

南 華 大 學

哲學系碩士論文

從懷德海的過程哲學來談台灣數學教育的變遷與困境

Talk the change and the dilemma that Taiwan Mathematics
Education from Pprocess Philosophy of Whitehead

研 究 生：李 桂 蘭

指 導 教 授：謝 青 龍 博 士

中 華 民 國 九 十 六 年 六 月

南 華 大 學

哲 學 系

碩 士 學 位 論 文

從懷德海的過程哲學來談台灣數學教育的變遷與困境

研究生：李桂蘭

經考試合格特此證明

口試委員：陳英娥

孫雲平

指導教授：謝青龍

系主任(所長)：劉澹精

口試日期：中華民國 96 年 5 月 24 日

誌 謝

所謂「人生有夢，築夢踏實」，研讀哲學是我年輕時的一個夢想，如今隨著論文的完成，我將此夢想達成。而本論文的完成，承蒙指導教授 謝青龍 博士之細心指導得以順利完成，真心感謝恩師 謝青龍 博士於求學期間在學業上的積極指導與耐心的指正。謝謝指導教授 謝青龍 博士每週的固定 meeting，不厭其煩的與我溝通與指導，也感謝 孫雲平 博士對於論文的審閱以及建議，讓我的論文更加完整，更要感謝 陳英娥 博士於百忙中抽空審閱與斧正該篇論文，使得這篇論文更臻完美。萬般的感謝無法言喻，在此致上真心無限的感激。

撰寫論文期間，適逢人生低潮期，似乎人生會遭遇的大挫折，在此期間我都親身經歷了，我很感謝在這段期間幫助過我或是傷害過我的人，因為有你們讓我更深刻感受到完成論文的艱辛與喜悅。真的很感謝指導教授 謝青龍 博士亦師亦友地在生活中予以鼓勵與協助，也感謝南華大學哲學研究所的老師們於求學階段的指導與解惑，也感謝所有在這段時間相伴的所有人，包含了家人、朋友、大學同學、國中同學、同事以及學生，謝謝你們全力的支持與關懷。在此謹以此碩士論文的成果獻給所有關心與愛護我的家人、恩師及好友們，尤其是我的家人——生我育我的父母親以及兄弟姐妹。

李桂蘭 謹致於嘉義
中華民國九十六年六月

摘 要

本文研究方法主要是參考懷德海的著作原典翻譯文本與國內外學者對於懷德海的哲學思想與教育主張所發表的各種著作與批判，進行文獻蒐集、考察與綜合批判，期待獲得對目前台灣數學教育與未來有益的內容。

為達成此目標，本文的研究架構說明如下：在第二章首先介紹懷德海的生平，再從他的學術分期出發，來談他的學術轉向。透過他的學術生涯來了解他對教育及數學的看法，並進而來說明他的教育及數學教育，期對目前台灣的教育環境提出一些看法。最後探討他的過程哲學，希望藉由他的過程哲學來對台灣的教育甚至到數學教育提出看法與建議。

第三章中，我們將重心轉移到知識這個層面來。首先從人類知識的形成談起，再進而探討數學在人類知識形成中的角色，進而探討數學知識的形成，最後我們將以懷德海的過程哲學來看數學史在數學教育中的重要性。

第四章我們將進行討論台灣數學教育的流變，首先我們將從台灣教育的變遷談起，然後我們將縮小範圍談台灣數學教育改革，並對於其現況加以分析。數學教育改革已是世界教育改革中的趨勢，最後我們將透過懷德海的哲學思想來談數學教育改革，期從中對數學教育改革提出一些建議。

最後，希望藉由上述預期目標的達成，能對台灣數學教育提出新的價值，從而避免數學落入僅是工具而無用的學科之困境，去感受數學教育的內在價值，進而達成數學教育最終積極目的。

關鍵字：懷德海、過程哲學、數學教育。

Abstract

This text research method mainly is the work which makes reference to Whitehead original Dian translation text originally with domestic and international various work and judgment that scholar's philosophy thought toward Whitehead and education announce when laying claim to, carry on a cultural heritage collection, investigation with comprehensive judgment, the expectation acquires rightness currently Taiwanese mathematics education and in the future beneficial content.

In order to reach this target, the textual research structure is explained as follows : In chapter 2 first introduce Whitehead all one's life, again from his the academic cent expected to set out, talk his academic change direction. Understand his viewpoint to the education and mathematics, and then explain his education and mathematics education through his academic career, the period puts forward some viewpoints currently to the Taiwanese education environment. Inquire into his process philosophy finally, hope by his process philosophy to even go to mathematics education to put forward viewpoint and suggestion to the Taiwanese education.

In chapter 3, we transfer the center of gravity to the knowledge this level. The role started to talk about from the formation of mankind's knowledge first, then inquired into mathematics again in the mankind the knowledge the formation, then inquired into the formation of mathematics knowledge, we would see with Whitehead processed philosophy finally mathematics history educate medium importance in mathematics.

Chapter 4 we will carry on discussing Taiwanese mathematics educates of flow to change, we will start to talk about from educational change in Taiwan first, then we will shrink scope to talk a Taiwanese mathematics education reform, and take in to analyze to its current conditions. Mathematics education reform is already the trend in the world education reform, we will talk mathematics education reform through the Whitehead philosophy thought finally, expect from in put forward some suggestions to mathematics education reform.

Hope finally by above-mentioned expectation the target reach, can put forward new value to the Taiwanese mathematics education, avoiding mathematics falling into thus is the dilemma of the academics of tool and futility only, to feeling mathematics educational inside value, then reach a mathematics education final and aggressive purpose.

Key words : Whitehead , Process Philosophy , Mathematics Education

目 次

第一章 緒論.....	1
第一節 研究背景與動機.....	1
第二節 研究進路.....	5
第二章 懷德海的哲學思想.....	7
第一節 生平.....	7
第二節 從數學家到哲學家.....	10
第三節 數學教育的思想.....	17
第四節 過程哲學的基礎與價值.....	29
第三章 數學形成過程及其意義.....	37
第一節 人類知識的形成.....	38
第二節 數學在人類知識形成中的角色.....	45
第三節 數學知識的形成.....	49
第四節 數學史在數學教育的重要性.....	55
第四章 台灣數學教育的流變.....	63
第一節 台灣教育的變遷.....	63
第二節 台灣數學教育改革的現況分析.....	69
第三節 從懷德海談數學教改之綜觀.....	79
第五章 結論.....	89
第一節 總結.....	89
第二節 建議.....	92
參考文獻.....	95

第一章 緒論

數學，是每個人在求學過程中都會接觸到的，然而在畢業之後，數學幾乎不復存在，甚而認為學數學是無用的，學習數學是痛苦的，但，真是如此嗎？而又為什麼會有如此的聲音出現呢？是本身的問題？還是整個教育體制？或是數學教育出現了什麼狀況呢？希望能從此篇論文的分析與批判的過程中，尋求一些答案。

第一節 研究背景與動機

身為一個數學教師已逾十五年，會當個數學老師，真的是偶然。我高中時代有個隔壁班同學，她真的討厭或該說厭惡數學，基本上她是蠻排斥數學，所以她在數學的學習上是沒有動力的。而我是喜歡數學的，況且在這數學的天地裡，我還算小有成就，所以我一直無法理解她為何如此憎恨數學呢？總是想說可不可以因為我而讓她喜歡數學一下下呢？而結果真的只是很短暫的。在高中三年裡，我們常常很無厘頭的在討論數學，雖然對她的實質數學分數沒有什麼助益，但在過程中我們互有收穫，也帶領我們跳脫一下正式教育體制下的數學框框。

高中時期，對於上大學所要選填的志願是數學系或是哲學系。大學聯考後，我如願上了我所想要的科系。在大學殿堂裡，我選擇我所喜歡的科目修讀，對於數學的表現似乎仍是如魚得水。更在大三的暑假我參加了一個數學營，在營隊裡依然與數學為伍，但讓我至今印象深刻的是，營隊的老師帶領著我們去思考數學教育的問題，其中他也帶領我們去閱讀美國數學教育改革的問題，為此讓我對數學多了一份思考。同時在我的內心深處，也埋藏了一個聲音：「我要讓我身邊的人不再那麼懼怕數學！」這聲音至今依然回盪在我的腦海之中。

會當上老師，真的是無心插柳的。或許是跟這聲音有關吧！在大學時期接觸了很多輔導的書籍，加上參與社團的自我磨練，再加上每年暑假回家中為父親的朋友的小孩補習數學，更加上畢業時家中只剩下父母雙親二人在家，興起回家陪陪老人家的念頭，在這些巧合之下，我沒有很深厚的教學原理，有的是對數學的

熱誠，我走進了數學教師的行列。而來就讀哲學系，除了是圓年少時的一個夢想，又何嘗不是與這聲音有關呢？

在這個環境裡會常常被學生問到：「老師，學數學有什麼用呢？」也常常聽到家長或學生說到：「數學好難喔！」以前總是讓自己的熱誠來感動他們，讓自己建構的數學模式的過程中來引導他們。如今研讀了哲學所，在哲學領域的我學會了用哲學角度來思考數學、教育以及數學教育。很慶幸的，我在眾多哲學家中發現了懷德海（Alfred North Whitehead, 1861-1947）。他把數學家的嚴密與哲學家的智慧融為一體，從《泛代數論》（*Treatise on Universal Algebra with Application*, 1898）、《數學原理》（*Principle Mathematic*, 與羅素合著，1910—1913）中可看出他身為數理邏輯學家，從《自然知識原理的探討》（*An Enquiry Concerning the Principle of Natural Knowledge*, 1918）、《自然的概念》（*The Concept of Nature*, 1920）、《相對論原理》（*The Principle of Relativity*, 1922）中可看出他身為理論物理學家，從《科學與現代世界》（*Science and the Modern World*, 1925）、《宗教的形成》（*Religion in the Making*, 1926）、《過程與實在》（*Process and Reality*, 1929）中可看出他身為過程神學的創始人，從《教育的目的》（*The Aims of Education*, 1929）中可看出他身為教育家立場的文明批評者，由此不難看出他的多面性。

在寫這論文中的一天裡，我與遠嫁瑞士多年的學姊通電話，與她聊到了目前的台灣局勢與教育，其中當在比較台灣的教育與瑞士的教育的差異時，她跟我玩了一個心理測驗遊戲。

這心理測驗遊戲的內容是：有五種動物：老虎、猴子、孔雀、大象和狗。你到一個從未去過的原始森林探險，帶著這五種動物，四周環境危險重重，你迫於無奈要把他們一個個放棄，你會按什麼次序把他們放棄呢？

我回答的答案是：孔雀、老虎、猴子、狗、大象。

然後我學姊跟我分析解釋其中所代表的涵義：孔雀代表的是你的伴侶、愛人；老虎代表的是你對金錢和權力的慾望；大象代表的是你的父母；狗代表的是你的朋友；猴子代表的是你的子女。

而這個問題的答案，是意味著當你處在困苦的環境之中時，首先會放棄的是什麼。聽完學姊的解釋，在電話這頭的我著實驚訝了一下，在困難的環境中我會首先放棄我的愛人，但在選擇中我為什麼會首先放棄孔雀呢？因為我覺得孔雀是在艱苦困難中最不能幫助我的東西。她說她的答案第一個也是放棄孔雀，她有個幸福的家庭以及愛她的老公，這答案讓她難過了一下，於是她也讓她老公做這測驗，而她老公的答案是：猴子、老虎、大象、狗、孔雀。她老公說：在這所有動物中，唯有孔雀是最沒有保護自己的能力，我怎麼能輕易放棄孔雀讓它陷於險境之中呢？

為什麼會有如此差異的分別呢？難道是男女有別嗎？其實不是的！而是在於我們接受教育的過程中所帶出的東西的不同！是否我們的教育思想裡有意無意的在傳達著功利主義¹的思想在其中呢？此時我腦海中浮現了台灣教育的變遷，台灣的教育理念不乏是複製的理念，當然也複製了功利主義。所以學生會問我：「老師，學數學有什麼用呢？」但學數學真的沒有用嗎？我深深認為學數學是有用的，因為在人類知識發展過程中，數學佔了一個很重要的角色，只可惜在教育的過程中似乎被忽略了。

我學姊跟我繼續述說著這十多年來在德國和瑞士所遇到的一些事情，也談論著東西文化的異同，更述說著教育理念的不同。她的大兒子在課業的表現不錯，在其他方面也表現亮麗，是他們兩夫妻的驕傲。但她的二女兒在課業上的表現就不如大哥，她很擔憂這女兒的將來。此時的學姊也陷入了分數的迷思之中，在這時候，母女的關係不佳，女兒也害怕著上學。但在與她老公溝通之下，他們放棄

¹ 在此所指的功利主義，並非倫理學所說的功利主義 (Utilitarianism)，即效益主義是道德哲學 (倫理學) 中的一個理論。提倡追求「最大幸福」 (Maximum Happiness)。主要哲學家有約翰·史都華·米爾 (John Stuart Mill)、傑瑞米·邊沁 (Jeremy Bentham) 等。而是後來延伸而成為現代人所常用的功利主義，亦即會以目的為前提出發的主義。

了分數的迷思，在瑞士的教育體制²之下，他們相信他們的女孩可以走出她自己的天空，他們希望他們的女兒可以在學習過程中是放鬆的，是快樂的。說著說著不禁令我陷入沉思之中。

這思緒在腦海中縈繞了許久許久。不同的原因是否來自於過程的不同呢？想起了自己在求學過程中的感受，也想起了自己在教學過程中所遇到學生的學習過程感受，也浮現起那些家長的想法與期盼。曾經「快樂學習，學習快樂」是我最教書的最大宗旨，而曾幾何時，也會被這整個大環境所吞噬？我們這個大環境的教育主體，是否生病了呢？因而需要教育改革來加以治療。但，教育改革應該不是只有台灣在談論、在進行，但是我們的改革為何如此的紛亂呢？位於中間地位角色教師的我是如何思考與看待這一問題的呢？

似乎教育改革的實施並未真的按照先前所設定的路徑行走，說是要讓學生的壓力減輕，但看在天天與學生相處的我的眼中，真是一大諷刺！因為說真的壓力並沒有減輕，反而有加重的跡象，有時真的還真慶幸自己比他們早些時候出生，使自己免於這樣的壓力環境之下！

基於這樣的想法之下，想要藉著自己的數學專業，再加上哲學思維的探討，來看看台灣的數學教育，也來看看社會大眾為何懼怕數學、為何討厭數學，也希望透過身兼教育、哲學、數學數種角色的懷德海的思想來說明探討現今台灣數學教育的問題，也希望能從中獲得一些啟示。

² 瑞士教育制度是由小學，中學，高中，職業先修，大學和專門化大學組成。教育服務（幼稚園，小、中學，大學）主要是由瑞士的州政府負責提供。

第二節 研究進路

本文研究方法主要是參考懷德海的著作原典翻譯文本，除此之外，國內外學者對於懷德海的哲學思想與教育主張所發表的各種著作與批判，也是參考的重點。換句話說，本文採用的研究方法是文獻蒐集、考察與綜合批判，並希望能藉此考察方式，獲得對目前台灣數學教育與未來有益的內容。

為達成此目標，本文的研究架構說明如下：在第二章中，首先在第一節我們將先從懷德海的生平介紹起，第二節再從他的學術分期出發，來談他的學術轉向。我們可以將他的學術生涯劃分為三個階段，即為英國劍橋的數學邏輯時期，因為受到愛因斯坦提出相對論所造成的物理學革命，以及當時劍橋大學對話式討論的學習風氣，讓懷德海進入了下一個階段，也就是英國倫敦的自然哲學。在英國退休之後，轉往美國發展，透過演講的方式，在演講中把他深邃的過程思想細細說來，使我們後人又多了一份哲學資產，這就是他最後的美國哈佛形而上學階段。在第三節我們可以透過他的學術生涯來了解他對教育的觀點以及他對數學的看法，並進而來說明他的教育思想以及數學教育，也期望能從他的教育思想以及數學教育中，對目前台灣的教育環境提出一些看法。在最後一節第四節中，我們將來探討他後期哲學轉向後所提出的過程哲學，從他的著作中不難找出他的過程哲學的理路，希望藉由他的過程哲學來對台灣的教育甚至到數學教育提出看法與建議。

在第三章中，我們將重心轉移到知識這個層面來。首先在第一節我們將從人類知識的形成談起。在人類追求知識的過程中，一開始都是以探索自然界開始的，在後來慢慢發現數學在知識的探索過程中佔了一席之地。也因於此，我們在第二節中將說明數學在人類知識形成中的角色，在本章中我們可以延續第二章第二節，懷德海在受到物理學革命影響之下，看見了生活世界脫離不了物理的原理，而物理的原理脫離不了數學，數學是現實生活中的應用。在第三節我們將來探討數學知識的形成。我們一生中，都在追求或是接受知識，不管是前人所遺留下來的知識，或是日新月異所創新的知識，更甚或是我們尚未知曉的知識，應該都不難離開數學。因為在哲學發展史中，我們可以發現古人從研究探討自然現象

到轉為數學知識，從這裡看出了數學知識就是人類的知識。接受學校教育是目前我們獲得知識的來源，在近年來的教育改革浪潮中，教育部也明確指出數學的重要性，而在上一章討論懷德海中，也不難發現數學的重要。因而懷德海提出重視數學史的看法，所以在接下來的第四節，我們將懷德海的過程哲學來看數學史在數學教育中的重要性。在他數學教育觀點裡，明確提到了學習過程的重要，也提到數學史的重要，可見他對過程的重視。既然數學是人類知識探索的源頭上佔了角色，因此數學史在接觸數學的當頭是不容忽視的，所以在教授數學知識的過程是不能將其棄之不顧。

在第四章中，我們將進行討論台灣數學教育的流變。首先第一節我們將從台灣教育的變遷談起，台灣歷經了荷蘭人、日本人以及國民政府的統治，在當時進行的教育是殖民化的教育，直到政府解嚴之後，台灣的教育才漸漸脫離此模式，漸漸朝向民主化的發展。在這發展的脈絡中，也可看出懷德海過程哲學的影子。接下來的第二節，我們將縮小範圍談台灣數學教育改革，並對於其現況加以分析。數學教育改革已是世界教育改革中的趨勢，雖然台灣對外的數學表現依然很好，但是普世對於數學的應用依然狹隘，既然數學是人類寶貴的資產，那應該讓世人對數學的觀念加以釐清才是。最後第三節，我們將透過懷德海的哲學思想來談數學教育改革，期望從中能對數學教育改革提出一些建議。懷德海的教育思想有一很大的重點，就是不要教授無用的知識，而是一種能力，這與目前國內推行的教育改革是不謀而合的。教育改革者，希望學生具備有帶著走的能力，而不再只是一個死板板的知識。懷德海的過程哲學強調融合的概念，而目前國內推行的教育改革，希望學生具備統整的能力，也是有相同之處的。

總而言之，人的知識是如何形成的？與數學是否有著密切的關係呢？為什麼全世界都要進行教育改革呢？它改革的哲學基礎又是在哪裡呢？我們是否可以透過哲學家的觀點及其理論基礎來以解答呢？我們將從此篇論文中，得到一些答案。

第二章 懷德海的哲學思想

懷德海（Alfred North Whitehead，1861-1947）是二十世紀上半葉活躍於英國和美國學術界的著名數學家、哲學家和教育家，是現代西方很有影響力的有機哲學（philosophy of organism,也稱過程哲學 philosophy of process）學派的創始人。在本章中，我們將由懷德海的生平拉開序幕，於此我們將可發現他在教育上的見解，而他到美國擔任哲學教授，也為他的後期思想轉到了哲學方面，並讓他的思想更向上發展。

第一節 生平

十九世紀中葉，英國上層社會籠罩在一派濃厚的自然主義氛圍之中。這種自然主義的審美精神，散佈於該世紀各個著名文人和學者的作品中，這是一個詩人輩出的時代。就在這時候，科學也開始出現新時代的一縷曙光。進化論業已趨向成熟，電磁學也逐漸成形，非歐幾何亦已提出，威爾斯拉斯（Karl Weierstrass，1815—1897）與柯西（Augustin-Louis Cauchy，1789—1857）終於在嚴格邏輯的基礎上奠定了微積分的理論基礎，結束了微積分自牛頓（Isaac Newton，1642—1727）、萊布尼茲（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646—1716）創立以來在邏輯基地上的混亂局面。爾後，康托（Georg Cantor，1845-1918）創立了無窮數的理論，為數學開拓了一個嶄新的天地。此時，場理論和光的波動說也隨之被提出，不過這也衝擊著牛頓物理學大廈，而此大廈開始出現了裂痕。在這樣的思維下，世界在期待著某種精神的轉變。

而懷德海就是在這樣的時空背景下誕生了。他在西元 1861 年 2 月 15 日出生於英國東南部的拉姆斯蓋特。他的祖父是當地一位有名望的教育家，曾任當地一所私立學校的校長。他的父親先後從事教育、宗教工作，十分關心教育事業。受家庭的影響，懷德海對教育也很感興趣。十歲時習拉丁文。十二歲時習希臘文、數學和歷史。他在十九歲時，跨過了他學術生涯的重要一步——進入劍橋大學，到了二十四歲被選為劍橋大學「三一學院」學員。他主要的興趣是數學，但也涉略哲學、宗教、政治、文學……等。從十九歲到四十九歲這三十年間在劍橋大學

由學生而留任講師而升為教授。所教授之科目為理論和應用數學。到了六十三歲（一九二四年）他接到美國哈佛大學哲學系邀請。他毅然橫渡大西洋去美任教。去美以後在哲學上是他豐收期。

