - T_1\right) + c_2T_2^2 - 2c_2T_1T_2 + 2c_2T_1T_2 - c_2T_2^2$$

$$= 2c_2T_1^2 + \frac{4c_1B_1\left(T_2 - T_1\right)}{T_1} + c_2T_1\left(T_2 - T_1\right)$$

故得 $B_2 - a^* - \frac{c_2\left(T_2 - T_1\right)^2}{4c_1} > \frac{T_2 - T_1}{4c_1T_2} \cdot \left(2c_2T_1^2 + \frac{4c_1B_1\left(T_2 - T_1\right)}{T_1} + c_2T_1\left(T_2 - T_1\right)\right) > 0$

即 $DF_7 - a^* \geq 0$ 必成立，且 $t_{W_4^*} = T_1$，此為「立即生產」。

2.當 $B_1 < \frac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ 、 $B_2 > \left(T_2 - T_1\right) \cdot \sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}} + \frac{c_2 \cdot \left(T_2 - T_1\right)^2}{4c_1}$ 、

$a^* = B_2 + \frac{c_2\left(T_2 - T_1\right)^2}{4c_1} - \left(T_2 - T_1\right)\sqrt{\frac{c_2\left(B_1 + B_2\right)}{c_1}} > 0$ ，

則 $B_2 - a^* \geq \frac{c_2\left(T_2 - T_1\right)^2}{4c_1}$ 或 $\left(T_2 - T_1\right)^2 \leq \frac{4c_1\left(B_2 - a^*\right)}{c_2}$ 必然成立。

證明：

利用兩者相減，得

$$B_2 - a^* - \frac{c_2\left(T_2 - T_1\right)^2}{4c_1} = B_2 - B_2 - \frac{c_2\left(T_2 - T_1\right)^2}{4c_1} + \left(T_2 - T_1\right)\sqrt{\frac{c_2(B_1 + B_2)}{c_1}} - \frac{c_2\left(T_2 - T_1\right)^2}{4c_1}$$

$$= -\frac{c_2\left(T_2 - T_1\right)^2}{2c_1} + \left(T_2 - T_1\right)\sqrt{\frac{c_2(B_1 + B_2)}{c_1}}$$

$$=\left(T_2-T_1\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{c_2\left(B_1+B_2\right)}{c_1}}-\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)}{2c_1}\right) \qquad \text{(C.7.2)}$$

將(C.7.2)式括弧內兩項，各自平方後相減，得

$$\frac{c_2\left(B_1+B_2\right)}{c_1}-\frac{c_2^2\cdot\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1^2}=\frac{c_2}{c_1}\cdot\left(B_1+B_2-\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}\right)$$

$$>\frac{c_2}{c_1}\cdot\left(B_1+\left(T_2-T_1\right)\cdot\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}\right)>0$$

所以 $\sqrt{\frac{c_2\left(B_1+B_2\right)}{c_1}}-\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)}{2c_1}>0$

故 $B_2-a^*-\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}\geq 0$ 必成立，亦即

$DF_7-a^*\geq 0$ 必成立，且 $t_{W_4^*}=T_1$ ，此為「立即生產」。

C.8 有關a^*的參數分析

當$B_2 > \frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1} + (T_2-T_1)\left[\left(\frac{B_1}{T_1}-\frac{c_2T_1}{4c_1}\right)^+ + \frac{c_2T_1}{2c_1}\odot\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}\right]$時，得$a^*>0$。

1.若$B_1 \ge \frac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$時，得$B_2 > \left(\frac{B_1}{T_1}+\frac{c_2T_1}{4c_1}\right)\cdot(T_2-T_1)+\frac{c_2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1}$，且

$$a^* = \frac{T_1B_2}{T_2} - \frac{(T_2-T_1)\cdot B_1}{T_2} - \frac{c_2T_1\cdot(T_2-T_1)}{4c_1} > 0 \text{ 。}$$

此時a^*對各參數的分析如下：

$$\frac{\partial a^*}{\partial c_1} = 0-0+\frac{c_2T_1\cdot(T_2-T_1)}{4c_1^2} = \frac{c_2T_1\cdot(T_2-T_1)}{4c_1^2} > 0$$

$$\frac{\partial a^*}{\partial c_2} = 0-0-\frac{T_1\cdot(T_2-T_1)}{4c_1} = -\frac{T_1\cdot(T_2-T_1)}{4c_1} < 0$$

$$\frac{\partial a^*}{\partial T_1} = \frac{B_2}{T_2}+\frac{B_1}{T_2}-\frac{c_2\cdot(T_2-T_1)}{4c_1}+\frac{c_2T_1}{4c_1} = \frac{B_2}{T_2}+\frac{2c_2T_1}{4c_1}+\left(\frac{B_1}{T_2}-\frac{c_2T_2}{4c_1}\right) > 0$$

$$\frac{\partial a^*}{\partial T_2} = \frac{-T_1B_2}{T_2^2}-\frac{B_1}{T_2}+\frac{(T_2-T_1)\cdot B_1}{T_2^2}-\frac{c_2T_1}{4c_1} = \frac{-T_1B_2}{T_2^2}-\frac{T_1B_1}{T_2^2}-\frac{c_2T_1}{4c_1} < 0$$

$$\frac{\partial a^*}{\partial B_1} = 0-\frac{T_2-T_1}{T_2} = -\frac{T_2-T_1}{T_2} < 0$$

$$\frac{\partial a^*}{\partial B_2} = \frac{T_1}{T_2} > 0$$

2.若$B_1 < \frac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$時，得$B_2 > (T_2-T_1)\cdot\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}+\frac{c_2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1}$，且

$$a^* = B_2 + \frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1} - (T_2-T_1)\sqrt{\frac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}} > 0 \text{ 。}$$