從地理上劃分，懷德海的學術活動大體上可分為三個時期：

（一）英國劍橋時期（1880-1910）：為數學與邏輯階段。懷德海這個時期最主要的工作，就是尋求數學與邏輯的普遍性，而其基本理論就是嘗試證明：數學可化約為當代符號邏輯，並依照符號邏輯的演算規則去運作。換句話說：數學的基礎在邏輯，而數學本身就是一種嚴格的演繹邏輯結構。³

（二）英國倫敦時期（1910-1924）：為自然科學的哲學階段。懷德海這個時期最主要的工作，說明如下：

1. 深入尋求數學和物理的普遍性，批評「自然二分法」、「簡單定位」。
2. 具體性誤置的謬誤（fallacy of misplaced concreteness）：把自然科學理論所描述的「抽象事實」當做「具體的終極真實」論點。
3. 積極提出以具體的「事件」為基本單位來詮釋、融貫數學與物理的經驗的形成其事件理論。⁴

（三）美國哈佛時期（1924-1937）：為形上學階段。此時期最主要的工作是嘗試透過形上學中普遍性的描述，融貫、詮釋數學、邏輯、近代物理、生物學、心理學、生理學、認識論、語言哲學、歷史哲學、美學、價值哲學以及社會學，尤其是神祕的宗教領域。⁵

³ 黃國彥：《懷德海教育思想之研究》，嘉新水泥文化基金會，民 58，p9。

⁴ 楊士毅：《懷海德哲學》，東大，初版，民 76，p2-4。

⁵ 傅佩榮：《愛智的趣味：亞里斯多德·多瑪斯·休謨·懷德海》，洪建全教育文化基金會出版，1995，p153。

在劍橋和倫敦時期，他主要是以數學家、邏輯學家和科學哲學家身分從事學術的，因此這時期的哲學被廣泛認為是新實在論。在美國哈佛，他的哲學經歷了重大轉變才得以完成並形成體系。⁶

懷德海一生在數學、哲學、教育等領域留下了大量著作。其中主要的是：《泛代數論》⁷(*Treatise on Universal Algebra with Application*, 1898)、《數學原理》(*Principia Mathematic*, 與羅素合著, 1910—1913)⁸、《有機思維》(*The Organization of Thoughts*, 1917)、《自然知識原理的探討》(*An Enquiry Concerning the Principle of Natural Knowledge*, 1918)、《自然的觀念》⁹(*The Concept of Nature*, 1920)、《相對論原理》(*The Principle of Relativity*, 1922)、《科學與現代世界》(*Science and the Modern World*, 1925)、《宗教的形成》(*Religion in the Making*, 1926)、《過程與實在》(*Process and Reality*, 1929)、《理念的歷險》(*Adventures of Ideas*, 1933)、《思惟的模式》(*Modes of Thought*, 1938)、《教育的目的》(*The Aims of Education*, 1929) 是他的教育代表作，還有一些有關教育的講演和論文收入了他的《科學與哲學論文集》(1948)。

從他的一生的活動，我們發現他把數學家的嚴密精神與哲學家的充滿智慧融為一體，且從他的一生著作中，不難看出他的多面性，因此日本懷德海研究專家田中裕稱懷德海為

“七張面孔的思想家”——數理邏輯學家、理論物理學家、柏拉圖主義者、形而上學家、過程神學的創始人、深邃的生態學家和教育家立場的文明批評者。¹⁰

從上面我們可以看出懷德海的多面性，而在我們談論懷德海學術活動時，也可以看出他從一個數學家進入了哲學家，也就是第一階段的數理邏輯，到了第二

⁶ 懷德海的詳細生平可參考：(1) 程石泉：〈懷德海學術討論會論文集序言〉，載於東海哲研所主編《中國哲學與懷德海》，台北：東大，1989。(2) 陳奎德：《懷特海》，初版，台北：東大，1994，p15-23。(3) 楊士毅：《懷海德哲學》，初版，台北：東大，1987，p1-6。

⁷ 首先考察了普遍代數的一般原理，然後將其運用於邏輯學以及幾何學。

⁸ 此書對於現代符號邏輯的發展史有創導地位。

⁹ 鮮明地提出了“自然的二元分裂理論”批判等終其自然哲學立場，由於恪守克制形上學，只描述作為現象所給予的東西。

¹⁰ 田中裕：《懷特海——有機哲學》，包國光譯，第一版，河北教育出版社，2001，序。

階段的自然哲學，最後進入第三階段的形上學。在下一節中，我們將來探討懷德海從數學轉向到哲學的過程。

第二節 從數學家到哲學家

懷德海於 1880 年進入劍橋大學的三一學院，到 1910 年辭職轉到倫敦大學之前，都是專心研究數學。在當時，懷德海常與朋友和師長進行智力討論，從其中懷德海學到不少東西，進而也開始研讀哲學書籍。在 1885 年，幾乎已經可以背誦康德的《純粹理性批判》。在英國劍橋時期（1880—1910），懷德海是以數學和邏輯研究為主，而在英國倫敦時期（1910-1924），從 1911 年到 1914 年擔任倫敦大學附屬學院講師，從 1914 年到 1924 年擔任皇家學院教授，受到始於愛因斯坦的物理學革命的影響，陸續發表了科學哲學的三部著作，即《自然知識原理的探討》（An Enquiry Concerning the Principle of Natural Knowledge, 1918）、《自然的觀念》（The Concept of Nature, 1920）、《相對論原理》（The Principle of Relativity, 1922）。

從以上的說明，我們可以大概看出懷德海的學術研究的轉變，從數學和邏輯的研究，因為受到愛因斯坦的物理學革命的影響，進行了自然科學的研究，所以轉到了自然哲學，再從自然哲學轉到過程哲學。而其學術發展的脈絡依然從數學與邏輯開始，所以楊士毅在《懷德海哲學入門——超越現代與後現代》一書中這麼說到：

各種學問領域都必須使用到基本邏輯與簡單的數學（此乃意指任何領域都必然涉及邏輯、數字、算術、歐式幾何之運作與相關術語之表述），因此，邏輯與數學就形成了一切學問甚或是人類生活的基礎，我們也很容易看到懷德海的學術發展即是從數學與邏輯開始。¹¹

這裡點出了數學與邏輯散佈於人類生活之中，各種學科都與數學有著密不可分的關係，而懷德海的學習從數學而起，也將由此延伸出他往後的學術思想，因此，楊士毅引當代著名的歷程哲學家哈茨宏（Charles Hartshorne）的話說到：

¹¹楊士毅（2001），《懷德海哲學入門——超越現代與後現代》，台北：揚智，p.67。

他更如當代著名的歷程哲學家哈茨宏（Charles Hartshorne）所指出的：「懷德海是第一位已相當完整的形上學系統，具體地實現了現代邏輯中的關係邏輯（relational logic），或者說，懷氏乃第一位將現代符號邏輯中的關係邏輯予以形上學化，進而發展成機體哲學或關係哲學的哲學家。」¹²

我們只能看出他學術轉向的脈絡，至於數理與哲學就懷德海而言，有著什麼樣的關係？田中裕在《懷特海——有機哲學》一書中，曾說到：「研究數理邏輯與懷特海晚年的極具宗教色彩的形而上學之間有什麼樣的聯繫呢？這些問題都還沒有被充分地考察過。」¹³而我們所熟悉的《數學原理》，是對於現代符號邏輯的發展史有創導地位的一本書，我們也知道是懷德海與羅素所合著的，但因為懷德海與羅素因為對於數學理念的不和，所以後來沒有共同點。所以田中裕如此說：

《數學原理》應用於哲學研究上而著名的論文，例如“摹狀詞理論（the theory description）”和“類型論”等都是由羅素發表在各種哲學雜誌上，人們只知道《數學原理》是羅素與懷德海合著的，可是卻忘了在數學上羅素是懷特海的學生。¹⁴

從上面這段話，我們可以看出，《數學原理》應用於哲學研究的論文，是由羅素所發表的，因此我們大多得到的訊息是由羅素而來的，懷德海並沒有像其他數學家一樣在數學上發現新定理，那是因為懷德海如上一節我們所形容的具多面性，且他將所熟悉的數學普遍化、融貫化地放在他的著作之中，並且同時也賦予哲學化的意義，所以楊士毅在《懷德海哲學入門——超越現代與後現代》一書中說到：

懷德海並沒有發現數學上的新定理，因為懷德海的興趣與著作大致上乃是普遍化、融貫化已知的的數學各部門，同時也賦予哲學化的意義，即使日後有關物理學方面的著作，也是除了在純物裡的論述外，另外加上哲學化

¹²前揭書，p.11。

¹³田中裕（2001），《懷特海——有機哲學》，包國光譯，第一版，河北教育出版社，p.8。

¹⁴前揭書，p.8。

的詮釋，這一切均註定其在日後必然走向哲學家之途。¹⁵

因著上面的分析，本節將就以懷德海的學術研究脈絡，來看待他從數學家到哲學家的歷程。雖然不見他如何將《數學原理》應用於哲學研究，但實際上懷德海整體的邏輯與數學思想涉及各期的哲學發展。

懷德海在英國劍橋大學擔任的是應用數學講師，在當時英國的大學裡，應用數學一般包含了理論物理學。懷德海在 1898 年出版的《泛代數論》這本書，首先考察了普遍代數的一般原理，然後將其運用於邏輯學以及幾何學。而其中討論到的非歐幾何學、黎曼幾何學、高斯代數學等，這些是 1922 年出版的《相對論原理》中使用的數學方法的基礎。從這裡我們可以看出，懷德海是承認數學的實用性的。而在當時所發生的物理學革命，也讓他看出物理在我們生活中所佔的角色，於是他利用了他對數學認識的優勢來談愛因斯坦的相對論。所以田中裕這麼說：

討論相對論的哲學家相當多，如柏格森、卡西勒、羅素、賴欣巴哈等。但是，只有懷特海不侷限於狹義相對論，還精通廣義相對論中所使用的高等數學（微分幾何學）方法。¹⁶

從這裡，我們可以發現，很多哲學在談論愛因斯坦的相對論，但是他們並非以數學的角度來談論，而懷德海卻是以他多年來對數學的認識以及融貫，來談論當時愛因斯坦所提出的相對論，因此雖無法在他哲學中明顯看到數學原理的概念，實是因他將數學概念融貫哲學於無形。

而懷德海也是柏拉圖（Plato，約公元前 428 年-約 348 年）¹⁷的追隨者，柏拉

¹⁵楊士毅（2001），《懷德海哲學入門——超越現代與後現代》，台北：揚智，p.47。

¹⁶田中裕（2001），《懷特海——有機哲學》，包國光譯，第一版，河北教育出版社，p.9。

¹⁷古希臘著名的唯心主義哲學家。柏拉圖晚年及其學派傾向於畢達哥拉學派的數的神秘主義，將理念論與世界的數的結構聯繫起來，提出“理念的數”，對世界的規律作出了歪曲的描繪。柏拉圖在本體論上將理念世界和感覺世界對立起來，在認識論上將真知與意見對立起來，由此建立起唯心主義先驗論的認識論體系。在柏拉圖看來，人既然不能以感官求真理，就只能憑藉與感官和物質實體相區別的靈魂來認識真理。柏拉圖晚年企圖將他的唯心主義理念論和當時的自然

圖在數學上的成就並不是來自於他在數學上有任何的發現，其影響是因為他深信：從事數學研究能夠培養人的思維能力，並以此是哲學家 and 那些要治理他的理想國的人所必須具備的基本素養。他的學園門口寫著他的著名格言：不懂幾何者不得入內。¹⁸田中裕這麼說：

懷特海早期自然科學中僅稱為“客體”的概念，在後期的形而上學中加上了“永恆的”一詞稱為“永恆客體(eternal object)”，與柏拉圖的“理念”的關係更加明確了。¹⁹

從“客體”到“永恆客體”，看到懷德海哲學的變化。由徐利治、鄭毓信在〈略論數學真理及真理性程度——兼評懷特海的《數學與善》〉一文中也可看出懷德海是柏拉圖追隨者的痕跡，他這麼說：

懷特海在哲學上是贊成柏拉圖主義的。所以在《數學與善》中他所論證的正是柏拉圖始終強調的一個思想，即認為對於“理想”的探求是具有重要意義的。我們知道，柏拉圖認為數學存在於先驗的“理念世界”中。²⁰

吳汝鈞在《機體與力動：懷德海哲學研究與對話》一書中，描述了懷德海的思想與其發展，他是這麼說的：

懷氏無疑是一個實在論者(realist)，以即時的經驗作為認識與存在的起點，強調在時空中發生的事件(event)的根源性，並未強調意識的根源性。即是說，我們的意識發生作用，投射到外面去，而到達事件或對象；這些事件或對象早已存在，意識只是照察到它們而已。進一步言，在他的早期思想中，事件與對象(object)仍未有清楚的區分，這兩者要到中期強調自然哲學時期，才清楚區分開來。至於價值問題，則要到後期或晚期才真正提出。即是說，在中期，他視事件裡面的實在部分為價值；在晚期，

科學調和起來。他從理念論哲學出發，對宇宙的產生和各種自然現象作出了自己的解釋。

¹⁸ 獨狼(2006)，《我教女兒學數學》，初版，台北縣汐止市：雅典文化，p.112。

¹⁹ 田中裕(2001)，《懷特海——有機哲學》，包國光譯，第一版，河北教育出版社，p.11。

²⁰ 鄧東皋、孫小禮、張祖貴編(1994)，《數學與文化》，台北：凡異，p.19。

價值變成事件裡面不變的部分，而事件就整體來說，是在不停地流逝，可以說是一種流程（passage）或歷程（process）。²¹

從以上的說明我們可以看到懷德海從數學家到哲學家的過程，也看到了實在、歷程與價值，這形成了他後來的哲學大作《過程與實在》，從中看到哲學中蘊含數學的概念。而我們也在其《科學與現代世界》一書中，可以看到：「十七世紀是一個偉大物理學家與偉大哲學家的時代，而物理學家與哲學家又都是數學家。」²²也說到：「若是沒有數學的這種進步，就不可能有十七世紀的科學發展。」²³由以上的文字，我們都可以發現：懷德海的後期的哲學思想是離不開數學的，尤其受和羅素合著的《數學原理》影響著。所以，懷德海在《科學與現代世界》中這麼說到：

……這個過程完全是由羅素和我合著的《數學原理》（Principia Mathematic）的研究中建立起來的。在這個發展過程中，存在著七種特別令人感興趣的專門關係。第一種包含一對多、多對一以及一對一的相互關係。第二種包括序列關係，也就是使某一域的成員有序排列，以便在這種關係限定的意義上，任何這一域的成員不在其他成員之前，就是在其他成員之後的那些關係。第三類包括歸納關係，就是決定數學規內原理的那些關係。第四類包括選擇關係，這些關係是普通的算術演算理論所需要的，在其他場合也要用到。正是結合這些關係，著名的乘法公理才被提了出來。第五類包括向量關係，這些關係中產生了量詞理論。第六類包括比率關係，這種關係把數和量聯結起來。第七類包括在幾何中出現的三角和四角形關係。²⁴

這與其《過程與實在》一書中，所提到的範疇是相同的。只是以他長期對數學的研究，對數學在科學及哲學中的影響之想法，使他在哲學思想中透漏著數學的氣息。與羅素合著的《數學原理》，此書對於現代符號邏輯的發展史有創導地位，

²¹ 吳汝鈞（2004），《機體與力動：懷德海哲學研究與對話》，初版，台北市：台灣商務，p.3。

²² 懷德海（2000），《科學與現代世界》，傅佩榮譯，初版，台北立緒，p.43。

²³ 前揭書，p.45。

²⁴ 懷德海（1994），《教育的目的》吳志宏譯，初版，台北市：桂冠，pp131-132。

而在其《過程與實在》一書中，也提及了符號的概念，而符號是數學的語言，他這麼說：「哲學所需要的工具則是語言。」²⁵懷德海在其《過程與實在》一書中，提到了數學的獨斷性，他說：

如果我們可以相信畢達哥拉斯的傳統的話，那麼，歐洲哲學的興起在很大程度上就是由數學發展為一門抽象的普遍性科學所造成的。但是，在哲學後來的發展中，哲學方法也一直深受這種數學樣板所害。數學的主要方法是演繹法；哲學的主要方法是描述性的概括法。在數學的影響下，演繹法被強加給哲學，作為其標準方法，而不是在應當檢驗普遍性的範圍時占居其正確位置，作為確證的一種的輔助方法。對哲學方法的這種誤解，掩蓋了哲學在提供一般觀念方面的巨大功績，而這種一般觀念增加了我們對經驗事實理解的清晰性。²⁶

而從這段文字中，我們可以看出懷德海認為數學在哲學發展過程中的確起了作用。但是由於數學與哲學的主要方法是不同的，前者是演繹法，而後者是描述性的概括法，也因為主要方法的不同，所以哲學受了數學的獨斷性的影響。不過也由於這樣的影響，也使得我們對經驗事實的理解更具清晰性。從這裡，我們也可以看出懷德海的哲學思想中，的確有著數學概念。因著數學實用性，以及物理學革命的影響，懷德海在《科學與現代世界》中也提到自然的觀念：「每一個分析自然的體系都必須面對這兩個事實：變化和持續。另外還有第三個被置於此的事實，我稱作永恆。」²⁷「因此，我們從這些使人們那裡獲得如下的理論，一種自然哲學必須涉及這五種概念：變化、價值、永恆客體、持續、機體和融合。」²⁸藉助這些所得到的概念，懷德海為他的過程哲學在做根基的打造。陳奎德在《懷特海》一書中，談到了懷德海的哲學轉向，他這麼說：

懷德海早期科學哲學的邏輯發展需要解決經典科學導致的近代哲學觀於「自然的兩岔」的困難，尤其要解決由於本體與現象分岔導致的巨大困

²⁵ 懷得海（2003），《過程與實在》，楊富彬譯，北京：中國城市出版社，p.18。

²⁶ 前揭書，p.17。

²⁷ 懷德海：《科學與現代世界》，傅佩榮譯，初版，台北立緒，民 89，p106。

²⁸ 前揭書，p107。

難，但進一步深入探究則勢必超越舊有的研究範圍，以便把認識論、宗教哲學、價值論綜合進一個更大的一致性體系中，這就迫使他的哲學向深度和廣度擴展。因而，哲學發展的內在邏輯驅使他這一時期在認識論中發掘科學概念的基礎。²⁹

而楊士毅在《懷海德哲學》一書中，也提到了懷德海在美國哈佛時期的主要工作，他說到：

此期的主要工作乃是嘗試透過形上學中普遍性的描述，融貫、詮釋數學、邏輯、近代物理學、生物學、心理學、生理學、認識論、語言哲學、歷史哲學、美學、價值哲學及社會學，尤其是神祕的宗教領域。亦即「努力嘗試建構一套融貫、合邏輯、必然的普遍觀念系統，藉著此系統以詮釋我們經驗到的所有元素。」³⁰

現在就讓我們來看看懷德海的巨作《過程與實在》的鋪陳章節，這鋪陳透露著懷德海一生學術生涯的過程，有他最先接觸的數學，也有因著物理學革命所接觸的自然科學，更明確顯示出他的哲學思想。這過程顯示著他的思想在進行格式塔的變化，他從數學思想轉換到科學哲學的思想，再轉換到過程哲學的思想。本書共分五篇，第一篇解釋了該書所使用的方法，並概要說明了宇宙論所構成的觀念，說明了數學獨斷性的影響，也說明了科學與哲學所造成的關連。在此書中，懷德海提到了直線如何定義，在在說明與數學的關連。楊士毅在《懷德海哲學入門——超越現代與後現代》一書中這麼說到：

在〈數學與善〉中，我們很明顯地可聯想到下列兩點：(1) 就懷氏個人人生之旅，他似乎又回到其身為數學家、邏輯學家的起點，而想把其學術起點與人生終點之所思，作最後的融貫；(2) 企圖將最抽象的數學、次抽象的事實、以及最具體的價值經驗，尤其是正面價值，融貫成一有機整體。³¹

²⁹陳奎德（1994），《懷特海》，初版，台北：東大，p.93。

³⁰楊士毅（1987），《懷德海哲學》，台北：東大，初版，p.4。

³¹楊士毅（2001），《懷德海哲學入門——超越現代與後現代》，台北：揚智，p.119。

從以上的說明，我們清楚知道了懷德海從數學家到哲學家的過程轉變，那從他的一生中我們可以看到他對教育的看法，也看到他對數學的見解，更由於他思想的變化，看到了他的過程哲學。而，從他的教育思想可以為台灣的教育環境帶來什麼啓示，又他的數學見解為目前台灣的數學教改可以提供什麼樣的基礎，再則，他的過程哲學可以為台灣目前的數學教育提供什麼建議呢？因此在下兩節中，我們將介紹懷德海的教育思想以及他對數學教育的見解，和他的重要哲學思想——過程哲學。

第三節 數學教育的思想

懷德海的祖父在其出生地是位有名望的教育家，並在當地的一所私立學校擔任過校長，而他的父親先後也從事過教育以及宗教工作，也十分關心教育事業。在這樣的家庭背景之下，懷德海同樣對教育也很感興趣。懷德海 1885 年自劍橋三一學院畢業後，留在母校任教 25 年，主要從事教學、著述和一些政治活動。1910 年，懷德海遷居倫敦。1911 年至 1914 年，他在倫敦大學擔任許多職務。1914 年至 1924 年，在肯欣頓皇家科技學院擔任應用數學教授。1924 年至 1937 年，他應徵到美國哈佛大學擔任哲學教授。退休後，擔任哈佛大學榮譽教授，居住在坎布裡奇市。