此時a^*對各參數的分析如下：

$$\frac{\partial a^*}{\partial c_1}=-\frac{c_2\cdot\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1^2}-\left(T_2-T_1\right)\sqrt{c_2\cdot\left(B_1+B_2\right)}\cdot\left(\tfrac{-1}{2}\right)\cdot c_1^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{T_2-T_1}{2c_1}\cdot\left[-\frac{c_2\cdot\left(T_2-T_1\right)}{2c_1}+\sqrt{\frac{c_2\left(B_1+B_2\right)}{c_1}}\right]>0$$ （見下方證明 **A**）

$$\frac{\partial a^*}{\partial c_2}=0+\frac{\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}-\left(T_2-T_1\right)\cdot\sqrt{\frac{B_1+B_2}{c_1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{c_2}}$$

$$=\frac{T_2-T_1}{2}\cdot\left[\frac{T_2-T_1}{2c_1}-\sqrt{\frac{B_1+B_2}{c_1c_2}}\right]<0$$ （見下方證明 **B**）

$$\frac{\partial a^*}{\partial T_1}=0+\frac{2c_2\cdot\left(T_2-T_1\right)}{4c_1}\cdot(-1)-(-1)\cdot\sqrt{\frac{c_2\cdot\left(B_1+B_2\right)}{c_1}}$$

$$=-\frac{c_2\cdot\left(T_2-T_1\right)}{2c_1}+\sqrt{\frac{c_2\cdot\left(B_1+B_2\right)}{c_1}}>0$$ （見下方證明 **B**）

$$\frac{\partial a^*}{\partial T_2}=0+\frac{2c_2\cdot\left(T_2-T_1\right)}{4c_1}-\sqrt{\frac{c_2\cdot\left(B_1+B_2\right)}{c_1}}$$

$$=\frac{c_2\cdot\left(T_2-T_1\right)}{2c_1}-\sqrt{\frac{c_2\cdot\left(B_1+B_2\right)}{c_1}}<0$$ （見下方證明 **B**）

$$\frac{\partial a^*}{\partial B_1}=0+0-\left(T_2-T_1\right)\cdot\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(B_1+B_2\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{T_2-T_1}{2}\cdot\sqrt{\frac{c_2}{c_1\cdot\left(B_1+B_2\right)}}<0$$

$$\frac{\partial a^*}{\partial B_2}=1+0-\left(T_2-T_1\right)\cdot\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(B_1+B_2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{T_2-T_1}{2}\cdot\sqrt{\frac{c_2}{c_1\cdot\left(B_1+B_2\right)}}>0$$ （見下方證明 **C**）

證明 A：

利用平方、相減，比較$\sqrt{\dfrac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}}$與$\dfrac{c_2(T_2-T_1)}{2c_1}$之大小，得

$$\frac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}-\frac{c_2^2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1^2}=\frac{c_2}{c_1}\cdot\left[B_1+B_2-\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}\right]$$

$$>\frac{c_2}{c_1}\cdot\left[B_1+(T_2-T_1)\cdot\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}\right]>0$$

因為$B_2>(T_2-T_1)\cdot\sqrt{\dfrac{c_2B_1}{c_1}}+\dfrac{c_2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1}\Rightarrow B_2-\dfrac{c_2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1}>(T_2-T_1)\cdot\sqrt{\dfrac{c_2B_1}{c_1}}$

故$\sqrt{\dfrac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}}>\dfrac{c_2(T_2-T_1)}{2c_1}$

證明 B：

利用平方、相減，比較$\dfrac{T_2-T_1}{2c_1}$與$\sqrt{\dfrac{B_1+B_2}{c_1c_2}}$之大小，得

$$\frac{(T_2-T_1)^2}{4c_1^2}-\frac{B_1+B_2}{c_1c_2}=\frac{1}{c_1c_2}\cdot\left[\frac{c_2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1}-B_1-B_2\right]$$

$$<\frac{1}{c_1c_2}\cdot\left[-B_1-(T_2-T_1)\cdot\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}\right]<0$$

因為$B_2>(T_2-T_1)\cdot\sqrt{\dfrac{c_2B_1}{c_1}}+\dfrac{c_2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1}\Rightarrow -B_2+\dfrac{c_2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1}<-(T_2-T_1)\cdot\sqrt{\dfrac{c_2B_1}{c_1}}$