懷德海對當時十九世紀中葉英國的教育制度，普遍呈現了枯燥乏味的現象，過多的教學內容，甚或太艱深，或是不切實際，或者是毫無意義，進行了猛烈的抨擊。他極力反對在教育過程中進行「無活力的概念」(inert idea)的傳授，在《教育的目的》中之〈教育的目的〉說到：

在訓練一個兒童的思維活動時，最重要的是我們必須當心我稱之為「無活力的概念」(inert idea)的東西——換句話說，那些僅僅被吸收而沒有被利用、檢驗或重新組合的概念。……帶有無活力的概念的教育不僅是無

用的，更重要的是，它是有害的。³²

由此可見，懷德海認為教育是著重利用知識的技巧要領，而不是知識的儲藏所。而，這樣的時空背景，與教育改革如火如荼的九十年代是雷同的。一九九四年九月二十一日成立的行政院教育改革審議委員會，提出五大主張：教育鬆綁、帶好每位學生、暢通升學管道、提升教育品質、建立終身學習社會。³³其中在「帶好每位學生」項目中，特別指出「在課程與教學改革方面，宜以生活為中心進行整體課程規劃，掌握理想的教育目標，訂定課程綱要取代課程標準，強化課程的銜接與統整，減少學科數目和上課時數。」³⁴再者，吳清山在〈推行「國民教育階段九年一貫課程」學校行政配合之探究〉一文中也說到「基本能力（key competencies）的提倡，也是九十年代教育改革的方向之一，在澳洲他們稱之為「為工作、為教育、為生活的關鍵能力」；這些關鍵能力包括「蒐集、分析、組織資訊的能力，表達想法與分享資訊的能力，規劃與組織活動的能力，團隊合作的能力，應用數學概念與技巧的能力，解決問題的能力，應用科技的能力。」³⁵在在顯示與懷德海所主張的原則——反對在教育中進行「無活力的概念」的傳授——相符合。而更重要的是教育是要培育人之責任感與尊重他人的美德，所以他主張：「教育的本質在於它是宗教性質的。宗教教育是一種反覆灌輸責任和崇敬的教育。」³⁶他也說：「教育是生活探險的訓練；研究是智力的探險；而大學應該成為青年人和老年人共同探險的故鄉。」³⁷我們要造就的是有文化的人，因此：「教育就是引導個人去理解生活的藝術。」³⁸從他多年的教學生涯中，他是注重理解消化之教育功能的，因此他說：「教育必須基本上是一種對已在心底裡激起的騷動的有序整理。」³⁹

³² 懷德海（1994），《教育的目的》吳志宏譯，初版，台北市：桂冠，pp1-2。

³³ 黃榮村（2005），《在槍聲中且歌且走——教育的格局與遠見》，台北：天下，2005年10月第一版，p.63。

³⁴ 行政院教育改革審議委員會：《教育改革審議報告書》，民85。

³⁵ 吳清山：〈推行「國民教育階段九年一貫課程」學校行政配合之探究〉，載於《教育研究資訊》，1999.1，7（1），p15-16。

³⁶ 懷德海：《教育的目的》吳志宏譯，初版，台北市：桂冠，1994，P16。

³⁷ 前揭書，P112。

³⁸ 前揭書，P47。

³⁹ 前揭書，P23。

而他也深深知道，教育在本質上，必須是安頓人之不定的心靈，趨於穩定與秩序。所以他強調：

大學是教育的機構，也是研究的機構。⁴⁰

大學的發展是當前時代社會生活的一個顯著特點。⁴¹

大學傳授知識，但是它是富於想像地傳授知識。它在奮力活動，就像我們夢中的詩人和我們意圖的建築師一樣。想像力不要與事實相脫離：它是闡明事實的一種方式。它引出能用於事實（只要它們存在）的一般原則，然後再對與這些原則相符的可供選擇的可能性進行一種智力的考量，通過這樣的方式來發揮作用。⁴²

從以上的說明我們可以明白看出，懷德海對大學教育的重視，這與行政院教育改革審議委員會，提出五大主張的「暢通升學管道」是一樣的，在此項目中，特別指出發展各具特色的高等教育學府，以期「發展各具特色的高等教育學府，包括綜合型大學、研究型大學、技術學院、多元技術學院、科技大學、開放大學、社區學院等，容納更多有心接受不同型態高等教育的人口，滿足終身學習的需求。」⁴³我們深知，大學也是一種培育知性的教育機構，可經由知性的想像力之訓練，以增進社會和諧與國家安寧。

由上面的討論中，不難發現懷德海對教育的內容，亦即課程部分做了一些批判。除了這一點，懷德海在〈教育的目的〉一文中，也明確認為：「我們的目標應當造就的是既有文化、又有某個特殊方面專門知識的人。」⁴⁴而要達成這目標，得在學習階段中透過教育來達成。所以他對教育的意義是：「教育就是獲得運用知識的藝術。」⁴⁵

⁴⁰ 前揭書，P106。

⁴¹ 前揭書，P105。

⁴² 前揭書，P107。

⁴³ 行政院教育改革審議委員會：《教育改革審議報告書》，民 85。

⁴⁴ 懷德海：《教育的目的》吳志宏譯，初版，台北市：桂冠，1994，P1。

⁴⁵ 前揭書，P5。

國內學者陳榮波先生在〈〈學記〉與懷德海的教育觀比較〉中，說到了「懷氏的教育意義便是一種活生生的啓迪心靈的自我發展之探險歷程。」⁴⁶也在〈懷德海的教育觀與中國傳統教育思想〉中提出「懷氏認為教育意義是人的一種自我發展之歷程。人要不斷地學習有創新的思想以及培養出尊重禮節的宗教情操之美德，教育並沒有速成，它只是人生活正確教化之指導原則。」⁴⁷陳教授這裡說到了歷程，而這歷程的概念也是懷德海先生哲學轉向中很重要的。在《教育的目的》中懷德海提到了好幾次的歷程，他認為教育是訓練人如何面對生活環境而適應之，所以他說：「教育不是一個在皮箱中塞滿物品的過程。」⁴⁸也就是說，教育並不是單單把知識傳授給學生而已，再進一步說明：「教育是一個完全有他自己特殊形式的過程。它的最接近的比喻是，一個活生生的有機體在吸收食物。」⁴⁹教育是一個過程，學生是一個活生生的有機體，在吸收消化他所接收到的事物，再細部一點的說明是：

所有有實際經驗的教師都知道，教育是一種一分鐘一分鐘、一小時一小時、一天天地耐心掌握細節的過程。學問無捷徑，不存在一條輝煌的概括性的虛幻之路。⁵⁰

由此可以清晰的看出，懷德海在對進行教育過程之中的重視。反觀國內對教育過程的看待，是否有待改進的空間。

長久以來，國內對於教育，似乎常停留於應試教育之上。回想起我們大家的求學階段，我們是與考試為伍的。在國際間，國內的紙筆測驗是一流的，但是對於創造似乎略遜一籌了。在國內的學校教育體制下，教師們有著一份進度的壓力，對於下一階段的學習似乎總得以考試來分高下，於是機械式的訓練遠遠大於

⁴⁶ 陳榮波：〈〈學記〉與懷德海的教育觀比較〉，載於東海哲研所主編《中國哲學與懷德海》，台北：東大，1989，p147-148。

⁴⁷ 陳榮波：〈懷德海的教育觀與中國傳統教育思想〉，載於東海哲研所主編《東海哲學研究集刊第九輯》，p157。

⁴⁸ 懷德海：《教育的目的》吳志宏譯，初版，台北市：桂冠，1994，P41。

⁴⁹ 前揭書，P41。

⁵⁰ 前揭書，P7。

知識的探索，常常學生是處於只知其然而不知其所然的情況之下，如此是抹煞了對知識探索的意義，更會落入無用知識的巢臼之中。所以國內不重視教育過程可見一斑。雖然在目前教改聲浪中，行政院所推行的政策中也強調歷程的重要，無奈大環境是如此，心有餘而力不足，依然困難重重。

觀其懷德海的一生，我們可以發現與數學的關係。1880年，懷德海進入劍橋的三一學院，在此期間專攻數學；1885年，取得學位，且被聘為特別研究員；1887年，在三一學院取得碩士學位，研究領域是應用數學和理論物理學；1888年，向數學雜誌投稿兩篇，應用數學方面的專業論文。1898年，出版了《泛代數論》，當時懷德海的興趣是要使代數方法比邏輯學更適合於幾何學。1905年，在三一學院取得博士學位。1910—1913年，與羅素合著的《數學原理》出版，該書成為現代數學的基礎。1911年，成為倫敦大學綜合學院應用數學講師。1916年，擔任英國數學家協會會長。⁵¹綜觀懷德海在他數學教書生涯及其著作、發表文章中與演說中不乏討論數學教育。

一九一一年發表一篇關於教育的最早演說文〈數學和博雅教育〉，文中明白指出，適切的數學教學應可培養三方面有密切關係的能力：

- (一) 掌握抽象概念之能力
- (二) 邏輯思考之習性(包括辨認不定之概念、領悟假設和適當之推理等)
- (三) 將抽象概念應用到具體宇宙(包括自然和社會)之能力⁵²

在〈數學原理和基礎數學之關係〉(The Principles of Mathematic in Relation to Elementary Teaching)一文中，懷氏認為博雅教育中，數學教育之目的，在於培養分析、通則和推理等三方面之能力。⁵³

⁵¹ 參考田中裕：《懷特海——有機哲學》，包國光譯，第一版，河北教育出版社，2001，其中的懷德海簡略年譜。

⁵² Alfred North Whitehead：《Essays in Science and Philosophy》，London：Rider & Co.，1948，p180-181。轉引自蔡鈺鑫：〈懷德海論數學教育〉，載於《現代教育》，民81，p89。

⁵³ 前揭書，p88-89。

從這兩篇演說文中我們可以看出懷德海的數學教育目的，他認為數學教育是在培養能力的教育。由於數學概念是抽象的，所以他說要有掌握抽象概念的能力，而後加上邏輯思考，最後將學到的抽象概念應用到生活之中，如此的過程可以與所處的有機世界相連結，如此可以達到分析事物、歸類和推理的能力。除此之外，在《教育的目的》一書中，其〈數學課程〉一文中，懷德海亦指出相同的數學教育目的：

我們要達到的目標是，學生應該通曉抽象的思想，應該認識到它是如何應用於個別具體的情境的，而且應該知道如何把一般的方法應用於它的邏輯調查之中。⁵⁴

也就是說，數學教育的目的在於使學生熟悉抽象之思想，明瞭如何將之應用到特殊之具體環境中，以及知道如何將一般之方法應用到邏輯方法上。

由上一節的探討中，可看出數學是知識的探索來源，而懷德海也認為：「基礎數學乃現代思想之產物，一種結合理論和實際之方式所反應的現代思想。」⁵⁵此即為何他強調應用性乃數學之主要目的。由此也不難看出數學這門科目並非大多數人所說的是一門無用的科目，其實它的實用性是很強的，而且與我們的生活與所處的世界是息息相關的。

至於數學的概念和人類社會、歷史、思想，以及日常生活，是如何互相密切關聯的呢？懷德海亦做了解釋。首先，他認為：

數學在整個文化中應該占有一席之地，而數學中的代數是為了清楚表達這個世界的數量方面而創造出來的智力的工具，不可能擺脫它。這個世界完完全全受到了數量的影響。⁵⁶

⁵⁴ 懷德海：《教育的目的》吳志宏譯，初版，台北市：桂冠，1994，P93-94。

⁵⁵ Alfred North Whitehead：《Essays in Science and Philosophy》，London：Rider & Co.，1948，p19-37。轉引自蔡鈺鑫：〈懷德海論數學教育〉，載於《現代教育》，民81，p90。

⁵⁶ 懷德海：《教育的目的》吳志宏譯，初版，台北市：桂冠，1994，P8。

在此明確說明了：人類世界充滿了數量和數目的概念和實際。畢達哥拉斯（Pythagoras）曾提出“萬物皆數”的觀點，認為萬物皆可以以數來表示，但這個觀點在日後被證明是一個錯誤。

因為數是一個概念，而不是物，是物的數量特徵在人的頭腦中反映為數，不是客觀存在的數轉化為物。畢達哥拉斯把事情弄顛倒了。但這個錯誤的背後是一個人類認識上的大進步——認識到數量關係在宇宙中的重要性。⁵⁷

所以數的概念賦予世間許多事物意義，也說明了數學概念是遍佈日常生活之中的，例如音樂中的音階、樹枝生長的順序、看到事情進行歸納與分析、對事物的說明也離不開數量等等，因為大自然裡自然而然的蘊涵數學概念，這種渾然天成使得人們對這種數學概念的忽略。因此，懷德海他舉例說明：

光說這個國家大沒有用，——多大？說鏽缺乏，也沒有用，——如何缺乏？你不可能迴避數量。你可以飛到詩歌和音樂中去，但是在你的節奏和八度音程中就會遇到數量和數字。⁵⁸

換句話說，一個圓的半徑是小的，但究竟有多小？即使是詩和音樂的世界，也少不了數的成份，例如，音樂的韻律和詩的音步，均充滿了數的概念。在當時的年代裡，也出現了代數需要改革的呼聲，因為在當時代數無論在文字上還是實際上都退化為毫無意義的東西。而他也明白的說出：「如果你對希望在兒童活潑的心靈中喚起的種種品行沒有一個清楚的概念，那麼改革教育計畫是毫無用處的。」⁵⁹這不就如國內前陣子所推行的數學教育改革中提出的建構式數學遇到的結果一樣嗎？數學教育改革者很信誓旦旦的提出建構式數學的教法，認為可以解決當時數學在教育上所遇到的困難，但說真的，沒有一個清楚的概念，造成了社會的動盪，也給學生的學習帶來了困擾。而懷德海如何談改革呢？他的改革如同目前數

⁵⁷ 張景中：《數學與哲學》台北九章，民 85，頁 12。

⁵⁸ 懷德海：《教育的目的》吳志宏譯，初版，台北市：桂冠，1994，P8。

⁵⁹ 前揭書，P8。

學教育改革者一樣，要拉到生活層面來。他說：

首先，你必須確定這個世界上有哪些簡單完全可以進入普通教育中的數量關係；其次應該擬定一份代數課程計畫，這份計畫大致能在這些數量的應用中找到例證。⁶⁰

如果能夠遵循這樣的進程，那將能使生活的不同側面，由數學來聯繫起來了。這裡再次提到過程的概念，也說到過程哲學的連結概念。其次，蔡鈺鑫在〈懷德海論數學教育〉一文中指出：

在〈數學和博雅教育〉中，懷德海指出現代歷史課程之教學，非賴數學去做探究和學習，因歷史學不能純粹以古典學或文字學去做探究和學習，因歷史包含不少之數目和數量的計算問題，例如：形成現代社會力量的數量之統計。若無數學之助，現代歷史之教學即失去不少意義。⁶¹

這裡也不難看出懷德海認為數學在人類知識形成中，佔了極重要的角色，其形成的脈絡造就了歷史。因此在介紹歷史時，不能將數學遺漏。由此也可看出數學在整個學校教育中，佔了極為重要的地位。

總而言之，懷德海相信在一般學校教育的數學教育，是屬於應用性質的。他主張學生應具有掌握數學抽象概念的能力，以及運用邏輯推理的能力，進而將這些數學能力應用到實際日常生活之中。這觀點與台灣的教育改革之九年一貫中，所提到的讓學生具備帶著走的能力是不謀而合的。

懷德海既然強調要將數學概念應用到現實生活之中，為其數學教育之首要目的，因此蔡鈺鑫在其〈懷德海論數學教育〉一文中提到：

⁶⁰ 前揭書， P9。

⁶¹ Alfred North Whitehead：《Essays in Science and Philosophy》，London：Rider & Co.，1948，p183-184。轉引自蔡鈺鑫：〈懷德海論數學教育〉，載於《現代教育》，民81，p90。

他在數學內容上，強調應為學生所能直接欣賞和利用的基本概念，細節宜簡要，注重主要之原則和應用與演練之部分。唯有保住「事實之生息」(breath of reality)，數學在未來的通識教育中才能佔有重要的地位。

62

由此我們可以知道數學的重要性，而該如何將數學的概念透過教育使學生運用到實際生活之中，懷德海這麼主張的：「為了使學生能將數學的概念和邏輯的運用到實際生活之中，懷德海主張數學課程應力求能把握重點、簡要清楚和肯定明白。」⁶³懷德海之所以有這樣的立論，是有感於十九世紀英國數學教育不能致用之損失和浪費。他認為數學本身就是抽象的概念，固然不錯，但卻應該將之和現實生活相結合，直接應用到我們的生活中來。

數學課程宜將重點置於應用最廣、最直接且最重要的真理上。在〈自由與訓練之韻律要求〉(The Rhythmic Claims of Freedom and romance)一文中，懷德海對於數學教學內容亦有若干的主張。他以為在童年，即他所謂「傳奇階段」(stage of romance)，應接觸一些數學概念，雖然此時期主要是浪漫或自由探索之階段，亦應有一些精華(precision)之要素，例如增加基礎算術之過程。⁶⁴在青少年期算術能力則更為加強，學生進一步獲得幾何或代數之基本能力，且獲得一些將所學之數學知識，應用到測量問題和其他與計算有關之科學問題之經驗。⁶⁵經過一年後，學生應明瞭機械、物理、化學、代數和幾何發展之主要原理。⁶⁶這樣的主張，與國內學校數學課程的安排有些類似。在國小階段讓學生接觸一些數學概念，大多都是涉及計算部份的過程；到了國中階段，除了加強計算能力之外，更讓學生進一步去探索何謂代數、何謂幾何，比國小階段更多了些數學定義、定理的介紹；到了高中、職階段，更多了些數學推理與更高階的邏輯思考。只可惜，在升學歷力的魔咒之下，學生像似孫悟空被如來佛戴上了金箍咒一樣，想躲似乎也躲不開，只好犧牲了數學真理的追求，而走向為考試而準備的學習數學。如此，真的

⁶² 前揭書，p90。

⁶³ Victor Lowe：《Whitehead，Alfred North，Encyclopedia of Education》，New York，Macmillan，1969，p553。轉引自蔡鈺鑫：〈懷德海論數學教育〉，載於《現代教育》，民81，p91。

⁶⁴ 懷德海：《教育的目的》吳志宏譯，初版，台北市：桂冠，1994，P29。

⁶⁵ 前揭書，P30。

⁶⁶ 前揭書，P30。

會抹煞人類追求數學的美感，也背離了常道。

至於懷德海對於數學教育目標，雖未作直接、明白之說明，我們大致可歸納成以下幾點的說明：首先，

數學之教學應包括邏輯方法之訓練，以及宇宙之科學和哲學探索之基本概念。因為在自由教育中把數學包含進去的主要目的之一，就是要訓練學生掌握抽象的概念。⁶⁷

爲了教育的目的，數學由數字關係、數量關係以及空間關係所構成，而數字、數量和空間這三組關係是互相聯繫的。在這裡懷德海點出了聯繫的關係，在其過程哲學中也強調融合的概念關係，雖然在文獻的探索中，很難找出懷德海前期教育思想與後期哲學思想的直接關係，但從他的著作中，也可以一點一滴看出其中的一些端倪，只不過是在後期的哲學思想中似乎拋開了數學的存在，但是數學思想長期作用之下，應該還是可以些微看出在後期哲學思想中數學的影子。其次，

數學教師應只教一些簡單之原理，然後詳細說明舉例。任何公式和定理均應透過舉例，來加以應用到實際的生活中。因為數學這種深奧的傾向是特有的災難，它很容易摧毀數學在自由教育中的實用性。⁶⁸

就普世的眼光看來，數學是艱深難懂的，以致於在受過教育的一般人中，數學造詣是很低的，因而也阻礙擴大數學用途的真正困難。如果在數學教育改革浪潮中，要求學習更多的數學是不利的，因此在近年來的數學教育改革中，是被要求學習簡單的數學原理，透過舉例來說明公式和定理，以期將它應用到日常生活之中。這樣的觀點，並未隨著時空的流轉而有所不同，懷德海的觀點與目前推行數學教育的改革者是互相輝映的。最後，數學之教學宜由最簡單的特殊例子之經常使用，再推及一般性概念之掌握。在教育中我們是從特殊到一般的，所以，兒童的教學也應該通過簡單的例題練習來使用這些概念。懷德海認爲：

⁶⁷ 前揭書， P94。

⁶⁸ 前揭書， P92。

數學教育的目標，不應該去盲目地積累專門的數學原理，我們應該避免無意義地積累細節知識。⁶⁹

也就是說，教師應該在課堂上儘可能多舉些例題，而這些例題應該能夠說明數學的主要概念，如此可讓學生對這些例題持續的去研究它們，如此才能避免致命的深奧性，因為數學的一般用處，應該是簡單地研究一些普通的定理，通過實例還給這些定理有利的說明。

至於數學課程的研究對象是什麼呢？懷德海是這麼分析說明的：

一是量及數的概念，因為量的概念和數的概念是所有正確思維的基礎。⁷⁰

二是自然律的概念，在此所說的概念是函數，函數分析跟物理世界中的規律和幾何學中的曲線完全相似。⁷¹

當學生一開始學習代數的時候，或者說在畫圖表的時候，就學習了函數與曲線的關係。這也說明了，數學在我們所處的物理世界是到處存在的。所以才會有「萬物皆數」的這個觀點產生。而圖表在我們現在的日常生活中是隨處可見的，圖表單單是不具什麼意義的，圖表背後的思想，才是取得成效的必不可缺的東西。