故 $\dfrac{T_2-T_1}{2c_1}<\sqrt{\dfrac{B_1+B_2}{c_1c_2}}$

證明 C：

$$1-\frac{T_2-T_1}{2}\cdot\sqrt{\frac{c_2}{c_1\cdot(B_1+B_2)}}=\frac{c_2}{c_1}\cdot\left[\frac{c_1}{c_2}-\frac{T_2-T_1}{2}\cdot\sqrt{\frac{c_1}{c_2\cdot(B_1+B_2)}}\right]$$

利用平方、相減，比較上式中$\frac{c_1}{c_2}$與$\frac{T_2-T_1}{2}\cdot\sqrt{\frac{c_1}{c_2\cdot(B_1+B_2)}}$之大小，得

$$\begin{aligned}\frac{c_1^2}{c_2^2}-\frac{(T_2-T_1)^2}{4}\cdot\frac{c_1}{c_2\cdot(B_1+B_2)}&=\frac{c_1^2}{c_2^2}\cdot\left[1-\frac{c_2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1}\cdot\frac{1}{B_1+B_2}\right]\\&=\frac{c_1^2}{c_2^2}\cdot\left[1+\left(-\frac{c_2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1}\right)\cdot\frac{1}{B_1+B_2}\right]\\&>\frac{c_1^2}{c_2^2}\cdot\left[1+\left((T_2-T_1)\cdot\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}-B_2\right)\cdot\frac{1}{B_1+B_2}\right]\\&=\frac{c_1^2}{c_2^2}\cdot\left[1-\frac{B_2}{B_1+B_2}+\frac{T_2-T_1}{B_1+B_2}\cdot\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}\right]>0\end{aligned}$$

因為$B_2>(T_2-T_1)\cdot\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}+\frac{c_2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1}\Rightarrow-\frac{c_2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1}>-B_2+(T_2-T_1)\cdot\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}$

得$\frac{c_1}{c_2}>\frac{T_2-T_1}{2}\cdot\sqrt{\frac{c_1}{c_2\cdot(B_1+B_2)}}$，故$1-\frac{T_2-T_1}{2}\cdot\sqrt{\frac{c_2}{c_1\cdot(B_1+B_2)}}>0$。

C.9　有關 $t_{W_3^*}$ 的參數分析

由附錄 **C-C.6** 知，當 $B_2 > \dfrac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1} + (T_2-T_1)\left[\left(\dfrac{B_1}{T_1} - \dfrac{c_2T_1}{4c_1}\right)^+ + \dfrac{c_2T_1}{2c_1} \odot \sqrt{\dfrac{c_2B_1}{c_1}}\right]$ 時，可得如下的結果：

1.若 $B_1 \ge \dfrac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ 時，$B_1 + a^* \ge \dfrac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ 必成立，得 $t_{W_3^*} = 0$，此為「立即生產」。

2.若 $B_1 < \dfrac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ 時，

若 $B_1 + a^* \ge \dfrac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$，則 $t_{W_3^*} = 0$，此為「立即生產」。

若 $B_1 + a^* < \dfrac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$，則 $t_{W_3^*} = T_1 - 2\sqrt{\dfrac{c_1 \cdot (B_1 + a^*)}{c_2}}$，此為「延後生產」。

在此僅當 $t_{W_3^*} > 0$ 時，分析 $t_{W_3^*}$ 對各參數的變化，以了解「立即生產」的可能性。又由附錄 **C-C.8** 中之 a^* 的參數分析，得 $t_{W_3^*}$ 對各參數的分析如下：

$$\frac{\partial t_{W_3^*}}{\partial c_1} = 0 - 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{c_1 \cdot (B_1 + a^*)}{c_2}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{B_1 + a^*}{c_2} + \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{\partial a^*}{\partial c_1}\right)$$

$$= -\left(\frac{c_1 \cdot (B_1 + a^*)}{c_2}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{B_1 + a^*}{c_2} + \frac{c_1}{c_2} \cdot \left\{\frac{T_2 - T_1}{2c_1} \cdot \left[\begin{array}{l} -\dfrac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)}{2c_1} \\ + \sqrt{\dfrac{c_2 \cdot (B_1 + B_2)}{c_1}} \end{array}\right]\right\}\right) < 0$$

$$\frac{\partial t_{W_3^*}}{\partial c_2} = 0 - 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{c_1 \cdot (B_1 + a^*)}{c_2}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{-c_1 \cdot (B_1 + a^*)}{c_2^2} + \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{\partial a^*}{\partial c_2}\right)$$

$$= -\left(\frac{c_1 \cdot (B_1 + a^*)}{c_2}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{-c_1 \cdot (B_1 + a^*)}{c_2} + \frac{c_1}{c_2} \cdot \left\{\frac{T_2 - T_1}{2} \cdot \left[\frac{T_2 - T_1}{2c_1} - \sqrt{\frac{B_1 + B_2}{c_1c_2}}\right]\right\}\right) > 0$$

$$\frac{\partial t_{W_3^*}}{\partial T_1}=1-2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{c_1\cdot\left(B_1+a^*\right)}{c_2}\right)^{-1/2}\cdot\left(\frac{c_1}{c_2}\cdot\frac{\partial a^*}{\partial T_1}\right)$$