三是訓練邏輯的方法，數學它是訓練邏輯方法的主要手段。邏輯的方法不僅僅是關於有效推理形式的單純知識，也不僅僅是貫徹這些形式所必須的思想集中方面的訓練。⁷²

人類的智力演化，在過去不是為推理，而是僅僅為了能有更多的藝術去獵取食物，補充新鮮食品，因此很少人能不經練習就進行嚴格推理的。換句話說，人的

⁶⁹前揭書，P94-95。

⁷⁰前揭書，P96。

⁷¹前揭書，P97。

⁷²前揭書，p98。

推理能力是必須透過練習的，而練習的途徑是透過數學，所以說數學是訓練邏輯方法的主要手段。這也就是為何數學是學校教育的基本教育，為什麼我們要學習數學，而這又何嘗不是數學的價值。由上面的探討我們與現行數學教育體制中的課程標準兩相比較，我們也可以看出相同之處。九年一貫數學學習領域的教學總體目標為：培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力、學習應用問題的解題方法、奠定下一階段的數學基礎、培養欣賞數學的態度及能力。其中，國民小學階段的目標為：在第一階段也就是一至三年級，能掌握數、量、形的概念。在第二階段也就是四至五年級，能熟練非負整數的四則與混合計算，培養流暢的數字感。在小學畢業前，能熟練小數與分數的四則計算；能利用常用數量關係，解決日常生活的問題；能認識簡單幾何形體的幾何性質、並理解其面積與體積公式；能報讀簡單統計圖形並理解其概念。國民中學階段的目標則為：能理解坐標的表示，並熟練代數的運算及數的四則運算。能理解三角形及圓的基本幾何性質，並學習簡單的幾何推理。能理解統計、機率的意義，並認識各種簡易統計方法。⁷³

懷德海亦指出學習數學的方法沒有別的，他只有不斷地使用和演練，直到熟悉成習慣。學生是由簡易和基本的數學概念入門的，再按部就班地進入更廣泛的通論的。「懷德海曾將數學老師比喻成一位牧師，必須面對一群「野蠻人」

(savage)，即數學思想為開化之學童。」⁷⁴言下之意數學教師應以循循善誘的方式，將該童牽引入更文明的數學概念領域之中。而這循循善誘的方式，又何嘗不是透露著過程的概念？在下一節中，我們將進行懷德海重要的哲學思想——過程哲學。

⁷³教育部公佈之《國民中小學九年一貫課程綱要》

⁷⁴ Alfred North Whitehead：〈The Principles of Mathematic in Relation to Elementary Teaching〉，London：Williams & Northgate，1917，p102。轉引自蔡鈺鑫：〈懷德海論數學教育〉，載於《現代教育》，民81，p94。

第四節 過程哲學的基礎與價值

最早提出有機主義者是伯格森⁷⁵（Bergson，1859-1914），他在《創造進化論》中提出此概念，進而影響到懷德海。俞懿嫻在〈懷德海與機體哲學〉一文中說到：

物理學的革命，以及其後量子力學的出現，給懷德海的有機哲學（Philosophy of Organism）提供了重要的依據。⁷⁶

《科學與現代世界》是懷德海系統地提出機體哲學的起點，他對科學唯物論的基本預設…「簡單定位說」，正式加以批判，進而以「機體」的概念取代「物質」的概念，做為自然哲學的新基礎。⁷⁷

《過程與實在》最具體系，最為完整，可說是懷德海有機哲學的代表作。

78

由上面的說明，我們可以知道懷德海的有機哲學的形成經過。他承襲柏拉圖、亞里斯多德以來的西方哲學傳統，吸收愛因斯坦所發表的相對論，以及量子力學以後的科學成果，建構出他的「有機哲學」。也就是說物理學的革命，以及隨之而來的量子力學，為懷德海的有機哲學提供了重要的依據。而我們也深知科學與現代世界是分不開的，因為我們所處的世界就是一個物理的世界，也是一個有機的世界。所以他的有機哲學的起點是《科學與現代世界》，本書從探討近代科學的起源開始，橫跨三個世紀的思想發展，展現了科學革命的形上基礎，並且點出了科學前景的因應之道，也為他的有機哲學埋下種子，直到《過程與實在》的完成，懷德海的有機哲學以然形成，該書可以說是其代表作，為他的有機哲學最為具體性、也最完整。也因為該書中提及了過程，所以說有機哲學也被稱為過程哲學。

懷德海所說的機體哲學是關於現實性的最小構成單位的理論。這種最小的構

⁷⁵ 法國哲學家，生命哲學的主要代表人物。

⁷⁶ 俞懿嫻：〈懷德海與機體哲學〉，載於東海哲研所主編《東海哲學研究集刊第七輯》，p156。

⁷⁷ 前揭書，p157。

⁷⁸ 前揭書，p159。

成單位可以從發生學和形態學角度進行考察。⁷⁹在“發生學的”方式中，各種攝入⁸⁰被展示在它們彼此的發生學關係中。那種實際存在物則被看作一個過程；這裡存在著從狀態到狀態的生長；存在著整合與再整合的過程。最後，終於獲得了一種複雜的由客觀材料構成的統一性，從外觀上看則是一種由各種實際存在物（actual entity (-ies)）、各種永恆客體和命題的對比，並且是可以通過相應的主觀形式的複雜統一性所感受到的。⁸¹

在本體論上，過程哲學堅持過程就是實在，實在就是過程。整個宇宙是由各種事件、各種實際存在物相互聯結、相互包涵而形成的有機系統。自然、社會和思惟乃至整個宇宙，都是活生生的、有生命的機體，處於永恆的創造和進化過程之中。構成宇宙的基本單位不是所謂原初的物質或物質實體，而是由性質和關係所構成的“有機體”。有機體的根本特徵是活動，活動表現為過程，過程則是構成有機體的各元素之間具有內在聯繫的、持續的創造過程，它表明一個機體可以轉化為另一個機體，因而整個宇宙表現為一個生生不息的活動過程。因此，懷德海有時也把自己的這種實在論叫做——有機實在論，認為：用物理學的語言來說，從唯物論向“有機實在論”的這種轉化——正如這種新的觀點可以被稱呼的那樣——是用流動的能量概念取代靜止的材料概念。⁸²

懷德海指出：

根據本體論原則，任何能夠進入和徘徊於世界之中的事物都不會是空穴來風。現實世界中的任何事物都可歸之於實際存在物。它要麼是從過去的實際存在物轉化而來的，要麼是它屬於其合生的那種實際存在物的主觀目標。⁸³

在這裡，懷德海明確地反對道統西方哲學的實體實在論觀點，認為構成世界

⁷⁹ 懷得海：《過程與實在》，楊富彬譯，北京：中國城市出版社，2003，p401

⁸⁰ 懷得海有機哲學的關鍵術語之一，主要指非認識性的把握，有包含、攝住、囊括之意。

⁸¹ 懷得海：《過程與實在》，楊富彬譯，北京：中國城市出版社，2003，p517-518。

⁸² 前揭書，p564。

⁸³ 前揭書，p447。

的最終的基本單位既不是亞里斯多德（Aristotle，約公元前 384 年-約 322 年）哲學意義上的“第一實體”，也不是笛卡兒（Descartes，1595-1650）哲學意義上的“實體”，更不是什麼絕對的“精神實體”。在他看來：「‘實際存在物’——也可稱為‘實際場合’——是構成世界的最終的實在事物。在這些實在事物背後再也找不到任何更為實在的事物了。」⁸⁴那麼，什麼是實際存在物呢？懷德海明確地回答說：「實際存在物的本性惟一地在於，它是某種正在被攝入（prehension）的事物。」⁸⁵

何謂攝入？他說，實際存在物與宇宙中的每一項都有某種完全而確定的聯繫。這種確定的聯繫，就是它對那一項的攝入。所謂攝入有兩種類型，一種是積極的攝入，一種是消極的攝入。消極的攝入是把宇宙中的某一項從積極的促成作用中確定地排除，而積極的攝入則是對進入積極的促成作用中的那一項的確定的包含。這種積極的進入叫做它對那一項的“感受”。其他存在物則被要求來表現任何一項是如何被感受到的。現實世界中的所有實際存在物，相對於某種作為“主體”的既定實際存在物而言，必然地要被那個主體“感受到”，儘管一般說來這種感受是模糊不清的。⁸⁶

有時，懷德海也從實際存在物與主體的關係角度來界定實際存在物。在《過程與實在》中他曾明確地講到：

實際存在物既是從事經驗活動的主體，又是其經驗的超體。這就是主體—超體，而且這種描述中的任何一半都須臾不能離開我們的視野。當考察實際存在物自身的實在的內在構造時，在多數情況下將會使用‘主體’一詞。但是‘主體’永遠應當被理解為‘主體—超體’的縮寫形式。”⁸⁷

有時，他又從實際存在物與事實的關係角度談到，他是這麼說：

⁸⁴ 前揭書，p31。

⁸⁵ 前揭書，p73。

⁸⁶ 前揭書，p73。

⁸⁷ 前揭書，p50。

終極事實就是實際存在物，一切概莫能外；並且這些實際存在物就是經驗的沈澱物，既錯綜複雜又相互獨立。⁸⁸

懷德海認為：

每一種實際存在物都可以用無數方法來分析。把實際存在物分析為各種“攝入”，是一種展示實際存在物的本性中最具體的成份的分析模式，這種分析模式可叫做“區分”。每一種攝入都能在其自身中在現實際存在的各種普遍特徵：它與外部世界是有關聯的。因而它具有某種“矢量特徵”，它涉及到情感、意圖、評價和因果性。⁸⁹

對於實際存在物，不僅可以作形態學的分析，還可以進行發生學的分析。懷德海明確地把實際存在物看作一個過程，正是從發生學意義上來分析的。在他看來，實際存在物是變動不居的，它處於不斷流變的世界之中。根據過程哲學的觀點看，「實際存在物完成之日，就是它毀滅之時。」⁹⁰這種創造物在不斷地毀滅，因而成爲不朽的。「這個過程從發生學上說可以被分析爲一系列預設了它們的先行者的那些次狀態。」⁹¹因此，我們可以再來界定實際存在物，而懷德海這麼說：「實際存在物是一個過程，這裡存在著從狀態到狀態的生長；存在著整合與再整合的過程。」⁹²這樣一來，整個宇宙，包括自然、社會和人的生命，都是由各種實際存在物的發展過程所構成的一條歷史軌跡，它在相當的程度上是前後相繼的。

由上可知，整個宇宙，就是由各種實際存在物發展的過程所構成的，因此，懷德海把宇宙的事物分爲“事件”的世界和“永恆客體”的世界。事件世界中的一切都處於變化的過程之中，各種事件的綜合統一體構成機體，從原子到星雲、從社會到人都是處於不同等級的機體。機體有自己的個性、結構、自我創造能力，

⁸⁸ 前揭書，p31。

⁸⁹ 前揭書，p32。

⁹⁰ 前揭書，p150。

⁹¹ 前揭書，p281。

⁹² 前揭書，p517。

機體的根本特徵是活動，活動表現為過程。過程就是機體各個因數之間有內在聯繫的、持續的創造活動，它表現一機體可以轉化為另一機體，因而整個世界就表現為一種活動的過程。在過程的背後並不存在不變的物質實體，其唯一的持續性就是活動的結構。而這種結構是進化的，所以自然界是活生生的、有生機的。懷德海認為，自然和生命的分開是不能被理解的，只有兩者的融合才構成真正的實在，亦即構成宇宙。所謂“永恆客體”，在懷德海那裡只是作為抽象的可能性而存在，並非人們意識之外的客觀實在，它能否轉變為現實，要受到實際存在客體的限制，並最終受上帝的限制。他認為，事件世界正是上帝從許多處於潛在可能狀態的世界中挑選出來的，因此上帝是現實世界的泉源，是具體實在的基礎。

綜合來說，懷德海所建立的過程哲學，不承認存在著客觀的物質實體，而只承認存在著在一定條件下由性質和關係所構成的“機體”。機體最基本的特色就是活動，而其過程就是活動表現，過程就是機體所有因數之間有內在聯繫的、持續的創造活動，它想要說明的是：一個機體可以轉化成為另一個機體，所以整個世界表現出來的就是活動的過程。他把世界過程看作事件之流，永恆客體則構成可能性的領域，它一旦離開事件流，只是一個抽象世界，只有當它進入時空流後，才成為具體的顯相。在懷德海看來，實在世界就是由具體的顯相組成的，它是全部潛存於可能性領域內的無限多的世界中的一個；實在世界是選擇的結果，最終決定這一選擇的是上帝。他指出，上帝把限制施於無限多的可能世界，才使這個唯一的世界得以實際產生，所以上帝是現實性的源泉，也是限制性的根源。並且，由於限制的根源必定存在於運用了限制才產生出來的世界之外，理性也就不能夠發現這一限制性的根源，因此他強調上帝的存在就是最終的反理性。

1924年，懷德海應邀赴美，任哈佛大學哲學系教授，從此開始了他的專業哲學家的生涯，同一時刻，也開始了他哲學上的重要轉折時期。⁹³這個時期主要的著作有《科學與現代世界》（*Science and the Modern World*, 1925）、《宗教的形成》（*Religion in the Making*, 1926）、《象徵，它的意義和作用》。在他長期體驗中，深刻領會到，任何事物在本質上遵循兩個原則，這兩個原則是（1）變化的原則，（2）永恆的原則。在各個不同的特殊領域中，這兩個原則會以不同的特殊形式

⁹³ 陳奎德：《懷特海》，初版，台北東大，民83，p85。

表現出來，但在其根本的意義上是一樣的。世上萬事萬物的本質都參透了這兩個原則。只有變化沒有守恆，將走向虛無主義；只有守恆沒有變化，宇宙將是死寂一團。

懷德海在《科學與現代世界》中提到：

每一個分析自然的體系都必須面對這兩個事實：變化和持續。另外還有第三個被置於此的事實，我稱作永恆。⁹⁴

因此，我們從這些使人們那裡獲得如下的理論，一種自然哲學必須涉及這五種概念：變化、價值、永恆客體、持續、機體和融合。⁹⁵

爲了導入懷德海所論的價值，以進而展現他哲學轉折的概貌，將對於它的一些術語加以進行一些闡釋。

首先「永恆對象」(eternal objects)，懷德海將它分成兩類：(1) 單純永恆對象，如知覺的東西，色、聲、味等。(2) 複雜永恆對象，如概念的對象：理想的幾何形狀、數學模式等，相當於柏拉圖的「共相」或「形式」一類的對象。⁹⁶

其次是「現實實有」(actual entity)⁹⁷，依照懷德海的說法是「『現實實有』」(也稱「現實事態」)是構成世界的終極的真實事物。在「現實實有」的背後再也找不到任何更真實的事物了。『現實實有』之間是互相有差異的。……然而有一點對所有的都一樣，即終極事實就是『現實實有』，並且這些『現實實有』就是複合的和相互依賴的點滴經驗。」⁹⁸

⁹⁴ 懷德海：《科學與現代世界》，傅佩榮譯，初版，台北立緒，民 89，p106。

⁹⁵ 前揭書，p107。

⁹⁶ 陳奎德：《懷特海》，初版，台北東大，民 83，p90。

⁹⁷ 亦即前面所說的「實際存在物」

⁹⁸ 陳奎德：《懷特海》，初版，台北東大，民 83，p91。

而這兩者之間的關係如何聯繫起來呢？他再引用了另一個術語：「進入」（ingression）來聯繫兩者之間的關係。

所謂「進入」是「某種特別的方式，以這種方式，一個永恆對象的潛在可能性在一種特別的現實實有中獲得實現，它給那個現實實有提供了確定性。」⁹⁹

亦即「永恆對象」「進入」時——空流組合成了「實際存在物」。在這個進入過程中，如同我們看一幅畫的直覺所體驗到的，審美的價值出現了。而之於數學知識，又何嘗不是如此呢？

陳奎德在《懷特海》一書中，也說到了懷德海對於價值的看法，他是這麼說的：「懷德海就是通過審美價值在自然界中的實現，把普通的價值因素引入哲學之中，亦即，任何表現過程也就是實現的價值。」¹⁰⁰而，從這裡似乎可看出懷德海的後期思想是價值，他如是說：「這也是他後期思想的核心：價值是事件內部的恒定部分（實在），而事件的外觀則是川流不息的（過程）。」¹⁰¹學數學有何用？在於學習數學本身的價值。而如何讓數學呈現其價值？應當可從教師的教授數學知識的過程中呈現。

懷德海認為價值的產生，主要在「攝受」¹⁰²的歷程。每一「實際體」¹⁰³之如何「攝受」可視之為價值如何產生，故價值不是純主觀的，也不是純客觀的，不是純屬於心的，也不是純屬於物的，而是客合一，心物合一的。理由是，每一「實際體」之成為實際體，一方面有物理的攝受，一方面又有概念的攝受，一方面有客觀的材料，一方面又有主觀的形式。必這兩方面，即理想狀態和現實狀態，有一真實的結合，然後「實際體」或價值才會產生。¹⁰⁴

⁹⁹ 前揭書，p91。

¹⁰⁰ 前揭書，p92。

¹⁰¹ 前揭書，p93。

¹⁰² 在此所說的「攝受」與之前所說的「攝入」是相同意思。

¹⁰³ 亦即前面所說的「實際存在物」。

¹⁰⁴ 郭郁智：〈懷德海哲學及其教育思想之研究〉，載於《教育研究》，7期，民88，p401。

再進一步說明，所謂價值，就是現實，也就是「實際」。價值並不是單純的理想，不僅存在思想中，更需要是理想狀況與現實狀況有一真實的結合，如此價值才會產生。而廣義的價值是指一般的價值，不是指特殊的價值。所謂一般價值就是天地不虛生萬物，每一物的生成即為價值的所在。因此，存在與價值是不分離的，也就是說：存在即為價值。至於價值的產生，主要在「攝入」的歷程，主客合一，心物合一，有客觀的材料，又有主觀的形式。所以說，我們要如何讓數學呈現其價值？應當可從教師的教授數學知識的過程中呈現。「攝入」是在探討主動與被動的關係，所謂主動就是攝取，而被動就是接受。如果學生在學習數學的過程可以採取主動，那他將能夠攝取到數學所帶出知識的內涵，爾後他將接受數學所呈現的真理，也就能夠明白學習數學的價值何在了。

在本章中，我們大略說明了懷德海的生平，由於家族之故他對教育有其獨特的見解，更因為他的哲學轉向，使他由一個數學教育者轉向成爲一個哲學家，更進而發展出他自己的哲學思想，因而提出了他的重要思想——過程哲學。接下來，我們將來探討數學在人類知識的形成過程中，是以何種角色出現，因而使得數學在各國的學校基本教育中是必備的課程之一。在本章中，我們整體說明懷德海整個的教育思想，在下一章中，我們期望縮小範圍來單獨談他的數學教育思想。更希望從他的數學教育思想中，爲目前如火如荼進行的數學教育改革提出一些建議及看法。

第三章 數學形成過程及其意義

我們要如何取得關於外部世界的知識呢？每個人都不得不依賴於自己的感官知覺——聽覺、視覺、觸覺、味覺和嗅覺——來進行日常生活中的事務，並從中享受某些快感。但是感官知覺是有限的，有時感官知覺會演變成感官迷惑，顯示出感官知覺的不可靠。懷德海也認為，光和聲的傳播原理，表明色和聲都是第二性質，它們並非真正存在於客體中。由此，他認為那種想從感官知覺出發理解事物本質的觀點是膚淺的，是在認識論上迷失了方向；另一方面，他認為，由於永恆物體在空無所有的空間中運動的圖景已被一種不斷活動的觀念所代替，因此，實物已被視為和能同樣的東西，而能是純粹的活動。由於任何局部的振盪都會震撼整個宇宙，所以就不應當把任何事物看作局部的、獨立存在的東西。他認為環境一直滲入到每一事物的本質。而古希臘人早已領悟到這一點，因此求助於數學來研究自然現象成了古希臘的傳統。不管是托勒密（Ptolemy，168）的地心說抑或是哥白尼（Nicolaus Copernicus，1473-1543）的日心說¹⁰⁵，追求數學上的簡單和完美，成了探求自然知識的動力。笛卡兒（Descartes，1595-1650）為科學建立了基於數學的嚴密方法論，而現代科學之父伽利略（Galileo，1564-1643），他的科學研究綱領的前提是：自然之書是用數學這門語言所撰寫出來的。身為偉大數學家的牛頓（Isaac Newton，1642-1727）他的偉大巨作就是冠以《自然哲學的數學原理》¹⁰⁶（Mathematical Principles of Natural Philosophy）。19世紀的偉大數學物理學家詹姆斯·克拉克·麥克斯韋（James Clerk Maxwell，1831-1879），所提出的麥克斯韋理論是由麥克斯韋方程組成，而麥克斯韋方程組揭示人的感官所不能及的電磁世界，充分顯示了數學的穿透力。相對論¹⁰⁷和量子論¹⁰⁸，是二十世紀兩項重大科學的發現，其基本物理思想和數學工具之間有著奇妙的對應。由這樣的脈絡發展下來可以發現，數學是人類創造的工具，而數學在探求知識方面的確

¹⁰⁵ 地球繞日的學說，又稱地動說，把整個天文學帶進科學革命的洪流。

¹⁰⁶ 在科學的歷史上，是經典力學的第一部經典著作，也是人類掌握的第一個完整的科學的宇宙論和科學理論體系，其影響所及遍佈經典自然科學的所有領域，在其後的300年時間裏一再取得豐碩成果。從科學研究內部來看，《自然哲學之數學原理》示範了一種現代科學理論體系的樣板，包括理論體系結構、研究方法和研究態度、如何處理人與自然的關係等多個方面的內容。

¹⁰⁷ 由愛因斯坦（Albert Einstein 1879 - 1955）所提出，即物理學裏的觀念，須以七的量子度步驟來給予定義，是二十世紀物理學中，一個最基本、最具影響力的貢獻。

¹⁰⁸ 由卜朗克（Max Planck，1858-1947）在1900年提出，其對熱力學中的黑體輻射深入研究，發現黑體對能量的吸收與發射必須有能量的最小單位而非連續的，稱為能量量子。

起了作用。在懷德海後期哲學轉向中，他希望將自然科學與人文科學之間作一個融合，不要那麼的分隔開來，而數學的確若隱若現般地再自然科學與人文科學之間搭起了一座橋樑。

大衛·希爾伯特（David Hilbert，1862-1943），現代首屈一指的數學家，1900年在國際數學大會上演講中說道：數學是一切關於自然現象的嚴格知識之基礎。我們有充分理由補充說，對於許多重要的現象，數學提供了我們所能有的唯一知識。本章將先探討數學知識的形成，數學在知識的探索上究竟佔了何許的份量？在人類發展思想史中到底又扮演了什麼樣的角色？與哲學的發展又有著什麼樣的關係？再從懷德海來探討數學教育，身處十九世紀時期英國的數學哲學家，在當時的社會氛圍下，對教育提出了自己個人的見解，對於數學教育他又是什麼樣的想法？與我們當今社會沸沸揚揚的數學改革有著什麼樣的關聯呢？而他對於數學史又有著什麼樣的看法？數學史在數學教育上又可扮演什麼樣的角色？因此數學史的探討將是本章中最後討論的對象。

第一節 人類知識的形成

認識的過程，並不是只是簡單的反映過程，而是人與環境相互作用的過程，當然其中有反映的成分。但更含有主體建構的成分；認識的結果並不是純粹客觀的，而是依存於認識的主體，它包涵著認識主體的經歷、經驗等諸多主觀因素在內；認識的結果也不是純粹社會歷史性的，它還包涵著表證個體特徵的特殊性和情境性。它是社會歷史認識和個人經驗的統合。

對知識形成的這些看法就構成新的知識形成觀。把新知識形成觀與傳統知識形成觀進行對照，可以發現：兩者的共同點在於都堅持“實踐—認識—實踐”的認識路線，堅持“存在決定意識”的唯物主義原理；而兩者的區別在於傳統知識形成觀強調認識的客觀性和普遍性，而新知識形成觀在承認認識的客觀性的前提下還強調認識者在認識過程中的主體性，在承認認識的普遍性的前提下還強調不同認識者在認識過程中的個體差異以及由此導致的認識結果的個體差異。

按照新的知識形成觀，我們似乎可以作出這樣的結論：就總體而言，“知識”是人們通過學習，發現及感悟到的對世界認識的總和，是人類認識的結晶；就個體而言，知識是一種有組織的經驗、價值觀、相關資訊及洞察力的動態組合，它所構成的框架可以不斷地評價和吸收新的經驗和資訊。

這樣形成的知識有三個特點。其一，知識的內涵是複雜的，既有可編碼、可記錄的內容，也有隱含的、難以記錄的內容。可編碼、可記錄的內容主要是那些客觀性較強的內容，而隱含的、難以記錄的內容主要是一些帶有個體特徵的內容。其二，知識既有其內在的、穩定的結構，也有其動態的、可變的一面。而這種結構和內容的變化正是通過學習來實現的。知識的內在的、穩定的結構是由認識客體的客觀性所決定的，知識的動態的、可變的一面是由於認識過程中主觀因素的加入而決定的。其三，知識既有其通用性、普遍性的一面，也有其特殊的、存在於某一情境的一面。因此，知識是帶有“獨特性”的。人的認識的發展與他的身心素質和親身經歷密切相關。每個人的身心素質、經歷和當時所處的具體環境都是不同的。因而，即使吸收了同樣的資訊，每個人對所吸收的資訊所賦予的“意義”都是不一樣的，即每個人所獲得的“知識”都是“獨特”的。

在傳統知識形成觀的影響下，人們認為獲得知識的途徑只有一條，那就是從學校、老師那裏通過教材、教學傳授得來。當然，這確實是一條重要的途徑，但顯然，又不是唯一的途徑。還有一條更重要的途徑，那就是從實踐中學習，即個人通過親身實踐中有目的的深入的觀察、體驗，經分析、綜合、判斷、推理，發現事物的本質和規律從而獲得知識。而就懷德海來說，他是這麼來談知識論的，他說：

懷德海的「知識論」(epistemology)可分四方面：(1) 有關認識活動的認識論 (the theory of knowing)；(2) 關於自然科學、社會科學、人文科學的知識理論 (the theory of knowledge)；(3) 機體知識論：此乃作為形上學內部的某些側面的知識論，亦即認識論與知識論都是構成形上學的某個面向，而包含於形上學的那種認識論與知識理論，也可說，認識活

動與知識乃是存在的某些面向；(4) 價值知識論。¹⁰⁹

從以上這段文字，我們可得知懷德海的知識論的特色。我們先從認識的起源說起，懷德海的認識起源偏向於人類的直接經驗或直觀或原始的身體的感受，但他不像洛克、休謨的經驗論是侷限在感官經驗之中，也不似康得所說的心靈是具備有先驗的時空形式，也不似笛卡兒所說的與生俱來的先天觀念。換句話說，懷德海是駁斥康德的心靈為自然立法的先驗綜合說、笛卡兒的先天知識說的觀點。再來我們可以來分析懷德海的經驗區分，它不只包含過去已經經驗到的事物和可以經驗到的事物，更重要的是他還包含了正在進行經驗中的經驗活動。最後我們可以說懷德海是強調客觀性的知識。

在認識論上，過程哲學也提出了一些獨特的看法。我們知道，近代哲學研究的中心問題，就是認識論，而認識論的基本問題就是主體與客體之間的關係問題，並認為主體與客體的區分是認識發生的前提。懷德海是這麼認為：認識論問題和實在論問題，如果被互相孤立起來，那就不可能得到適當的解決。認知者和被認知者、知識與對象、理念與事物的二元論，正是他認為近代哲學乃至整個西方哲學所具有的弊端。所以，他想利用攝入概念來消解這種二元對立。

以攝入概念為出發點，懷德海所提出的一個重要觀點是，作為主體的自我是在過程之中出現的突現物。傳統西方哲學認為，在實際進行認識和取得知識之前，必須先有認識者。但懷德海的觀點恰與此相反。他認為：執行攝入功能者就是主體為攝入活動的產物。用懷德海的話來說就是：感受者（feeler）是從自己的感覺活動中出現的統一體。同時，根據過程哲學的基本觀點，懷德海指出傳統哲學中的“主體”一詞是人們所熟悉的哲學概念，但容易引起誤解，認為使用“超體”（supersubject）一詞來表達有關的思想更好。因為：

這種作為主體的超體正是產生那些感受的過程的目的。各種感受不能與它們所要達到的目的相割裂；這種目的就是感受者。各種感受以感受者為目標，作為它們的目的因。各種感受就是其所是，以便使它們的主體可能是

¹⁰⁹楊士毅（2001），《懷德海哲學入門——超越現代與後現代》，台北：揚智，p.19。

其所是。¹¹⁰

至於認識的客體，懷德海也不同意傳統西方哲學認識論的基本觀點，也就是把認識客體當作是外在在認識活動和認識者的自在對象。反過來，懷德海認為，任何東西，只要是在主體身上能夠喚起某種特定的活動，它就能夠構成認識的客體。換句話說，在認識的過程中也生成了客體，而客體是與主體現實地發生關係的客觀對象，或者說是主體的認識活動所指向的對象。

就主、客體的關係來說，懷德海認為，每一種實在的經驗場合皆是一個主體，場合的主體性隨場合的存在而存在。實際存在物從主觀性上永遠消逝，在客觀性上卻是不朽的。消逝中的現實性得到了客觀性，同時卻失去了其主觀的直接性。打個比方說，我們的那些死去的祖先，作為直接的主體他們無疑已經死去了，然而作為客體卻始終存在，永垂不朽，仍受到我們的理解，並對我們發生著現實的影響。因而懷德海寫到：客體是自然中永遠不會消逝的原素。

這樣看來，在認識過程現實地發生之前，根本無所謂主體和客體之分。主體與客體是在實際存在物的相互作用過程中逐步生成的，主體和客體的關係以及主體對客體的認識也是一個逐步生成的過程。正是在這個意義上，懷特海明確地批評近代以來在西方哲學中佔主導地位的主客二元對立的思惟模式，指出：

全部近代哲學都是圍繞著如何根據主詞和謂詞、實體和性質、殊相和共相而描述世界的困難為轉移的。其結果永遠與我們的直接經驗相抵觸。¹¹¹

他認為，這種傳統哲學只能把我們引到某種孤立的實體之中，不能使我們更清晰地認識真實世界。而實際上，一種實際存在物被另一種實際存在物“攝入”或“感受到”，是一種完全的相互作用。而且，懷德海認為：

¹¹⁰懷得海（2003），《過程與實在》，楊富彬譯，北京：中國城市出版社，p.406。

¹¹¹前揭書，p.89。

主體的意識是以經驗為先決條件的，而不是經驗以意識為先決條件。¹¹²

這同近代哲學所強調的認識主體必須具有自我意識為前提才能進行認識的觀點形成鮮明的對照。他還強調，某物要成為現實的認識對象，就必定意味著所有現實事物都同樣要成為客體，同時還意味著，全部現實物都要成為主體，每一個主體都要攝入它由之產生的宇宙。

就身心關係而論，在懷德海看來：

物質活動和精神活動難解難分地相互交織在一起。這同笛凱爾明確堅持的身心二元論及洛克的有關論點也大相徑庭，因為在他們看來，物質世界與精神世界是相互獨立的兩個世界，儘管這兩個世界具有難以說清的偶然聯繫。¹¹³

過程哲學則把物質和精神、身體和心靈看作是同一個過程中的兩個要素，認為兩者不可分割地聯繫一起，這對我們深刻理解身心關係具有重要啟發。

在過程哲學中，知識被當作過程之中的仲介狀態，所以他如是說：

認識屬於一種主觀的形式，這種主觀形式或者被客觀內容吸收到滿足的主體性之中的那種功能所承認，或者不被其所承認。¹¹⁴

對於“感受”，過程哲學也有自己的獨特理解。它把“感受”歸之於整個現實生活世界，而不僅僅是主體的感受。懷德海指出：

“感受”可從以下幾個方面來考察：（1）所感受到的實際場合；（2）所感受到的永恆客體；（3）所感受到的各種感受；（4）它自身的主觀的強度

¹¹²前揭書，p.95。

¹¹³前揭書，p.594。

¹¹⁴前揭書，p.293。

形式。在這種合生的過程中，這些不同的感受會繼續達到更寬廣的整體感受的普遍性。¹¹⁵

從所有方面看，感受都是確定的，具有確定的主體、確定的原初材料、確定的否定性攝入、確定的客觀材料和確定的主觀形式。¹¹⁶

感受是主體內在地包含的一個方面，因此，“感受不能從包含著它的實際存在物中抽象出來。這種實際存在物叫做感受的‘主體’。正是借助於其主體，感受才成為一種事物。”¹¹⁷

在《過程與實在》中，懷德海專闢一章討論“高級經驗狀態”。他說，有意識的知覺和直覺判斷構成了比較性感受和理智性感受。意識包含在直覺判斷的主觀形式中。在經驗中，意識借助於理智性感受而產生，並與這類感受的種類和強度成正比。意識是經驗的頂峰，它只是偶然地被獲得，而不是經驗的必然基礎。而感受的材料既可以是實際存在物，也可以是命題。「當感受的材料是命題時，這種感受可叫做“信念”，或者如通常所說包含著“信念”要素。」¹¹⁸懷德海認為：「在實踐中，至少對人類來說，只有改變了的感受才能獲得意識，而簡單的物質感受決不會有意識。意識產生於整合的高級狀態，並且是用更大的清晰性和明確性對這些狀態的說明。」¹¹⁹對於認識結果的檢驗問題，懷德海提出一個非常重要的思想：「恰當的檢驗不是最終的檢驗，而是過程的檢驗。」¹²⁰

這在現代西方哲學中可謂獨樹一幟。眾所周知，科學理論的檢驗問題是現代西方科學哲學中的一個熱門話題。此外，「從認識論角度看，過程哲學還試圖建構一種對純粹感受的批判。」¹²¹為此，懷德海詳細考察了感覺、知覺、判斷、直

¹¹⁵前揭書，p.386。

¹¹⁶前揭書，p.405。

¹¹⁷前揭書，p.406。

¹¹⁸前揭書，p.489。

¹¹⁹前揭書，p.434。

¹²⁰前揭書，p.24。

¹²¹前揭書，p.207。

覺、因果理念、審美體驗和符號等在認識過程中的作用，並且考察了有意識的知識的正確性何以保證的問題。

從以上的說明分析，我們可以知道懷德海對於知識論的見解，他希望以攝入概念為起點，作為主體的自我是在過程之中出現的突現物。在認識的過程中，存在著主體與客體之分，透過攝入的概念我們可以認識我們所想要的知識。也就是在人類知識的形成過程中存在著主體與客體。一直以來，這主體一直是學習者，而客體卻隨著歷史的發展而有所不同，從最先開始所探討的自然，由我們感官知覺去感覺、去求得知識，但後來我們發現感官知覺是會產生錯誤的，於是會加入了檢驗，因而探討的範圍由自然到自然科學，而數學是自然科學的基礎。

爲了試著改善我們的物質生活，我們被迫擴展關於外部世界的知識。這樣我們必然將感官用到極限。但不幸的是，對我們來說，感官不僅是有限的，而且是具有欺騙性的。¹²²如何避免錯覺和錯誤的直覺，我們應該求助於甚麼呢？最有效的答案應該就是：運用數學。而實際關於我們所處的物理世界，數學所揭示的遠遠比穹蒼的奇觀更令人驚異。¹²³自然界的呈現，是被理性地設計的，所有在我們眼前的自然現象，都遵照著一個精確不變的計畫，這可以說是數學計畫。人類的心智具有高超的能力，如果將這種能力用來研究自然，理性的數學模式便能被辨識出，而且變得可理解。¹²⁴

十七、十八世紀的數學家 and 物理學家如何從感官所知覺到的現象開始，例如天體的運動和大地上的運動，建立了輝煌的數學化理論，由此擴展了人類關於這些現象的知識，糾正並解釋了一切錯覺，使我們對大自然的計畫和運轉有所理解。¹²⁵我們可以清楚地看到人對客觀物件的認識，就是知識的形成，並不是傳統觀念所說的那樣簡單和單純，其中與數學也息息相關。

¹²² M·克萊因（2005），《數學與知識的探求》，劉志勇譯，上海，復旦大學出版社，p.22。

¹²³前揭書，p.38。

¹²⁴前揭書，pp40-41。

¹²⁵前揭書，p.137。

第二節 數學在人類知識形成中的角色

重大之物理現象根本就不是感官知覺能達到的。感官沒有向我們顯示地球繞其軸旋轉並繞太陽公轉，也沒顯示維持行星繞太陽公轉的力之本性。電磁波能使我們收到幾百甚至幾千英里外發射的廣播和電視節目，但是感官對於電磁波本身卻是一無所知。這也使我們領悟到感官知覺的有限性。而一切關於自然現象的嚴格知識之基礎在於數學，因此，之於一些重要的現象，數學提供了我們所能有的唯一的知識。事實上，一些科學的分支只是由一套數學理論組成，並試以幾個物理事實。這與學生在學校裏所獲得的印象相反，數學不單只是一系列的技巧。數學向我們顯露了關於某些我們還未知的，甚至從未臆測過的重要現象，在某些情況下甚至顯露與知覺矛盾的道理。它是我們關於現實物理世界之知識的精華。它不但超出了知覺的領域或大大優於知覺。懷德海這麼說：

數學在嚴格的自然科學領域中所發揮的作用已經為其重要性提供了實例。¹²⁶

托勒密在其〈大綜合論〉的第三卷中說，在天文學中，我們應該尋求盡可能簡單的數學模型。在當時，托勒密所說的數學模型，被基督教士界接受為真理。而托勒密理論的偉大意義在於：這理論證明的數學在將複雜甚至神秘的現象合理中的力量。理解大自然甚至發現完全未知的現象，從它的第一個輝煌的成功中獲得了動力和鼓勵。¹²⁷托勒密在探索數學如何揭示和確定我們關於物理世界的知識的過程中，我們可以看到人們接受了行星運動的日心說理論，其原因是來自於相信是數學的理由。¹²⁸

現代物理學是以希臘幾何學為基礎而肇始的，因此它依賴於精確的數學概念。¹²⁹

¹²⁶懷得海（2003），《過程與實在》，楊富彬譯，北京：中國城市出版社，p.9。

¹²⁷ M·克萊因（2005），《數學與知識的探求》，劉志勇譯，上海，復旦大學出版社，p.71。

¹²⁸前揭書，p.92。

¹²⁹懷得海（2003），《過程與實在》，楊富彬譯，北京：中國城市出版社，p.551。

希臘數學的成就是輝煌的，它為人類創造了巨大的精神財富，不論從數量還是從質量來衡量，都是世界上首屈一指的。比希臘數學家取得具體成果更重要的是：希臘數學產生了數學精神。即數學證明的演繹推理方法。數學的抽象化以及自然界依數學方式設計的信念，為數學乃至科學的發展起了至關重要的作用。而由這一精神所產生的理性、確定性、永恆的不可抗拒的規律性等一系列思想，則在人類文化發展史上佔據了重要的地位。

為了試圖改善我們的物質生活，我們被迫擴展關於外部世界的知識。如此我們將感受到感官會被用到極限。而不幸的是，對我們而言，感官不單單是有限的而且還具有欺騙性。¹³⁰因此，為了避免錯覺和錯誤的直覺產生，我們應該怎麼辦呢？最有效的答案便是運用數學。¹³¹而關於我們所處的世界是一個物理世界，這世界充滿了數學，而數學所要表示的遠比它所表示穹蒼的奇觀更令我們感到驚異。¹³²大自然是如此理性地設計的，所有的自然現象都遵循一個精確不變的計畫，而這計畫可以說就是數學計畫。人類的心智具有高超的能力，如果能將這種能力應用於研究自然，那麼理性的數學模式就能被辨識出，而且變得是可理解的。¹³³

而要使數學有力量，那它必須在一個抽象概念中涵蓋那個概念所涉及的所有物理顯現的本質特徵。¹³⁴因此，數學最顯著的特徵是其運用的推理方法。它的基礎是一套公理，並運用演繹推理於其上。公理一詞（axiom）來源於希臘文，意思是「認為有價值」。希臘人引入了公理概念，即如此自明的真理，沒人能夠懷疑它。¹³⁵而數學的另一重要特徵——符號體系的運用。儘管一頁數學符號很難說是吸引人的，但毫無疑問的是，如果沒有符號體系，數學將迷失在文字的荒原中。在大量的日常簡寫中，我們都用符號。例如我們用 N.Y. 來表示紐約。儘管這些符號的意義需要學習，毫無疑問符號體系的簡潔有助於理解，而用語言來表達將會

¹³⁰ M·克萊因（2005），《數學與知識的探求》，劉志勇譯，上海，復旦大學出版社，p.22。

¹³¹ 前揭書，p.38。

¹³² 前揭書，p.38。

¹³³ 前揭書，pp40-41。

¹³⁴ 前揭書，p.48。

¹³⁵ 前揭書，p.48。

使頭腦負擔過重。¹³⁶

我們的目的，是想看看數學是如何穩健地影響現代世界，不僅做為我們的不完美的感覺的校正方法，而且尤其作為擴展人類所能獲得的關於世界的知識的方法人類所能獲得的。¹³⁷

伽利略說，數學原理是上帝用來撰寫世界這本書的字母表；若沒有借助數學原理，那麼連一個字都不可能理解，人類會徒勞地在黑暗的迷宮中遊蕩。事實上，只有通過數學表達的物理世界的性質才是可知的。宇宙在結構和運作上都是數學化的，大自然根據不可阻擋、不可變的規律來運行。¹³⁸所以說我們的科學和技術中有太多的依賴於數學。¹³⁹

在西方文明裡，數學一直有一種主要的文化力量。幾乎每個人都知道，數學在工程設計中具有其重要的實用價值。但是卻很少人懂得數學在科學推理中的重要性，以及它在重要物理科學理論中所起的核心作用。至於數學決定了大部分哲學思想的內容和研究方法，摧毀和建構了諸多宗教教義，為政治學說和經濟理論提供了依據，塑造了眾多流派的繪畫、音樂、建築和文學風格，創立了邏輯學，而且為我們必須回答的人和宇宙的基本問題提供了最好的答案，這些就更加鮮為人知了。作為理性精神的化身，數學已經滲透到以前由權威、習慣、風俗所統治的領域，而且取代它們成為思想和行動的指南。但無論如何，邏輯與數學的重要性就如柏拉圖所認為的：「沒有數學，就沒有真正的智慧。」¹⁴⁰甚至就如 Pierre Boutroux 所說的：「邏輯是不可能戰勝的，因為要反對邏輯還得使用邏輯。」¹⁴¹

作為一種寶貴的、無可比擬的人類成就，數學在使人賞心悅目和提供審美價值方面，至少可與其他任何一種文化門類媲美。

¹³⁶前揭書，p.51。

¹³⁷前揭書，p.52。

¹³⁸前揭書，p.233。

¹³⁹前揭書，p.231。

¹⁴⁰陳奎德（1994），《懷特海》，初版，台北：東大，p.25。

¹⁴¹前揭書，p.25。

在教科書和學校的課程中，都將「數學」看作是一系列毫無意義的、充滿技巧性的程序。把這樣的東西作為數學的特徵，就如同把人體結構中每一塊骨骼的名稱、位置和功能當作活生生的、有思想的、富於激情的人一樣。