$$=1-\left(\frac{c_1\cdot\left(B_1+a^*\right)}{c_2}\right)^{-1/2}\cdot\left(\frac{c_1}{c_2}\cdot\left\{-\frac{c_2\cdot\left(T_2-T_1\right)}{2c_1}+\sqrt{\frac{c_2\cdot\left(B_1+B_2\right)}{c_1}}\right\}\right)$$

$$=1-\left(\frac{c_1\cdot\left(B_1+a^*\right)}{c_2}\right)^{-1/2}\cdot\left(\sqrt{\frac{c_1\cdot\left(B_1+B_2\right)}{c_2}}-\frac{1}{2}\cdot\left(T_2-T_1\right)\right)$$

$$=1-\left(\frac{B_1+B_2}{B_1+a^*}\right)^{1/2}+\frac{T_2-T_1}{2}\cdot\left(\frac{c_2}{c_1\cdot\left(B_1+a^*\right)}\right)^{1/2}$$

$$=\left(\frac{1}{B_1+a^*}\right)^{1/2}\cdot\left[\left(B_1+a^*\right)^{1/2}+\frac{1}{2}\left(T_2-T_1\right)\cdot\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{1/2}-\left(B_1+B_2\right)^{1/2}\right]=0$$

（見下方證明 **A**）

$$\frac{\partial t_{W_3^*}}{\partial T_2}=0-2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{c_1\cdot\left(B_1+a^*\right)}{c_2}\right)^{-1/2}\cdot\left(\frac{c_1}{c_2}\cdot\frac{\partial a^*}{\partial T_2}\right)$$

$$=-\left(\frac{c_1\cdot\left(B_1+a^*\right)}{c_2}\right)^{-1/2}\cdot\left(\frac{c_1}{c_2}\cdot\left\{\frac{c_2\cdot\left(T_2-T_1\right)}{2c_1}-\sqrt{\frac{c_2\cdot\left(B_1+B_2\right)}{c_1}}\right\}\right)>0$$

$$\frac{\partial t_{W_3^*}}{\partial B_1}=0-2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{c_1\cdot\left(B_1+a^*\right)}{c_2}\right)^{-1/2}\cdot\left(\frac{c_1}{c_2}+\frac{c_1}{c_2}\cdot\frac{\partial a^*}{\partial B_1}\right)$$

$$=-\left(\frac{c_1\cdot\left(B_1+a^*\right)}{c_2}\right)^{-1/2}\cdot\left(\frac{c_1}{c_2}\cdot\left\{1-\frac{T_2-T_1}{2}\cdot\sqrt{\frac{c_2}{c_1\cdot\left(B_1+B_2\right)}}\right\}\right)<0$$

$$\frac{\partial t_{W_3^*}}{\partial B_2}=0-2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{c_1\cdot\left(B_1+a^*\right)}{c_2}\right)^{-1/2}\cdot\left(\frac{c_1}{c_2}\cdot\frac{\partial a^*}{\partial B_2}\right)$$

$$=-\left(\frac{c_1\cdot\left(B_1+a^*\right)}{c_2}\right)^{-1/2}\cdot\left(\frac{c_1}{c_2}\cdot\left\{1-\frac{T_2-T_1}{2}\cdot\sqrt{\frac{c_2}{c_1\cdot\left(B_1+B_2\right)}}\right\}\right)<0$$

證明 A：

若令 $A=\left(B_1+a^*\right)^{1/2}>0$ 、 $B=\frac{1}{2}\cdot\left(T_2-T_1\right)\cdot\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{1/2}-\left(B_1+B_2\right)^{1/2}<0$ ；

$$\text{則 } A^2-B^2=B_1+a^*-\left[\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}+B_1+B_2-\left(T_2-T_1\right)\cdot\left(\frac{c_2\cdot\left(B_1+B_2\right)}{c_1}\right)^{1/2}\right]$$

$$=a^*-B_2-\left[\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}-\left(T_2-T_1\right)\cdot\left(\frac{c_2\cdot\left(B_1+B_2\right)}{c_1}\right)^{1/2}\right]$$

$$=a^*-B_2-\left[a^*-B_2\right]=0$$

得 $|A|=|B|$ ，故 $A+B=0$ 。

C.10　最佳生產計畫之決策方式分析（表 5.5）

1.若 $B_1 \ge \dfrac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ 時：

(1) 當 $B_2 \le \left(\dfrac{B_1}{T_1} + \dfrac{c_2 T_1}{4c_1}\right) \cdot (T_2 - T_1) + \dfrac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$ 時，則 $a^* = 0$。

模式(IV)之最佳解 W^* 可對應一組最佳解 (y^*, z^*)，如下：

對 $y^*(t)$ 而言：

$$y^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot \left[t - \left(T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1 B_1}{c_2}} \right)^+ \right]^2 + \frac{c_2}{4c_1 T_1} \cdot \left(\left(2\sqrt{\frac{c_1 B_1}{c_2}} \right)^2 - T_1^2 \right)^+ \cdot t \;;$$

$\forall\, t \in [\, t_{y^*}, T_1 \,]$，其中 $t_{y^*} = \left(T_1 - 2\sqrt{\dfrac{c_1 B_1}{c_2}} \right)^+$。

因為 $B_1 \ge \dfrac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1} \Rightarrow T_1 - 2\sqrt{\dfrac{c_1 B_1}{c_2}} \le 0$；所以得 $t_{y^*} = 0$，且

$$y^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot t^2 + \frac{c_2}{4c_1 T_1} \cdot \left(\frac{4c_1 B_1}{c_2} - T_1^2 \right) \cdot t = \frac{c_2}{4c_1} \cdot t^2 + \left(\frac{B_1}{T_1} - \frac{c_2 T_1}{4c_1} \right) \cdot t \text{ ，} \forall\, t \in [\, 0, T_1 \,] \text{。}$$

對 $z^*(t)$ 而言：

$$z^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot \left[t - \left((T_2 - T_1) - 2\sqrt{\frac{c_1 B_2}{c_2}} \right)^+ \right]^2$$

$$+ \frac{c_2}{4c_1 (T_2 - T_1)} \cdot \left(\left(2\sqrt{\frac{c_1 B_2}{c_2}} \right)^2 - (T_2 - T_1)^2 \right)^+ \cdot t$$

$\forall\, t \in [\, t_{z^*}, T_2 - T_1 \,]$，其中 $t_{z^*} = \left((T_2 - T_1) - 2\sqrt{\dfrac{c_1 B_2}{c_2}} \right)^+$。

當 $B_2 \ge \dfrac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$ 時，得 $t_{z^*} = 0$ 且

$$z^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2+\frac{c_2}{4c_1(T_2-T_1)}\cdot\left(\frac{4c_1B_2}{c_2}-(T_2-T_1)^2\right)\cdot t$$

$$=\frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2+\left(\frac{B_2}{T_2-T_1}-\frac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}\right)\cdot t\text{ ，}\quad\forall\, t\in[\,0,T_2-T_1\,]$$

當 $B_2<\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}$ 時，得 $t_{z^*}=(T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}$ 且

$$z^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[\,t-\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}\right)\right]^2\text{ ，}\quad\forall\, t\in[\,t_{z^*},T_2-T_1\,]\text{ 。}$$

故此情況下有兩種的組合方式，如下：

當 $B_2\geq\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}$ 時，得：

$$y^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2+\left(\frac{B_1}{T_1}-\frac{c_2T_1}{4c_1}\right)\cdot t\text{ ，}\forall\, t\in[\,0,T_1\,]$$

$$z^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2+\left(\frac{B_2}{T_2-T_1}-\frac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}\right)\cdot t\text{ ，}\forall\, t\in[\,0,T_2-T_1\,]$$

（此最佳解簡記為 **M1**）

當 $B_2<\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}$ 時，得：

$$y^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2+\left(\frac{B_1}{T_1}-\frac{c_2T_1}{4c_1}\right)\cdot t\text{ ，}\forall\, t\in[\,0,T_1\,]$$

$$z^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[\,t-\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}\right)\right]^2\text{ ，}$$

$$\forall\, t \in [t_{z^*}, T_2 - T_1]\text{，}\; t_{z^*} = (T_2 - T_1) - 2\sqrt{\frac{c_1 B_2}{c_2}}\text{ 。}$$

（此最佳解簡記為 **M2**）

(2) 當 $B_2 > \left(\frac{B_1}{T_1} + \frac{c_2 T_1}{4c_1}\right)\cdot (T_2 - T_1) + \frac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$ 時，則

$$a^* = \frac{T_1 B_2}{T_2} - \frac{(T_2 - T_1)\cdot B_1}{T_2} - \frac{c_2 T_1 \cdot (T_2 - T_1)}{4c_1} > 0\text{ 。}$$

模式(IV)之最佳解 W^* 可對應一組最佳解(y^*, z^*)，如下：

對 $y^*(t)$ 而言：

$$y^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t - \left(T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1(B_1 + a^*)}{c_2}}\right)^+\right]^2 + \frac{c_2}{4c_1 T_1}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1(B_1 + a^*)}{c_2}}\right)^2 - T_1^2\right)^+ \cdot t\text{ ，}$$

$$\forall\, t \in [t_{y^*}, T_1]\text{，其中 } t_{y^*} = \left(T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1(B_1 + a^*)}{c_2}}\right)^+\text{ 。}$$

因為 $B_1 \ge \frac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ ，且 $a^* > 0$ ，可得 $B_1 + a^* \ge \frac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ 或 $T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1(B_1 + a^*)}{c_2}} \le 0$

必成立；所以，得 $t_{y^*} = 0$ ，且

$$y^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2 + \frac{c_2}{4c_1 T_1}\cdot\left(\frac{4c_1(B_1 + a^*)}{c_2} - T_1^2\right)\cdot t$$

$$= \frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2 + \left(\frac{B_1 + a^*}{T_1} - \frac{c_2 T_1}{4c_1}\right)\cdot t\text{ ，}\quad \forall\, t \in [0, T_1]$$