在人類文明中，數學如果脫離了其豐富的文化基礎，就會被簡化成一系列的技巧，它的形象也就完全被扭曲了。由於外行人很少使用數學技巧及其知識，因此他們對這些通常顯得枯燥無味的東西很反感。這樣一來產生的結果是，對於數學這樣一門基礎性的、富有生命力的、崇高的學科，就連一些受過良好教育的人也特無視甚至輕蔑的態度。的確，對數學的無知已經成了一種社會風尚。

由以上的說明，我們可以看出：數學在人類發展史中，的確佔了極大的分量，因此數學教育會被列為學校教育中的基本教育，不是空穴來風。在這波教育改革的浪潮裡，數學教育改革也在國內掀起了波瀾。數學教育的目的何在呢？普世的眼光，認為數學僅僅是一項工具，一個加減乘除的工具，而此項工具內容是可被電子計算機所取代的，那我們為何要學與生活脫節了的學科呢？這似乎與我們在本節所探討出的結論不相符合，那問題究竟出在哪裡呢？是否可以透過什麼樣的哲學基礎予以解答呢？那就先讓我們從懷德海的數學教育說起。懷德海畢生從事教育，在英國時其任教的是數學，所研究的也是數學，因此在下一節中，我們將探討懷德海對數學教育的看法，並希望從中能夠對目前台灣數學教育所面臨的困境及其變遷有所建議。

在〈數學和博雅教育〉中，懷德海指出現代歷史課程之教學，非賴數學去做探究和學習，因歷史學不能純粹以古典學或文字學去做探究和學習，因歷史包含不少之數目和數量的計算問題，例如：形成現代社會力量的數量之統計。若無數學之助，現代歷史之教學即失去不少意義。¹⁴²

這裡也不難看出懷德海認為數學在人類知識形成中，佔了極重要的角色，其形成的脈絡造就了歷史。因此在介紹歷史時，不能將數學遺漏。由此也可看出數學在

¹⁴² Alfred North Whitehead: 《Essays in Science and Philosophy》, London: Rider & Co., 1948, p183-184。轉引自蔡鈺鑫：〈懷德海論數學教育〉，載於《現代教育》，民81，p90。

整個學校教育中，佔了極為重要的地位。

第三節 數學知識的形成

數學是真正存在的基礎，是永恆實有的。柏拉圖強調數學的重要性，把它構想成關於抽象的，非物質的理想理念的更普遍系統的組成部分。¹⁴³對於柏拉圖來說，數學不僅是理念和感覺之物之間的中介；數學秩序事實在本性的真正描述。¹⁴⁴通過感官認知的事界是混雜的，變化多端，永不停息，是不可靠的。真正的世界是理念的世界，不可變不朽壞。不過這理念世界不能由感官而只能由心智來把握。觀察是無用的。¹⁴⁵亞里斯多德認為我們從世界中抽象出對於我們所感知的某一類物質客體共同的東西，如三角形、球形、樹葉與山。¹⁴⁶我們必須從對我說可知觀察的事物開始，然後依次進展到那些從本性上說更清楚更可知的事物。¹⁴⁷亞里斯多德斷言數學抽象是從物質世界中得出的。¹⁴⁸

對於笛卡兒來說，整個物理宇宙是一架巨大的機器，根據自然的規律來進行運轉。這些自然規律可以通過人類的理性，尤其是數學的推理來加以發現。¹⁴⁹因此，笛卡兒明確強調了數學推理之重要。¹⁵⁰而且，笛卡兒也認為，感官知覺即感官錯覺。¹⁵¹

對於霍布斯（Thomas Hobbes，1588-1679）而言，頭腦組織和聯繫那些關於物理客體的斷言，當發現規則性時，就獲得了知識。數學活動就是如此產生這樣的規則性。所以頭腦的數學活動產生關於物理世界的真正知識，數學知識是真理。事實上，實在只有通過數學形式才能被我們所知。¹⁵²

¹⁴³ M·克萊因（2005），《數學與知識的探求》，劉志勇譯，上海，復旦大學出版社，pp2-3。

¹⁴⁴前揭書，p.44。

¹⁴⁵前揭書，p.2。

¹⁴⁶前揭書，p.4。

¹⁴⁷前揭書，pp4-5。

¹⁴⁸前揭書，p.45。

¹⁴⁹前揭書，p.6。

¹⁵⁰前揭書，p.232。

¹⁵¹前揭書，p.233。

¹⁵²前揭書，p.7。

對於洛克（John Locke，1632-1704）¹⁵³而言，認為無論在思辨領域，還是在道德實踐領域，都不存在作為知識源泉和基礎的天賦觀念，必須把天賦觀念作為知識的主要障礙進行批判。他認為人生之初，心靈猶如一張白紙，沒有任何標記。只有後得的經驗才在這張白紙上寫上觀念的文字。他說，我們的全部知識是建立在經驗上面的；知識歸根究底都是起源於經驗。因此，他表示甘願充當一名“小工”，為建造知識大廈掃除障礙，準備地基。因此，他認為真理就在於符合事物之真實的知識。¹⁵⁴而基本的數學觀念是由心智構造的，最終卻可以追溯到經驗。¹⁵⁵他論證聯繫這些觀念從而確立真理。洛克偏愛數學知識，是因為他覺得數學所處理的觀念最清楚最可靠。數學通過展示觀念間的必然聯繫而將它們聯繫在一起，心智對此聯繫理解得最透徹。¹⁵⁶因此他認為：真理只存在于命題中，推進知識和正確判斷的途徑是直接或通過中介觀念比較命題，以斷定它們之間一致或不一致。¹⁵⁷而且洛克肯定數學和道德學知識不僅有必然性，而且還是符合於實在本質的實在知識。在他看來，數學的基本觀念數與形和道德學的基本觀念善與惡、正義與不義都是樣態性的觀念。樣態觀念是心靈自由集合一定的簡單觀念構成的，這些簡單觀念就構成了它們的實在本質，在邏輯上表現為規定其本質的定義。樣態觀念本身就是原型，它們不但不必符合於客觀存在的事物，相反，倒是應用主觀構成的樣態觀念去衡量客觀的各種情狀。如果它們符合於這些觀念的實在本質和定義，便賦予它們以相應的名稱。例如三角形狀的觀念便是一種實在本質。據此把符合這種實在本質的圖形稱為三角形。就數學而言，不是觀念必須符合於實在，而是事物與觀念相符合。道德學亦是如此。它的真理與確實性在於我們構成的道德觀念自身，然後以此去衡量道德行為的善與惡、正義或不義。這樣，數學與道德學才是實在的知識，才有可能成為科學。這種知識論為德國哲學家康德的先驗唯心主義播下了種子，成為所謂“哥白尼式轉向”的先聲。洛克在論知識中得出的結論不符合他的經驗主義原則，但提出的問題是深刻的。

¹⁵³ 是近代英國唯物論哲學家、政治家、經濟學家和教育家，英國經驗心理學思想的創始者，也是近代歐洲聯想主義的倡導者。

¹⁵⁴ M·克萊因：《數學與知識的探求》，劉志勇譯，上海，復旦大學出版社，2005，p9。

¹⁵⁵ 前揭書，p9。

¹⁵⁶ 前揭書，p9。

¹⁵⁷ 前揭書，p9-10。

幾何學和代數中的數學聯繫，抽象的道德原則，以及上帝的存在都可以由推理的論證來證明，至於外在事物的存在，當其實際呈現於感官時，當然可由感覺知曉。這些都是基本的真理，對於我們的生存和幸福至關重要，不管是今生還是來世，不過它們不會將我們遠遠帶到存在和生命的廣闊海洋。¹⁵⁸

對於大衛·休謨¹⁵⁹（David Hume，1711 - 1176）而言，他宣稱：純數學定理不過是同義反覆的陳述，是以不同的方式對相同事實的不必要重複。¹⁶⁰對於“感覺印象從何而來”這一認識論的根本問題，休謨持“存疑”態度。他聲稱：「至於由感官所發生的那些印象，據我看來，它們的最終原因是人類理性所完全不能解釋的。我們永遠不可能確實地斷定，那些印象還是直接由對象發生的，還是被心靈的創造能力所產生，還是由我們的造物主那裡得來的。」¹⁶¹這種既不用物質對象的作用來說明感覺印象，也不用心靈或上帝的作用來說明感覺印象，是休謨的懷疑論即不可知論的基本觀點。休謨認為人類的理智有兩種作用，即推斷各種事實和比較各個觀念。同樣，人類的知識也分為兩類，一類是關於實際事情的知識；包括自然科學、自然哲學和歷史學等，這是建立在經驗基礎上的因果性知識；另一類是抽象科學和證明的知識，即數學知識。他認為這後一類知識的命題，只憑思想的作用就可以推導出來，無需依據宇宙中任何地方存在的任何東西。顯然，在對普遍必然的數學知識的解釋中，休謨實際上對唯理論和先驗論作了讓步。

對於伊曼努爾·康德¹⁶²（Immanuel Kant，1724 - 1804）而言：將數學真理的存在作為其哲學的中心支柱。¹⁶³「數學為什麼是可能的」，康德給出的解答是，我們的心智擁有空間和時間形式，獨立於經驗。康德稱這些形式為直覺。它們是純粹先天的知識方式，不依據經驗或思想。¹⁶⁴在康德所處的時代，歐洲哲學思想

¹⁵⁸ 前揭書，p.10。

¹⁵⁹ 是哲學家當中一個最重要的人物，因為他把洛克和貝克萊的經驗主義哲學發展到了它的邏輯終局，由於把這種哲學作得自相一致，使它成了難以相信的東西。休謨的主要哲學著作《人性論》（*Treatise of Human Nature*）是1734年到1737年間，他在法國居住的時候寫的。

¹⁶⁰ M·克萊因（2005），《數學與知識的探求》，劉志勇譯，上海，復旦大學出版社，p.14。

¹⁶¹ 休謨（1980），《人性論》，關文運譯，北京：商務印書館，民69，p101。

¹⁶² 德國哲學家。德國哲學革命的開創者，德國古典哲學的奠基人，近代西方哲學史上二元論、先驗論和不可知論的代表，有重大貢獻的科學家。

¹⁶³ M·克萊因（2005），《數學與知識的探求》，劉志勇譯，上海，復旦大學出版社，p.18。

¹⁶⁴ 前揭書，p.16。

主要有兩種重要理論：由洛克、休謨等人發展出來的經驗主義，以及笛卡兒等人的理性主義。經驗主義者認為人類對世界的認識與知識來源於人的經驗，而理性主義者認為人類的知識來源於人自身的理性。而康德則在一定程度上結合了兩者的觀點。康德認為知識是人類同時透過感性與理性得到的。經驗對知識的產生是必要的，但不是唯一的要素。把經驗轉換為知識，就需要理性，而理性則是天賦的。人類透過範疇的框架來獲得外界的經驗，沒有範疇就無法感知世界。因此範疇與經驗一樣，是獲得知識的必要條件。但人類的範疇中也有一些可以改變人類世界觀念的因素，他意識到，事物本身與人所看到的事物是不同的，人永遠無法確知事物的真正面貌。

以上的說明，從古希臘到現代數學史的研究揭示：數學的基礎曾經受到三次令人嚴重困擾的危機，每一次危機中都有相當大的一部分曾被認為業已確立無疑的數學成為可疑的並且急待改造。數學基礎的第一次危機起源於公元前五紀，這次的危機是由這樣一個意想不到的發明引起的：同類幾何量中彼此之間並非都是可以通約的；例如已證明：一個正方形的對角線和邊不包含公共的度量單位。由於畢氏學派的量的推論是在所有的同類量可通約這個根深蒂固的直觀信念上建立的，同類量存在不可通約的發現具有很大的破壞性。¹⁶⁵第一次危機的結果，是嚴格的實數理論的建立。數學家回答了“什麼是連續性？”這個古老的哲學問題。¹⁶⁶

數學基礎的第二次危機是隨著十七世紀末牛頓和萊布尼茲發現微積分而產生的。我們曾看到其後繼者如何為這一新數學工具的威力和應用的可能所陶醉，他們沒能充分地考慮該學科基礎的堅實性，以致於不是用證明為結論辯護，而是用結論為證明辯護。隨著時間的推移，矛盾和悖論越來越多，數學基礎的一次嚴重危機變得明顯了。使人們越來越認識到：分析的大廈是建立在沙灘上的，而後來在十九世紀早期，柯西對解決這項危機採取了第一個步驟：用精確的極限法代替模糊的無窮小法。再後，由魏爾斯特拉斯及其追隨者做出了所謂分析的算術

¹⁶⁵ Howard Eves (1993), 《數學史概論》，歐陽絳譯，第一版，台北市：曉園，p.611。

¹⁶⁶ 張景中 (1996), 《數學與哲學》台北九章，民 85，p.67。

化。¹⁶⁷第二次危機的結果，是微積分的嚴密基礎的建立。數學家掌握了描述運動與變化的有效方法。徹底弄清了“芝諾（Zeno of Elea）悖論”，回答了“運動是怎麼回事？” 這個古老的哲學問題。¹⁶⁸

數學基礎的第三次危機是由 1897 年的突然衝擊而出現的，這次危機是由於在康托爾的一般集合論的邊緣發現倍論造成的。由於那麼多數學被集合概念滲透並且因此在實際上能把集合論當作基礎，集合論中悖論的發現自然地引起了對數學的整個基本結構的有效性的懷疑。¹⁶⁹第三次數學危機，涉及到了“數學自身的基礎是什麼？” 在這次“危機”產生前後，一些卓越的數學家捲入了關於數學本質問題的激烈爭論之中。危機的結果，產生了“數學基礎” 這個至今尚在蓬勃發展的數學領域。¹⁷⁰

數學家看到第三次危機涉及數學的根本，必須對數學的哲學基礎加以嚴密的考察，於是興起了涉及數學基礎的三種主要的哲學或思想的學派：（1）邏輯主義學派：以羅素和懷德海為主要倡導者；（2）直觀主義學派：以布勞爾（Brouwer，1881—1966）領導；（3）形式主義學派：由希爾伯特發展起來的。¹⁷¹

邏輯主義的主題自然地從數學基礎盡可能追溯到最深遠的程度上的努力中發生。我們已經看到：這些基礎是怎樣建立在實數系上的，然後，它們如何從實數系追溯到自然數系，且從而進入集合論的。因為類的理論乃是邏輯的必不可少的部份，將數學歸結為邏輯的思想肯定就會產生。¹⁷²對邏輯主義致命打擊的是哥德爾的不完全性定理，它証明了從邏輯並不能推出算術的正確性來，顯然把數學全部化歸為邏輯徹底失敗了。

直覺主義有著長遠的歷史，它植根於數學的構造性當中。布勞爾是從哲學中得出自己觀點的，基本的直覺是按照時間順序出現的感覺，而這形成自然數的概

¹⁶⁷ Howard Eves (1993), 《數學史概論》，歐陽絳譯，第一版，台北市：曉園，p.611。

¹⁶⁸ 張景中 (1996), 《數學與哲學》台北九章，民 85，p.67。

¹⁶⁹ Howard Eves (1993), 《數學史概論》，歐陽絳譯，第一版，台北市：曉園，pp611-612。

¹⁷⁰ 張景中 (1996), 《數學與哲學》台北九章，民 85，p.67。

¹⁷¹ Howard Eves (1993), 《數學史概論》，歐陽絳譯，第一版，台北市：曉園，p.615。

¹⁷² 前揭書，p.615。

念。數學概念進入人腦是先於語言、邏輯和經驗的，決定概念的正確性是直覺，而不是經驗及邏輯。這些充分暴露了他唯心主義和神祕主義的思想傾向。布勞爾認為數學直覺的世界和感覺的世界是互相對立的，日常的語言屬於感覺世界，不屬於數學。數學獨立於語言存在，而邏輯是從屬於語言的，它不是揭露真理的工具，而是運用語言的手段。正因為如此，數學中最主要的進展不是靠邏輯形式完美化而得到，而是靠基本理論本身的變革。布勞爾主要從事拓撲學的研究，他運用單形逼近的方法證明了維數的拓撲不變性，這在數學上是個了不起的成就，是極重要的拓撲方法。布勞爾像康德一樣，認為數學定理是先驗綜合真理。

形式主義的奠基人是希爾伯特，是二十世紀最有影響的數學家，他提出了大部分形式主義觀點，但他並沒有把它們絕對化。他的觀點有些地方同邏輯主義、直覺主義有著共同之處。這反映出某種矛盾，應該說這種矛盾是數學家的哲學思想上的矛盾。關於數學中的存在，他認為不限於感覺經驗的存在。在物理世界中，他認為沒有無窮小、無窮大和無窮集合，但是在數學理論的各個分支中卻都有無窮集合，如自然數的集合，一個線段裡所有點的集合等等。這種不是經驗能夠直接驗證的對象，他稱之為“理想元素”。引進理想元素的方法在數學中其實由來已久，比如代數中虛數的引進，幾何中無窮點的引進，微積分中無窮小與無窮大的引進等等。但是理想元素的引進必須不把矛盾帶到原來的較窄狹的領域內。由於理想元素不能靠直觀經驗來驗證，只能靠邏輯來驗證，因此合理性的唯一判據就是無矛盾性。這種無矛盾性的真理觀實際上是形式主義基本論點。

行文至此，數學在歷史的脈絡中是如何被定義及看待的呢？我們可以這麼看待：

- (1) 古希臘的亞里斯多德把幾何和算術都看作是經驗的。
- (2) 高斯把算術看作是先驗的，幾何是經驗的。
- (3) 黎曼將某些關於空間的幾何命題也看作是先驗的。
- (4) 康德提出數學命題是先驗的綜合判斷。
- (5) 邏輯實證主義者和波普爾完全將數學排除在經驗科學之外。

(6) 拉卡托斯認為數學既不是理性的，也不是經驗的，而是擬經驗的 (quasiempirical) 理論。¹⁷³

而 16、17 和多數 18 世紀的數學家的工作是一種宗教追求。探求自然的數學規律是一種獻身行爲，會揭示上帝的創造物的榮耀和偉大。數學知識，即關於上帝的宇宙設計的真理，變得和聖經的任何一行一樣神聖不可侵犯。人類不能希冀像上帝自己同樣清楚地理解神聖的計畫。但人至少可以懷著謙卑和謙遜尋求接近上帝的心智，從而理解上帝的世界。¹⁷⁴

隨著數學不斷退居於越來越抽象的思想更高地帶，它返回面對時卻具有對於分析具體事實不斷增長的重要性……這一悖論現已完全確立，即極度的抽象是控制我們思考具體事實的真正武器。¹⁷⁵因此，在知識的探求上你永遠少不了數學。而探索數學可以從數學史出發，因數學史的發展也是數學知識形成的脈絡，所以數學史一定在數學教育中佔了一席之地，接下來我們將來探討數學史在數學教育的重要性。

第四節 數學史在數學教育的重要性

從上一節的敘述說明中，可以知道數學在知識形成過程中佔了極重要的角色。而克萊因在《數學與知識的探求》一書中也說到：

懷德海也在其《科學與代世界》(Science and the Modern World)，強調了數學在探索物理世界中的重要性。¹⁷⁶

隨著數學不斷退居於越來越抽象的思想更高地帶，它返回面對時卻具有對於分析具體事實不斷增長的重要性……這一悖論現已完全確立，即極度的

¹⁷³ 舒煒光、邱仁宗 (1991)，《當代西方科學哲學述評》台北：水牛，p.171。

¹⁷⁴ M·克萊因 (2005)，《數學與知識的探求》，劉志勇譯，上海，復旦大學出版社，p.47。

¹⁷⁵ 前揭書，p.52。

¹⁷⁶ 前揭書，p.52。

抽象是控制我們思考具體事實的真正武器。¹⁷⁷

而我們所處的世界是屬於物理的世界，既然數學在探索物理世界中佔了重要性的地位，那麼數學在我們所處的現實世界中就是息息相關了。但為何世人常認為數學是與現實世界分隔開來的呢？想必是我們的數學教育在其實施過中少了介紹數學史的這個步驟。

無獨有偶，教育部在國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域的基本理念中，也提到了數學史重要性，在教師教學裡，引進與主題相關的數學史題材，對學童的學習會有很正面的意義，尤其能協助學童將抽象觀念具體化。因為不論在科技應用層面或思想突破方面，數學重要概念的演進確有其實用面的考量，因此提供具啟發性的數學史方面的讀物實屬必要。¹⁷⁸

而數學史的研究，已有很久的歷史，如何在數學教育中運用數學史的知識，充分發揮數學史的作用和價值，則是當前數學教育改革面臨的一個重要課題。1998年4月20日至4月26日，由國際數學教育委員會（ICMI）發起，在法國馬賽附近的 Luminy 鎮舉行了題為“數學史在學教育中的作用”國際研討會。張奠宙在〈重視“科學史”在科學教育中的應用〉一文中指出：

在數學教育中，特別是中學的數學教學過程中，運用數學史知識是進行素質教育的重要方面。目前數學史在數學教育中的應用已經進入系統地研究階段，並在一些國家和地區進行實踐性的操作。¹⁷⁹

但是，在我們現行教育中，數學史的知識僅作為“閱讀資料”，放在一邊，並沒有和實際教學融為一體，實在有些可惜。如果能夠將數學史的知識放在教學中，相信其中與生活或是其他學科領域的連結一定可以更明顯的，對現行教育與

¹⁷⁷ 前揭書，p.52。

¹⁷⁸ 教育部公佈之《國民中小學九年一貫課程綱要》

¹⁷⁹ 張奠宙：〈重視“科學史”在科學教育中的應用〉，載於《數學思想的傳播與變革：比較研究國際學術討論會》論文，武漢，1998年10月。轉引自傅海倫：〈從“賈憲三角”看數學史在數學教育中的作用和價值〉，載於《數學傳播》27卷1期，民92年3月，p85。