對 $z^*(t)$ 而言：

$$z^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t - \left((T_2 - T_1) - 2\sqrt{\frac{c_1(B_2 - a^*)}{c_2}}\right)^+\right]^2$$

$$+\frac{c_2}{4c_1(T_2-T_1)}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1(B_2-a^*)}{c_2}}\right)^2-(T_2-T_1)^2\right)^+\cdot t$$

$\forall\, t\in[\,t_{z^*},T_2-T_1\,]$，其中 $t_{z^*}=\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1(B_2-a^*)}{c_2}}\right)^+$ 。

此時 $B_2-a^*\geq\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}$ 必成立（見下方證明 **A**），得 $t_{z^*}=0$ 且

$$z^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2+\frac{c_2}{4c_1(T_2-T_1)}\cdot\left(\frac{4c_1(B_2-a^*)}{c_2}-(T_2-T_1)^2\right)\cdot t$$

$$=\frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2+\left(\frac{B_2-a^*}{T_2-T_1}-\frac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}\right)\cdot t\text{ ， }\forall\, t\in[\,0,T_2-T_1\,]$$

故此情況下僅有一種的組合方式，如下：

$$y^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2+\left(\frac{B_1+a^*}{T_1}-\frac{c_2T_1}{4c_1}\right)\cdot t\quad\text{，}\quad\forall\, t\in[\,0,T_1\,]$$

$$z^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2+\left(\frac{B_2-a^*}{T_2-T_1}-\frac{c_2(T_2-T_1)}{4c_1}\right)\cdot t\quad\text{，}\quad\forall\, t\in[\,0,T_2-T_1\,]$$

（此最佳解簡記為 **M3**）

證明 A：

當 $B_1\geq\frac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$ 、 $B_2>\left(\frac{B_1}{T_1}+\frac{c_2T_1}{4c_1}\right)\cdot(T_2-T_1)+\frac{c_2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1}$ 、

$a^*=\frac{T_1B_2}{T_2}-\frac{(T_2-T_1)\cdot B_1}{T_2}-\frac{c_2T_1\cdot(T_2-T_1)}{4c_1}>0$ 時，

則 $B_2-a^*>\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}$ 必成立。

證明：

$$B_2 - a^* - \frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1} = B_2 - \frac{T_1B_2}{T_2} + \frac{(T_2-T_1)\cdot B_1}{T_2} + \frac{c_2T_1\cdot(T_2-T_1)}{4c_1} - \frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}$$

$$= \frac{T_2B_2}{T_2} - \frac{T_1B_2}{T_2} + \frac{(T_2-T_1)\cdot B_1}{T_2} + \frac{c_2T_1\cdot(T_2-T_1)}{4c_1} - \frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}$$

$$= \frac{(T_2-T_1)\cdot(B_1+B_2)}{T_2} + \frac{c_2T_1\cdot(T_2-T_1)}{4c_1} - \frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}$$

$$= \frac{T_2-T_1}{4c_1T_2}\cdot\left(4c_1(B_1+B_2)+c_2T_1T_2-c_2T_2(T_2-T_1)\right)$$

$$= \frac{T_2-T_1}{4c_1T_2}\cdot\left(4c_1(B_1+B_2)+2c_2T_1T_2-c_2T_2^2\right) \tag{C.10.1}$$

因為 $B_1+B_2 > \frac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1} + \left(\frac{B_1}{T_1}+\frac{c_2T_1}{4c_1}\right)\cdot(T_2-T_1) + \frac{c_2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1}$ ，得

$$4c_1(B_1+B_2) > c_2T_1^2 + \frac{4c_1B_1(T_2-T_1)}{T_1} + c_2T_1(T_2-T_1) + c_2(T_2-T_1)^2$$

$$= c_2T_1^2 + \frac{4c_1B_1(T_2-T_1)}{T_1} + c_2T_1(T_2-T_1) + c_2T_2^2 - 2c_2T_1T_2 + c_2T_1^2$$

$$= 2c_2T_1^2 + \frac{4c_1B_1(T_2-T_1)}{T_1} + c_2T_1(T_2-T_1) + c_2T_2^2 - 2c_2T_1T_2$$

將上式結果代入(C.10.1)式之括弧內，得

$$4c_1(B_1+B_2)+2c_2T_1T_2-c_2T_2^2$$

$$> 2c_2T_1^2 + \frac{4c_1B_1(T_2-T_1)}{T_1} + c_2T_1(T_2-T_1) + c_2T_2^2 - 2c_2T_1T_2 + 2c_2T_1T_2 - c_2T_2^2$$

$$=2c_2T_1^2+\frac{4c_1B_1(T_2-T_1)}{T_1}+c_2T_1(T_2-T_1)$$

故得 $B_2-a^*-\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}>\frac{T_2-T_1}{4c_1T_2}\cdot\left(2c_2T_1^2+\frac{4c_1B_1(T_2-T_1)}{T_1}+c_2T_1(T_2-T_1)\right)>0$ 成立。

2.若 $B_1<\frac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$ 時：

(1) 當 $B_2\le(T_2-T_1)\cdot\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}+\frac{c_2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1}$ 時，則 $a^*=0$。

模式(IV)之最佳解 W^* 可對應一組最佳解 (y^*,z^*)，如下：

對 $y^*(t)$ 而言：

$$y^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t-\left(T_1-2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}}\right)^+\right]^2+\frac{c_2}{4c_1T_1}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}}\right)^2-T_1^2\right)^+\cdot t\ ;$$

$\forall\, t\in[t_{y^*},T_1]$，其中 $t_{y^*}=\left(T_1-2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}}\right)^+$。

因為 $B_1<\frac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}\Rightarrow T_1-2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}}>0$；所以，得 $t_{y^*}=T_1-2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}}$，且

$$y^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t-\left(T_1-2\sqrt{\frac{c_1B_1}{c_2}}\right)\right]^2，\forall\, t\in[t_{y^*},T_1]。$$

對 $z^*(t)$ 而言：

$$z^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t-\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}\right)^+\right]^2$$

$$+\frac{c_2}{4c_1(T_2-T_1)}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}\right)^2-(T_2-T_1)^2\right)^+\cdot t\ ;$$

$$\forall\, t \in [\, t_{z^*}, T_2 - T_1\,]$$，其中 $t_{z^*} = \left((T_2 - T_1) - 2\sqrt{\frac{c_1 B_2}{c_2}} \right)^{+}$。

當 $B_2 \geq \frac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$ 時，得 $t_{z^*} = 0$ 且

$$z^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot t^2 + \frac{c_2}{4c_1 (T_2 - T_1)} \cdot \left(\frac{4c_1 B_2}{c_2} - (T_2 - T_1)^2 \right) \cdot t$$

$$= \frac{c_2}{4c_1} \cdot t^2 + \left(\frac{B_2}{T_2 - T_1} - \frac{c_2 (T_2 - T_1)}{4c_1} \right) \cdot t \text{ ， } \forall\, t \in [\, 0, T_2 - T_1\,] \text{；}$$

當 $B_2 < \frac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$ 時，得 $t_{z^*} = (T_2 - T_1) - 2\sqrt{\frac{c_1 B_2}{c_2}}$ 且

$$z^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot \left[t - \left((T_2 - T_1) - 2\sqrt{\frac{c_1 B_2}{c_2}} \right) \right]^2 \text{ ， } \forall\, t \in [\, t_{z^*}, T_2 - T_1\,]$$

故此種情況下有兩種的組合方式，如下：

當 $B_2 \geq \frac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$ 時，得：

$$y^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot \left[t - \left(T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1 B_1}{c_2}} \right) \right]^2 \text{ ， } \forall\, t \in [\, t_{y^*}, T_1\,] \text{ ， } t_{y^*} = T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1 B_1}{c_2}}$$

$$z^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot t^2 + \left(\frac{B_2}{T_2 - T_1} - \frac{c_2 (T_2 - T_1)}{4c_1} \right) \cdot t \text{ ， } \forall\, t \in [\, 0, T_2 - T_1\,]$$

（此最佳解簡記為 **M4**）

當 $B_2 < \frac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$ 時，得：

$$y^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot \left[t - \left(T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1 B_1}{c_2}} \right) \right]^2 \text{ ， } \forall\, t \in [\, t_{y^*}, T_1\,] \text{ ， } t_{y^*} = T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1 B_1}{c_2}}$$

$$z^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t-\left((T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}\right)\right]^2 ,$$

$$\forall\, t\in[t_{z^*},T_2-T_1]\text{，}t_{z^*}=(T_2-T_1)-2\sqrt{\frac{c_1B_2}{c_2}}$$

（此最佳解簡記為 **M5**）

(2) 當 $B_2>(T_2-T_1)\cdot\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}+\frac{c_2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1}$ 時，則

$$a^*=B_2+\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}-(T_2-T_1)\sqrt{\frac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}}>0\text{ 。}$$

模式(IV)之最佳解 W^* 可對應一組最佳解 (y^*,z^*)，如下：

對 $y^*(t)$ 而言：

$$y^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t-\left(T_1-2\sqrt{\frac{c_1(B_1+a^*)}{c_2}}\right)^+\right]^2+\frac{c_2}{4c_1T_1}\cdot\left(\left(2\sqrt{\frac{c_1(B_1+a^*)}{c_2}}\right)^2-T_1^2\right)^+\cdot t\text{ ；}$$

$$\forall\, t\in[t_{y^*},T_1]\text{，其中 }t_{y^*}=\left(T_1-2\sqrt{\frac{c_1(B_1+a^*)}{c_2}}\right)^+\text{ 。}$$

因為 $B_1<\frac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$，且 $a^*>0$，

所以 B_1+a^* 可能為「$B_1+a^*\geq\frac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$」或為「$B_1+a^*<\frac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$」。

當 $B_1+a^*\geq\frac{c_2\cdot T_1^2}{4c_1}$ 時，得 $t_{y^*}=0$，且

$$y^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2+\frac{c_2}{4c_1T_1}\cdot\left(\frac{4c_1(B_1+a^*)}{c_2}-T_1^2\right)\cdot t$$

$$= \frac{c_2}{4c_1} \cdot t^2 + \left(\frac{B_1 + a^*}{T_1} - \frac{c_2 T_1}{4c_1} \right) \cdot t \text{ ，} \forall\, t \in [\,0, T_1\,]$$