學生的學習，勢必是一股助力，接下來我們以費波那契兔子的問題為例。

該問題是指某人有一對兔子飼養在圍牆中，如果它們每個月生一對兔子，且新生的兔子在第二個月後也是每個月生一對兔子，問一年後圍牆中共有多少對兔子？該問題記載於公元前 13 世紀義大利數學家雷奧納多·費波那契(Leonardo Fibonacci, 1170-1250)¹⁸⁰ 的名著《算盤書》¹⁸¹ 在 1228 年的修訂本中，並在原書中對此作了分析：第一個月是最初的一對兔子生下一對兔子，圍牆內共有兩對兔子。第二個月仍是最初的一對兔子生下一對兔子，共有 3 對兔子。到第三個月除最初的兔子新生一對兔子外，第一個月生的兔子也開始生兔子，因此共有 5 對兔子。繼續推下去，第 12 個月時最終共有對 377 對兔子。書中還提出，每個月的兔子總數可由前兩個月的兔子數相加而得。據載首先是由 19 世紀法國數學家呂卡將級數 $\{U_n\} : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$ $\{U_{n+1}=U_n+U_{n-1}\}$ 命名為斐波那契級數，它是一種特殊的線性遞歸數列，在數學的許多分支中有廣泛應用。1680 年意大利——法國學者卡西尼發現該級數的重要關係式 $U_{n+1}U_{n-1}-U_n^2=(-1)^n$ 。1730 年法國數學家棣莫弗給出其通項表達式，19 世紀初另一位法國數學家比內首先證明這一表達式，現在稱爲之爲比內公式。1963 年美國還創刊《費波那契季刊》來專門研究費波那契數列¹⁸²。

爲什麼要舉上列的例子呢？因爲它是一個綜合型的例子。據說澳洲原本是沒有兔子的，因此澳洲政府買了兔子，使他們的國家擁有了兔子，但是兔子繁殖的能力實在是太驚人了，不消一年，澳洲已經有兔子爲患的問題了。從這裡就教學角度而言，從數學方面可以教授數列，也可從生態問題來談，更可藉此問題激發學生去搜集有關數學史的故事與由來。

所以說，如果能將數學應用到生活之中，不難發現自然界中到處可見數學的

¹⁸⁰ 是中世紀最傑出的數學家。他早年到各地旅遊，經比較後確認印度—阿拉伯數碼及其記數法在實用上最爲優越，回到家鄉後寫成《算盤書》〔*Liber abaci*, 1202〕。

¹⁸¹ 這部書是講算術和初等代數的，雖說實質上是獨立的研究，但也表現出受花拉子米〔*Al-knowarizmi*〕和阿布·卡密耳〔*Abu Kamil*〕的代數學的影響，這本書也爲中世紀數學的長期停滯與靜默帶來一線曙光。這部書對印度—阿拉伯數碼的詳盡敘述和強列支持，是有助於將這些符號引進歐洲的。

¹⁸² 義大利數學家雷奧納多·費波那契(Leonardo Fibonacci, 1170-1250)提出，此一數列有一特性，每個數字都是前面兩個數字加起來的和。

存在，也不難發現到處可見上述的費波那契數列的蹤跡。樹枝上的分枝數，多數花的瓣數都是費波那契數列中的數：火鶴 1、百合 3，梅花 5，桔梗常為 8，金盞花 13，……等等。費波那契數列的數也出現在松果上。一片片的鱗片在整粒松果上順著兩組螺線排列：一組呈順時針旋轉，另一組呈反時針」。向日葵也是一樣，常見的螺線數目為「34 及 55」，較大的向日葵的螺線數目則為「89 及 144」，更大的甚至還有「144 及 233」。這些全都是費波那契數列中相鄰兩項的數值。

從費波那契數列可推導出黃金比例，而何謂黃金比例呢？0.618…這個數字就叫作黃金比例（也有人稱之為黃金數）。在費波那契數列中，某個數字除以下一個數字的比值，愈到後面愈接近黃金比例。一般認為，長方形的寬與長的比例是黃金數的話（比 A4 的紙還窄 3 公分），最為漂亮，在藝術家的畫作中，很多也都是以黃金數的型態出現。人的身材也要符合黃金分割(即上半身為下半身的 0.618 倍)最為漂亮，這也就是為什麼模特兒或是愛美的女性踩著高跟鞋，想要創造出美麗黃金數。由此可看出，生活中真的是處處與數學息息相關，只是我們的教育，在傳授數學知識時，多了一些與生活相關的例子，相信害怕數學的人就會減少許多的。

大部分的國家都認為，數學是基礎教育的重要學科，學好數學、教好數學，在數學教育中培養創新人才是數學教育的主題，可是，怎樣才能真正教好數學、學好數學，卻是數學教育的一大難題。而數學史是研究數學本身歷史的一門科學，它能夠充分揭示數學概念、方法的來龍去脈和本質特徵，完整反映數學家解決問題的思想方法，是數學家們為探求真理勤奮努力的真實寫照。所以可以從數學使這部分下手，從全面提高學生綜合素質的目的出發，結合中學數學的教學，實際在中學數學教學中融入數學史知識，對於幫助學生理解和掌握所學內容，激發學習興趣具有重要意義。

前面也提到，當前數學教育改革面臨的一個重要課題，如何在數學教育中運用數學史的知識，充分發揮數學史的作用和價值。如果能夠結合具體的概念、定理、數學家的事迹和有關歷史事件，說明在數學分析教學中融入數學史的知識，

相信對數學分析課程的教學和學生學習的重要性都將帶來助力。所以數學課程的改革，應該充實數學史知識，所以說每一位數學教師，都應瞭解數學史，只可惜在這功利主義掛帥且在應試教育依然領先的時代裡，這似乎仍是每一位數學教師該思考的一個議題。

歷史的經驗也告訴我們，教師把數學發展的歷史滲透到教學之中，對於擴大學生的知識面，開拓學生的智力，發掘和培育優秀人才，有時可以起到很大的作用。因此，充實數學教師的數學史知識，可圍繞教學視要求而進行。例如現行微積分教科書中，有數十處直接或間接與數學史知識相關聯。衆所周知，微積分誕生於 17 世紀下半葉，它的創立是人類認識史上的一件大事，是人類思維發展的偉大成果，為自然科學高度發展提供了條件。恩格斯(Friedrich Engels, 1820—1895)¹⁸³說：「社會一旦有技術上的需要，就會比 10 所大學更能把科學推向前進。」微積分的創立主要是為了處理 17 世紀科技領域歸納出來的課題，例如，當時科學界重視研究光學和透鏡設計，這就需要研究光線射入透鏡的投射角，而投射角是光線與曲線的法線所成的角，由於法線與切線是相互垂直的，所以歸結為求曲線的切線問題。它是引入微分學三類問題之一¹⁸⁴，由此勾劃出微分學的知識框架。教師若把這些歷史知識滲透到講授中，展現在同學眼前的是：概念形成的時代背景，歷史淵源，科學價值和深遠影響，從而講解時有可能做到每章乃至每節用提出問題、揭示矛盾，以探索解決問題的方法調動同學的思維活動，從而明確問題從何而來，又將引向何處，布下了強烈探求知識的境地，促進了知識熱的升溫。

所以，微積分的出現，帶給後人寶貴的資產，也為科學的進步更邁向一步。吳讓泉等人在《數學的智慧之光》一書中說到：

微積分的先驅及其創立者不但給人類留下了寶貴的文化遺產，也給後人樹立了光輝榜樣。微積分的創立是人類的一大發明。從歷史上看，微分起源於求速度、切線、最大值與最小值等新方法的研究！積分起源於求面積、體積、弧長以及變力作功等新方法的研究。微積分的建立不僅使數學科學

¹⁸³ 馬克思主義的創始人之一。

¹⁸⁴ 另兩類問題分別是求速度、求最大最小值

的發展大大向前跨進一步，使數學家們在認識和方法論上都產生了一個質的飛躍，以致掌握了集線的概念以及研究它的方法，而且為近代科技的發展提供了有力的工具。¹⁸⁵

由於微積分在運算上的完整性以及應用的廣泛性，使它成為解決眾多問題的重要且有利的數學工具。¹⁸⁶

如果能夠結合課堂教學，以科學家成長過程、優良品德、治學態度教育學生，效果很好。像是可以介紹 19 世紀英國數學家兼物理學家格林（G·Green，1793—1841）的生平：格林童年輟學，青年時代沒有機會受高等教育，他一面在父親的麵包鋪的磨坊做工，一面堅持自學。他汲取法國學者用數學分析研究電磁學獲得成功，寫成《論數學分析在電磁學理論中的應用》的論文。由於格林當時還是個不知名的“小人物”，論文無法發表，在他人資助下，勉強印了 100 份，分寄給一些學者，可惜沒有引起任何人的重視。格林沒有因此而沈淪，反而激起他進大學深造的熱切願望。為了籌積學費，他毅然把父親留給他的麵包鋪變賣了，又用了 3 年時間補習，才取得了康橋大學入學資格。這年他已經 40 歲了。此後經過 4 年艱苦努力，格林取得了碩士學位和留校任教的資格，由他培養了一批精通數學的物理學家，形成了獨具風格的康橋學派。今天大學教科書裏的“格林公式”、“格林函數”正是當年格林奮發進取而得來的重要成果。格林的事跡說明，只要奮發努力，執意追求，總會成功的。當學生瞭解定理、原理誕生的時代背景、艱難歷程，以及科學家為此付出的心血汗水之後，再去學習和品味定理的內涵，感受會大不一樣，展現在他們眼前的不再是孤零零的符號和枯燥的推演，而是有血有肉的科學寶庫中的珍品，從中還能悟出一些閃光的東西，激勵他們更加自覺地掌握前人經過奮鬥而得來的知識。曾經有位學生，在學習上一度遇到困難，想放棄求學。他從格林的事跡中受到啓發，不但打消了放棄的念頭，而且振奮精神，學習成績也迎頭趕上。著名思想家培根（F·Bacon，）說明：“讀史使人明智”。相信這樣的例子，在其他學科中比比皆是的，也可見歷史的痕跡是不容抹滅的。所以，為了講好課，為了讓學生更了解數學的概念，教師自我充實數

¹⁸⁵ 吳讓泉等（2005），《數學的智慧之光》初版，台北市：新潮社，2005，p.104。

¹⁸⁶ 前揭書，p.105。

學史知識是非常必要的。

我們可以由蕭文強在〈數學史和數學教育：個人的經驗和看法〉一文中，所提到的觀點來下本節的結論：

運用數學史於數學教育的理由：

- (1) 引發學習動機，從而使學生（及教師本人）保持對數學的興趣和熱情。
- (2) 為數學平添“人情味”，使它易於親近。也使學生明白前人創業的艱辛，並且明白到不應把自己碰到的學習困難歸咎於自己愚笨。同時，教師也可以從歷史發展中的絆腳石瞭解學生的學習困難，可以參考歷史發展作為計畫課題安排的指引。
- (3) 瞭解數學思想發展過程，能增進理解。對比古今，能更好明白現代理論和技巧的優點。
- (4) 對數學整體有較全面的看法和認識。
- (5) 滲透多元文化觀點，瞭解數學和社會發展的關係，並提供跨科合作的通識教育。
- (6) 數學史提供學生進一步探索的機會和素材。¹⁸⁷

由以上的說明，從歷史的過程當中，又看到了數學的本質。歷史，是一個過程，從過程中，我們可以看見數學。懷德海對數學史的部分，也提出看法，他說：

能夠概括學生所學概念的方法是利用數學史，不能把數學史看作是一種數據和人名的單純集合，而應該看作是對一般思潮的揭示，這種揭示使得這些學科成為最初設計時的興趣的對象。¹⁸⁸

從以上文字不難發現，懷德海對於數學史在數學教育上的重要。他認為要將

¹⁸⁷ 蕭文強（1992），〈數學史和數學教育：個人的經驗和看法〉，《數學傳播》，1992年9月，16卷3期，pp1-2。

¹⁸⁸ 懷德海（1994），《教育的目的》吳志宏譯，初版，台北市：桂冠，1994，p.98。

學生所學的概念加以概括的方法，是要透過數學史的，不能把數學史當成只是數據和人名的單純集合，由上一節所探討知識的探求中，也可以看出數學在人類發展史上佔了極重要的位置，也可以說反映了當時的思潮。而在台灣教育中，數學是以何種姿態展現呢？我們將從台灣教育的流變來談，依然來看其在流變過程中所帶出來的涵義。

第四章 台灣數學教育的流變

台灣在發展教育之時，凡百學科，其中最為迫在眉睫且不可或缺的是在於普及數學教育，讓更多人能夠獲得學習數學的機會，爭取學習機會均等(Equity Issues)正是數學全民化的首要工作。數學教育的重要性在於爭取學習機會均等，以期能學得好的數學，同時獲得高階思考的能力，一直到八十年代，才首度由文明國家先進人士明確的提出。

回顧先進國家的政府，在本世紀初普遍設立公立小學，把實施義務教育作為民主開明的政策，到了二次大戰後，再將義務教育提高至初級中學，數學就與語文同時設為必修的科目。數學教育在基礎教育中的地位與重要性，似乎是可見一斑。然而，或許因為數學教育普及化的理想是奠立在義務教育的現實措施之上，而義務教育又多是在國家民主化的政策下，倉卒成軍，為養成中、小學教師而設置的公費師範教育，在擴充期多未能質、量兼顧，只求有足量的教師，而無暇顧及教學知能的培育，以致於中、小學生在課業上常未能得到起碼的教導與啟發，這個情況連心理學大師皮亞傑（Piaget,1896-1980）¹⁸⁹都不以為然，且為文仔細分析。數學科更是如此，常常以與日常生活禮儀教養無關為理由而略過。世人對數學表現出的恐懼與排斥，不是沒有原因的。如何讓學生減少恐懼與排斥，更讓學生了解數學在生活中的地位，我們可以透過懷德海的過程哲學來加以說明。

第一節 台灣教育的變遷

民國三十八年，中華民國政府從大陸播遷來臺灣。為了厚植國力、統一國家、及增進國民的福祉，中華民國政府積極在臺灣推展教育，並做了一連串的教育改革。大家都同意教育的功能在於培養人才，而人才為國家社會發展與改革的基礎。教育既要培養政治、軍事人才，也要培育經濟、文化人才。因此發展與改革教育，成為政府在臺灣推動政經、軍事與文化建設的必要工作。經過數十年的努力，臺灣的教育已有驚人的進步與發展，不僅帶動了經濟的高度成長，也促進了

¹⁸⁹ 瑞士的教育心理學家,他的認知發展理論(cognitive development) 是近代認知心理學中最重要理論之一。

政治的民主發展。臺灣所創造的經濟奇蹟，早已享譽國際。近年來的政治民主化成效，也日受國際推崇，這一切成果都要歸功於政府對教育的重視。

回顧臺灣過去教育的發展，政府與民間都扮演了相當稱職的角色。雖然因種種無法預測或控制的原因，使得教育發展遭遇不少困境與問題，但在政府與民間通力合作之下，困境與問題大都能一一解決。當然每一個時代與環境都有其特殊需要，也都會遭遇到一些特殊的問題，今後臺灣的教育如何去解決問題並滿足未來社會的需要，我們應未雨綢繆。

近代臺灣漢人社會由草莽而進文明，始於清代。清朝時期，官方除設府學、縣學外，民間尚有書院、社學、義學、私塾等教育機構，以宣揚教化、培養人才。1887年起，曾開辦西式學堂。1895年中日甲午戰爭後，清廷依馬關條約將臺灣割讓給日本。日本對臺殖民時，一方面實施同化教育、逐步打壓原有的傳統漢文教育，另一方面自1898年起對臺人實施西式的初等教育。之後，雖然也發展中等教育與高等教育，但臺灣人民子女接受教育的機會卻十分有限，顯然低於日本人。總之，日本殖民期間，教育制度上採隔離方式，教育政策上則反映出歧視與不平等。

民國三十四年二次大戰結束，日本投降並將臺澎交還給中華民國，雖然學校校舍、設備、師資仍多沿其舊，但國民政府在教育政策上則取消差別待遇，在教育制度上則改行中國體制，實施三民主義教育。

而近代中國學制，在清末嘗試引入西式學堂，1902年起正式改行西式學制，初期主要模仿日本制，民國以後改仿美國制。民國十一年實施的新學制，即是引入美國式的六／三／三／四制。民國三十八年中央政府遷臺，仍行該制，之後一直沿用至今無結構性的改變。

1950年代由於外在政治環境的影響，我國教育強調國家意識的形成與民族精神的培養。民國四十六至六十九年期間為配合經濟建設與發展，教育部門強調人力資源的規劃與開發。1980年代隨著經濟結構的自由化、國際化，產業結構由勞

力密集轉趨資本與技術密集，以及政治制度的日漸民主開放，教育制度也進入轉型與改革的年代。

由上可知，臺灣的教育在此半世紀中，可劃歸為四個典範¹⁹⁰，一為殖民主義典範（民國四十六年以前），二為實用典範（民國四十六年至六十九年），三為民主典範（民國六十九年起），四為重建典範。此四大典範雖然各有其萌芽、發展與興盛時期，然並不代表此四大典範彼此可以截然分開。當第二典範興起之際，第一典範「可能」已被推翻、修正或取代，但並不表示第一典範已完全消失、終止或不再出現。同理，當第二典範取代第一典範而成為正統典範，也不表示第三典範根本尚未存在。我們只能視典範的轉移，為教育活動的另一思潮和脈動的變動；同理，當新典範興起而取代前一典範時，被取代的典範呈顯蕭條，而取代者就某種面向而言，彰顯某種程度的「進步」。¹⁹¹

殖民主義的教育特色顯露於教育活動與目的不在發展受教者的主體性；相對的，教育只是統治者用來促使殖民地人民便於統治的工具。考台灣歷史，由於長期飽受外來政權統治，致教育活動難以隱藏各統治者之經濟或政治觀，反而壓亦屬於台灣人自己的政治、經濟與文化觀，使得台灣的文化價值觀有意無意的淹沒於無形，鮮具自主特色。台灣受外來政權統治，首推荷蘭人。當時荷蘭人透過宗教的力量，懷柔與教化台灣人民，俾便於管理與統治臺灣人民。當時荷蘭統治下的台灣教育，嚴格論之，並未具主體性，其教育目的不在開展台灣人民自我反省與自我實現的能力，而是為了便於荷蘭人統治台灣、利用台灣經濟資源、以及安定台灣社會。1662年二月，荷蘭人終於結束了長達三十八年的對台統治，其後，台灣雖然曾被鄭成功祖孫三代統治二十二年之久；直至1874年，台灣又再度開啓外來民族——日本——殖民的序幕，終於在1895年，台灣合法的淪為日本的殖民地，台灣人民也開始接受二度的殖民教育——皇民化教育¹⁹²。日本統治台灣

¹⁹⁰ 乃孔恩於其《科學革命的結構》（*The Structure of Scientific Revolutions*）一書中所提出者。他指出「凡持相同典範之研究者，其在該社群中所採用之規則亦相同」

¹⁹¹ 溫明麗（1999），〈當代臺灣教育哲學典範之轉移〉，載於《哲學雜誌》第29期，1999年8月，pp50-51。

¹⁹² 日本統治者切斷一切屬於台灣本土的「資源」（含物質、人力與價值觀），企圖將台灣人變成徹頭徹尾的「日本人」；說日本話、寫日文、持日本文化思想等，表現出一副與日本人完全相類的行為與價值觀。

的五十年間，歷經兩次世界大戰，至 1945 年九月二日，日本正式投降後，台灣才脫離日本的統制。但台灣光復後，台灣仍接受國民政府自福建等內地「移植」而來的政策，其形式上似已自立自主，但實質上，台灣仍處於殖民地位，仍處於仰國民政府鼻息地位。1949 年國民黨政府正式退守台灣，但由於在政治和經濟上均無法抵擋戰爭產生的混亂與顛沛，於是自 1951 年開始，台灣開始接受美國長達十五年之久的美援。台灣在美援時期，也難免受到美國的影響，再加上台灣的留學生由英國轉向美國，台灣的「美國化教育」興起。當台灣教育「美國化」之後，除了教育思想美國化之外，教育制度、教學方法與課程，也以美國為其馬首是瞻。如能力本位課程目標與評量；兼重認知、情意和技能的「布魯姆」(Bloom) 教學內涵；延長義務教育的政策等，均顯露台灣教育沾染的美國色彩。長此以來的殖民統治，已使台灣教育埋下了根深蒂固難以連根拔起的殖民心態。

實用典範是採行為學派的論點，其立基於自然科學的「實證性」、「他律性」與「絕對客觀性」原則，並完全接受自然科學律則的普遍有效性與實用性觀點。但其教育思想並非臺灣土生土長的產品，乃由美國空飄來臺的舶來品，因此仍然只是殖民典範的另一種變形。其教育特色在於透過「科技」去「適應」週遭的人與事物。1970 年代，台灣的教育政策、目的、課程和內容，一概以追求能力本位、講求效率和實用等為依據，真切言之，此乃呼應當時美國社會所熱中的「績效責任、功績制度」之實用性、科學性與效率性教育思潮。從殖民心態走向自主性的過程中，可能必須通過觀摩期或混沌期。在此過渡時期中，最簡易的方法就是模仿。模仿，一則可以免除自信心不足的困惑；再則，可以為下一階段的成長奠定初基。此乃何以台灣教育自殖民典範走向實用典範之際，仍沾染不少殖民色彩之故，因而實用典範仍然只是另一種殖民典範的變形。實用典範的教育思潮表現於教育活動上較明顯的措施，如：「追求精緻化的卓越發展」、「提升教育水準」、「擴增學生數量」、「擴大研究所在職進修管道」、「有效籌措教育資源」等精進國力競爭、帶動社會發展、手握科技利器、學校企業手牽手、全民素質大躍升、班級精緻化等政策與活動。¹⁹³