當 $B_1 + a^* < \frac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ 時，得 $t_{y^*} = T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1(B_1 + a^*)}{c_2}}$ ，且

$$y^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot \left[t - \left(T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1(B_1 + a^*)}{c_2}} \right) \right]^2 \text{，} \quad \forall\, t \in [\,t_{y^*}, T_1\,]$$

對 $z^*(t)$ 而言：

$$z^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot \left[t - \left((T_2 - T_1) - 2\sqrt{\frac{c_1(B_2 - a^*)}{c_2}} \right)^+ \right]^2$$

$$+ \frac{c_2}{4c_1(T_2 - T_1)} \cdot \left(\left(2\sqrt{\frac{c_1(B_2 - a^*)}{c_2}} \right)^2 - (T_2 - T_1)^2 \right)^+ \cdot t \text{ ；}$$

$$\forall\, t \in [\,t_{z^*}, T_2 - T_1\,] \text{，其中 } t_{z^*} = \left((T_2 - T_1) - 2\sqrt{\frac{c_1(B_2 - a^*)}{c_2}} \right)^+ \text{。}$$

因為 $B_2 - a^* \geq \frac{c_2(T_2 - T_1)^2}{4c_1}$ 必然成立（見下方證明 **B**），得 $t_{z^*} = 0$ 且

$$z^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot t^2 + \frac{c_2}{4c_1(T_2 - T_1)} \cdot \left(\frac{4c_1(B_2 - a^*)}{c_2} - (T_2 - T_1)^2 \right) \cdot t$$

$$= \frac{c_2}{4c_1} \cdot t^2 + \left(\frac{B_2 - a^*}{T_2 - T_1} - \frac{c_2(T_2 - T_1)}{4c_1} \right) \cdot t \text{，} \quad \forall\, t \in [\,0, T_2 - T_1\,]$$

故此情況下有兩種的組合方式：

當 $B_1 + a^* < \frac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ 時，得：

$$y^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot \left[t - \left(T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1(B_1 + a^*)}{c_2}} \right) \right]^2 \text{，}$$

$$\forall\, t \in [\, t_{y^*}, T_1\,]\ ,\ t_{y^*} = T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1(B_1 + a^*)}{c_2}}$$

$$z^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2 + \left(\frac{B_2 - a^*}{T_2 - T_1} - \frac{c_2(T_2 - T_1)}{4c_1}\right)\cdot t\ ,\ \forall\, t \in [\,0, T_2 - T_1\,]$$

（此最佳解簡記為 **M6**）

當 $B_1 + a^* \ge \dfrac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ 時，得：

$$y^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2 + \left(\frac{B_1 + a^*}{T_1} - \frac{c_2 T_1}{4c_1}\right)\cdot t\ ,\ \forall\, t \in [\,0, T_1\,]$$

$$z^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2 + \left(\frac{B_2 - a^*}{T_2 - T_1} - \frac{c_2(T_2 - T_1)}{4c_1}\right)\cdot t\ ,\ \forall\, t \in [\,0, T_2 - T_1\,]$$

（此最佳解簡記為 **M7**）

證明 B：

當 $B_1 < \dfrac{c_2 \cdot T_1^2}{4c_1}$ 、 $B_2 > (T_2 - T_1)\cdot\sqrt{\dfrac{c_2 B_1}{c_1}} + \dfrac{c_2 \cdot (T_2 - T_1)^2}{4c_1}$ 、

$a^* = B_2 + \dfrac{c_2(T_2 - T_1)^2}{4c_1} - (T_2 - T_1)\sqrt{\dfrac{c_2(B_1 + B_2)}{c_1}} > 0$ 時；則 $B_2 - a^* \ge \dfrac{c_2(T_2 - T_1)^2}{4c_1}$ 必成立。

證明：

利用兩者相減，得

$$B_2 - a^* - \frac{c_2(T_2 - T_1)^2}{4c_1} = B_2 - B_2 - \frac{c_2(T_2 - T_1)^2}{4c_1} + (T_2 - T_1)\sqrt{\frac{c_2(B_1 + B_2)}{c_1}} - \frac{c_2(T_2 - T_1)^2}{4c_1}$$

$$= -\frac{c_2(T_2 - T_1)^2}{2c_1} + (T_2 - T_1)\sqrt{\frac{c_2(B_1 + B_2)}{c_1}}$$

$$=(T_2-T_1)\cdot\left(\sqrt{\frac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}}-\frac{c_2(T_2-T_1)}{2c_1}\right)$$

將上式括弧內兩項，各自平方後相減，得

$$\frac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}-\frac{c_2^2\cdot(T_2-T_1)^2}{4c_1^2}$$

$$=\frac{c_2}{c_1}\cdot\left(B_1+B_2-\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}\right)>\frac{c_2}{c_1}\cdot\left(B_1+(T_2-T_1)\cdot\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}\right)>0$$

所以 $\sqrt{\frac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}}-\frac{c_2(T_2-T_1)}{2c_1}>0$ ； 故 $B_2-a^*-\frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1}\geq 0$ 。