¹⁹³ 參見：(1) 教育部 (1998)，《愛的啓航——新課程的天空》，1998，pp10-15。

(2) 教育部 (1999)，《教育改革成果報告：跨世紀教改工程》，1999。

(3) 教育部 (1999)，《邁向教育新世紀：全國教育改革檢討會議》，1999。

民主典範的教育特色著重人類「主體性」之開顯，強調透過理性以宰制社群或文化的樣貌。呈顯出民主典範特質的台灣教育活動有：(1) 對考試領導教學之省思；(2) 對適性教學與學生個別差異的重視；(3) 採行教育權「下放」或「鬆綁」的政策；(4) 擴充教育決策參與面的廣度；(5) 鄉土教育納入正式課程的多元文化措施；(6) 兩性平權教育的呼籲等。以上敘述特色也顯現於上一世紀末的教育改革重點中，如：「以多元入學方式暢通升學管道」、「建立多元自主的高等教育制度」、「加強弱勢族群教育」、「教育行政授權」、「技職教育多元化」等措施。

194

重建典範顯現於民主時期的理性強調理性之不斷開展與自我反省的辯證特質。¹⁹⁵台灣教育改革就教育精神與課程方向而言，所提出的方向——科技化、國際化、人本化、民主化、多元化¹⁹⁶；九年一貫課程的三大面向——人與自然環境、人與社會環境、人與自我；五大精神——民主、統整、人文、鄉土與國際觀、終身學習；以及七大領域——語文、數學、社會、自然與科技、健康與體育、人文與藝術、綜合活動¹⁹⁷；以及喧囂多時之多元智慧的理念（含建構教學）等，均突顯辯證理性的重建性。

由以上的說明可發現，幾十年來台灣的教育學術和教育策略，完全移植自西方的思考並且充分反應了「唯認知主義」的導向。我國傳統的教育是在開導學生之通達的慧識，現代移植於西方的教育主流則側重於理性知識的培養。¹⁹⁸

而影響我國教育發展的理念中，儒家傳統也扮演重要角色。儒家的教育理念，主張學習要勤勉、積累、有恆、嚴格、反對嬉戲；價值觀念上，傾向萬般皆下品，唯有讀書高；勞心者治人，勞力者治於人；揚聲名，顯父母。這些理念雖可促使家長重視子女的教育，也可激發學生向學的動機，但卻可能導致學生過度的升學競爭與壓力。

¹⁹⁴ 教育部（1999），《愛的啓航——新課程的天空》，1998，pp10-18。

¹⁹⁵ 溫明麗（1999），〈當代臺灣教育哲學典範之轉移〉，載於《哲學雜誌》第29期，1999年8月，pp48-67。

¹⁹⁶ 行政院教育改革委員會：《第一、二期教改諮議報告書》，1995，p20-21。

¹⁹⁷ 教育部：《教育改革成果報告：全國教育改革檢討會議》，1999。

¹⁹⁸ 陳德和：《臺灣教育哲學論》初版，台北市：文史哲，民91，p30。

但當十九世紀末西方教育理念陸續引入後，兒童中心、生活中心、啓發潛能、培養創造力、人本主義、教育與科技經濟發展之配合等觀點逐漸成爲思想主流，但傳統觀念依然有其影響力。

於在公共教育的目的上，過去受傳統觀念影響，一直強調國家社會利益優先、群體優先，教育是在培養好公民、培養經濟建設人力。如今已逐漸轉向強調個人發展優先。

臺灣地區近五十年來的教育進步，帶動臺灣政治的民主、經濟的繁榮、社會的穩定與文化的成長。這個事實不只值得國人引以爲傲，也足爲其他國家借鏡。綜觀臺灣地區教育的發展，可以得到幾點啓示：第一、要發展一國的政治、國防、經濟與文化，就必須先發展教育，以培養各類發展所需的人才。沒有教育，就沒有發展。第二、教育的發展必須有系統性的計畫，並與國家的政治、經濟與文化相配合。教育若隨意辦理或單打獨鬥，是很難進步的。第三、教育要能積極發展，就必須靠政府與民間的密切合作。臺灣地區的民眾對教育的重視是舉世出名的，而政府對教育的重視亦是有目共睹的。第四、教育的實施必須有適當的彈性，來適應地方、學校與學生的特殊需要才能發揮其最大的效果。第五、教育的決策必須讓相關各界人士廣泛參與，才能集思廣益，並獲得民眾的支持與配合。第六、教育的發展有賴師資素質不斷提升。第七、教育必須配合時代與環境的變遷而革新，才能不斷成長與進步，並發揮其促進社會進步的功能。

綜合來說，本節在說明台灣教育的流變時，採用了孔恩典範的說法，而這深層涵義也是在談台灣教育改革過程，而每一個過程都是在爲下一個過程在做預備，而且是互相關聯不可單獨存在的。吳汝鈞在《機體與力動：懷德海哲學研究與對話》一書中說到：

懷德海指出，每一實際的存在自身即是一有機的歷程（organic process）。它以微形狀態反映宏形的宇宙。它不斷發展，由一階段到另一階段，前一階段是後一階段的真實基礎，不斷挺進，以至於有關的事物的

完成。¹⁹⁹

這與孔恩在《科學革命的結構》書中，為典範理論所提之理路轉移的模式，似乎有異曲同工之處。接下來我們將縮小範圍，來談目前台灣數學教育改革的概況。

第二節 台灣數學教育改革的現況分析

在上一節中，探討了台灣教育的變遷，歷經了殖民典範、實用典範、民主典範以及重建典範，其中提到了與教育改革的關連，本節將縮小範圍，就數學教育來談。

教育部在國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域的基本理念中開宗明義說到：數學之所以被納入國民教育的基礎課程，有三個重要的原因：²⁰⁰首先，數學是人類最重要的資產之一：數學被公認為科學、技術及思想發展的基石，文明演進的指標與推手。數學結構之精美，不但體現在科學理論的內在結構中及各文明之建築、工技與藝術作品上，自身亦呈現一種獨特的美感。其次，數學是一種語言簡單的數學語言，融合在人類生活世界的諸多面向，宛如另一種母語。精鍊的數學語句，則是人類理性對話最精確的語言。從科學的發展史來看，數學更是理性與自然界對話時最自然的語言。最後，數學是人類天賦本能的延伸人類出生之後，即具備嘗試錯誤、尋求策略、解決問題的生存本能，並具備形與數的初等直覺。經過文明累積的陶冶與教育，使這些本能得以具體延伸為數學知識，並形成更有力量的思維能力。這也正如我們在第二章我們在探討懷德海時，所提到的數學教學可培養掌握抽象、邏輯思考的能力，進而將抽象概念運用到日常生活中。

由此可見，數學教育在學校教育中的重要性可見一般。接下來我們將進行分析及探討數學課程改革的流變，說明如下：

¹⁹⁹吳汝鈞（2004），《機體與力動：懷德海哲學研究與對話》，初版，台北市：台灣商務，p.136。

²⁰⁰ 教育部公佈之《國民中小學九年一貫課程綱要》

台灣各個階段的數學課程，都經過幾次的修訂。其中，

台灣國小數學課程在近二十餘年來經歷了四次的修訂，而一次次的修訂區間也越趨縮短，從各次的課程修訂的特色來看，可以分為強調使用教具的數學課程時代、強調知識建構的數學課程時代、強調能力培養的數學課程時代、強調計算能力的數學課程時代。²⁰¹

如果要加上時間，我們可以這麼區分：強調使用教具的數學課程時代為 67 年—89 年、強調知識建構的數學課程時代為 85 年—92 年、強調能力培養的數學課程時代為 90 年起、強調計算能力的數學課程時代為 94 年起。在台灣屬於殖民時的年代，由於各個統治者都想要便於統治台灣，使台灣變成他們的一部份，例如荷蘭人的宗教教育、日本政府的皇民化教育、剛撤離中華民國至台灣的國民政府之中國化教育，此時的學校教育並不重視數學教育，有的僅是簡單的計算能力的培養。而強調使用教具的數學課程時代，可與上一節中所談論到的實用典範與之相對應；強調知識建構的數學課程時代，則是橫跨民主典範與重建典範；強調能力培養的數學課程時代、強調計算能力的數學課程時代，皆屬於重建典範。在上一節中，所劃分的四個典範時期，並非時間一過，前一個典範就跨越到下一個典範，期間仍是交錯存在的。

強調使用教具的數學課程時代，這一階段的教科書是根據民國六十四年教育部所頒訂的國小數學課程標準編輯而成，此期間也曾因為強調教科書簡化、淺化而改編過，大致來說，內容稍做刪減，但主要的特色不變。當時數學教科書統一由國立編譯館編輯，全國使用同一本教科書，分年全面調訓教師參加研習，更大量的配發教具到各校，讓教師運用教具實施教學。教科書很有系統地安排進程，讓學生按部就班的學習。教學的方法強調運用教具讓學生從具體操作、半具體操作，進而抽象化數學知識。由於該時期學生計算錯誤類型不勝枚舉，因此，如何讓學生在學習的過程中知其然，也知其所以然，便成為下一波數學課程修訂的核心。這裡點出了學習的過程，學生在學習過程中透過教具具體操作或半具體操作，得到數學的概念或將其所學數學知識予以抽象化，但仍有照本宣科之餘，雖

²⁰¹ 楊美伶：〈教師如何因應數學課程的變革〉，載於《國北師教育論壇》，2003 年 10 月 1 日。

然強調了過程概念，但卻少了創造力。懷德海的過程哲學除了強調過程即實在，實在即過程之外，還強調創造力。而我們數學教育改革歷經多次的原因，也與此創造力脫離不了關係。

強調知識建構的數學課程時代，這一階段的教科書採統一的部編本，因此編輯特別重視兒童的認知發展，由兒童的自發性解題活動開始，透過教室內的社會互動歷程，溝通其解題活動的意義，逐步發展解題活動的文化共識，也就是約定俗成的計算規則。因為每個學生的發展速度不同，教科書的編輯提供較充裕的時間讓學生發展，更重視學生的學習經驗，結構新經驗與舊經驗的學習鷹架，讓學生逐步攀升。這樣的課程更強調學習者獲得知識的歷程、知識的意義化，以期讓學生能夠知其然，更能夠知其所以然。因為重視兒童的個別經驗與想法，解題方法多樣化，因此教學的過程中非常重視教室內的互動與討論，一方面讓學生表達個人的想法、欣賞他人的想法，一方面進行意義理解上的溝通。由於這一階段的教科書的教材結構、教學方法與以往有很大的差異，在教師準備不及下實施，自然會衍生很多的問題。而將計算規則視為解題的方法之一、文化上的共識的見解下，並不規定一定要使用算則解題，自然不會要求熟練，因此產生計算速度較慢、看起來不太有效率的問題，而這也是社會大眾無法接受與理解的部份。

強調能力培養的數學課程時代，這一階段的教科書完全開放民間編輯，在內容方面大致來說和八十二年版下的教科書沒有太大的差異，只是更重視生活情境的安排，強調從生活情境中切入學習，但是耐人尋味的是什麼才是生活中的情境？常常教科書的情境問題也是虛構的，並不直接是兒童的生活經驗，不過這也是教科書編輯者的無奈，似乎不夠情境化就無法突顯九年一貫的特色，這可能又是一項誤解。由於八十二年版的數學課程下的教科書呈現的計算能力落後的問題仍然持續被關注，九年一貫數學領域數與計算部份在這方面沒有太大的改變，再加上九十一學年度國一學生第一次段考數學成績低落，致使一些關心數學教育的學者紛紛呼籲修訂數學領域暫行綱要，暫行綱要才上路不到幾年就面臨更替的命運。

強調計算能力的數學課程時代，修訂小組於九十二年八月十五日提出的綱要

文本中指出九年一貫數學領域課程綱要的修訂原則為：第一，參考施行有年且有穩定基礎的傳統教材。第二，採用國際間數學課程必備的核心題材。第三，考慮數學作為科學工具性的特質。第四，現有學生能夠有效學習數學的一般能力。從中可明顯看出強調熟練演算能力的部份。在暫行綱要強調的「能力」則包括數學性：發展形成問題與解決問題的能力；社會性：發展以數學作為明確表達、理性溝通的能力；心理性：培養數學的批判分析能力；文化性：培養欣賞數學的能力。

上述四次數學課程的修訂均有其強調的重點與特色，六十四年版的課程透過教具操作強調改念抽象化的歷程；八十二年版的課程強調學生為本的知識建構觀；九年一貫數學學習領域暫行綱要強調數學的內外部連結以培養學生各項能力；九年一貫數學學習領域綱要修訂小組強調數學為科學工具性的特性，強調演算能力的熟練。

無論是六十四年版、八十二年版到九年一貫數學課程，無不強調數學概念的抽象化過程。六十四年版強調透過具體、半具體到抽象；八十二年版強調具體活動、表徵活動到抽象活動；九年一貫強調學習的方式在不同階段的特徵為具體操作、具體表徵、類化具體表徵到符號表徵。雖然說法不同，但也都說明了概念發展的階段歷程。因此教學時，要顧及兒童的心智發展，適時地運用教具與學生溝通題意、進行解題、理解解題活動的過程意義，進而表徵解題活動的過程意義，當學生對解題活動的過程意義越趨理解與掌握時，進而抽象化其意義建立概念。

再明白地說：

從台灣地區數學課程的發展來看，改革的分水嶺是 64 年版和 82 年版，而九年一貫課程是 82 年版的延續和擴充；而課程理念由「學科中心」轉向「學生中心」，教材組織由「學科組織邏輯」轉向「學科發生邏輯」，教學方法由「講述式教學」轉向「討論式教學」。82 年版已重視數學的內部連結，九年一貫版再擴展的是數學的外部連結。因此，九年一貫課程的特色是以「連結」主題為核心，並以學童在學習方式及思考型態方面的學習特徵來劃分學生認知階段，加強具體運思過渡到形式運思的國中小銜接階

段。²⁰²

以 64 年版國小數學課程、82 年版國小數學課程和九年一貫課程數學暫行綱要來做比較的話，前者重視結果，以教書為目的；後兩者重視過程，以教人為目的。64 年版課程數學教學的缺點，除了不重視知識形成的過程，只要求學生記住最後的結果之外，還缺乏對知識作檢驗和批判的講究；事實上，這樣的學生在小學四、五年級就會開始討厭數學，升國中之後開始害怕數學，到了高中變成拒絕數學，而選讀文組，更可能在大學聯考時放棄數學。²⁰³所以，82 年版數學課程強調兒童數學認知發展、數學知識形成過程、有意義的數學學習。而數學教育的趨勢在重視學習者個體、數學知識形成的過程，與社會文化活動的關聯；除了數學知識之外，數學課程還有很多的情意、文化、社會目標。²⁰⁴接下來將討論近年來所推行的建構式數學以及九年一貫的數學改革。

讓我們先來談數學課程改革之建構式數學²⁰⁵。近年來，亞洲國家地區學童在數學上的優越表現一直引人注目，在國際矚目的國際奧林匹克數學競賽中，我國才參賽六年，成績卻與老牌參賽者英美等國並駕齊驅。但另一方面，台灣中小學學生數學成績低落的現象卻持續存在，就連數學是優異的學生，也是「十分痛恨數學」，教育部對中小學學生課程喜好程度進行調查，發覺有三分之一的小學生、四成六的國中生，最害怕的課程是數學，而且隨著年級增加，討厭數學的比例越來越高，這是為甚麼呢？

日前教育部檢討當今的數學教育，發覺我國學童傾向死記公式，面對非例行性的問題時，常常不知所措，為了應民主時代之潮流，及參考美國數學教師學會〔NCTM〕於 1989 年公佈之〈學校數學課程與評量標準〉，於民國八十二年九月公佈新「國民小學課程標準」，即主張「知識非經灌輸記憶所得，是由學習者自行建構而成」，強調數學教學的目的不應該只是要求學生會計算、會做答，更重

²⁰² 鍾靜：〈論數學課程近十年之變革〉，載於《教育研究月刊》，133 期，2005 年 5 月，p126-127。

²⁰³ 黃敏晃：〈國民小學數學新課程之精神〉，載於《國民小學數學科新課程概說》，教育部台灣省國民學校教師研習會編印，1994，p1-17。

²⁰⁴ 鍾靜：〈落實國小數學新課程知意圖與學校本位的進修活動〉載於《課程與教學季刊》，1999，p15-35。

²⁰⁵ 即為上一節中所說的 82 年版數學課程。

要的是要有真正的解題能力，並由其生活中主動去探索數學並由與他人的團體討論中達到學習合作，練習表達自我以及培養尊重他人的民主精神。

一個人如何知？如何學？學習的歷程是如何？這些問題一直是知識論及學習心理者所關心的事。近年來，許多科學教育學者對於學生學習數學所持的觀點皆傾向於建構主義。所謂建構主義(construtivism)認為學習者本身在學習得到知識中扮演一個最根本且主動的角色，並從中建構並且重新組合自己獨一無二的世界。也就是說在學習活動中每個學生都在組合、轉換，或忽略部分傳遞訊息的意義，所以每位學生所持的看法與解題角度都有所不同。

建構主義學者討論知識是如何被認知者主動建構，而不是被動接受的過程，他們認為學習是一種主動參與的過程，著重的是：the way to knowing 或 theory of knowing，因此又有人認為這是一種動態的認識理論。這與懷德海的過程哲學有相似之處：

此中的主脈，是由靜止狀態發展向動感狀態，力成自身表示活動，自然不脫動感，而實在也要在實現(actualization)或實現性(actuality)中說，必須要有動感，才有實現可言。實際上，永恆客體本身便是很有實在(reality)的意味，可惜它是從抽象一面說的，它雖涉及本質，但也不濟事。懷德海的實在(reality)觀念，是建立在動感上的。至於對象，特別是對象化，在表現動感方面，早已超越永恆客體了。懷德海如何說對象化(objectification)呢？……對象化是指一個實際的存在的潛在性、潛在性在另一個實際的存在中被實在化、被實現出來。要實現，便非要動感不可。有了動感，便能建立實在、實在性；而動感正是表現在歷程中。

206

從以上說明，建構主義所提的中心思想與過程是互相連結的。雖然，建構主義是西方近數十年來興起的知識論，主張不論是個人或大眾共同的知識，每個人都會建立一個對環境的心智基模，用以解釋和了解新的經驗，當然這些知識的架

²⁰⁶吳汝鈞(2004)，《機體與力動：懷德海哲學研究與對話》，初版，台北市：台灣商務，p.133。

構也會因應新經驗而重新修正、組合和擴充改變。但，根據美國數學教育家戴維斯的說法，建構主義是數學學習心理的一項新進展，其申言學習不是一種被動的「複製」活動，而是學習者在認知結構上的主動建立、改造，及發展自我的過程。而懷德海的過程哲學強調過程與實在並重，其精神也提出其主動性，更強調融合的概念。建構式教學希望學生能從過程的推演中創造自己的數學王國，也希望能夠運用這創造去融合所建構出的數學概念，這樣的想法實與懷德海的過程哲學有相通之處，有創造、有融合，更有由過程中所建構出自己的數學王國。不過可惜的是，當時推行時並未全面實施，再加上被某部份的人去誤解了建構式教學的實際內涵，以至於在實施的過程中風波不斷，喪失了建構式教學的實質內涵。

在此，將建構式數學實施的過程說明如下：民國 82 年 9 月，教育部公佈新「國民小學課程標準」，明定國小數學科教育總目標為：【輔導兒童從日常生活經驗中，獲得有關數學的知識，進而培養有效運用數學方法，以解決實際問題的態度和能力。】分項目標為：1.養成主動地從經驗中，建構及理解數學的概念，並透過了解及評鑑別人解題的過程，進而養成尊重別人觀點的態度。2.養成從數學的觀點考慮週遭事物，並運用數學知識與方法解決問題的能力。3.培養以數學語言溝通、討論、講道理和批評事物的精神。4.養成日常生活中善用各類工具從事學習及解決問題的習慣。此次數學課程標準的修訂原則為：配合社會的需求，推動民主化社會的趨勢。落實以學生為本位的觀點。強調數學是一種自我觀念的連結，是一種解題的過程。自新課程公佈之後，全省各地均有參與實驗的小學，期間並開放數學教科書有國編版及民編版並由老師自行選擇上課之版本，並於八十五學年度起全面實施新課程。²⁰⁷

建構式教學於民國八十五年未經審慎評估就全國推行。「化簡為繁」的教法，導致學生數學演算能力大幅降低。建構式數學將計算過程化簡為繁，不鼓勵學生背誦九九乘法表，簡單的乘法成為加法的延伸，過去只要兩個步驟即可完成的運算，需要花十個步驟才能得到答案。建構的結果讓學生的運算能力下降，可是其理解能力並未提升。而這些孩童的父母接受的是背誦九九乘法表的方法，在孩童建構起自己的數學時的與他人之討論遇到了問題與挫折，使得雙方接受挫，沒有

²⁰⁷教育部（1993），《國民小學課程標準》。

獲得共通點。

建構式數學以全國兩百餘萬學生當白老鼠，實驗六年之後，才匆忙叫停。問題的根本癥結所在，是其哲學基礎在於「建構主義」，而不是「建構實在論」：認為數學的學習，主要在於歷程的建構，而不在於正確的答案。不重視客觀實在的知識，最後終於落入「知識虛無主義」的陷阱，而難以自拔。我們現在面臨的更嚴重問題是：九年一貫課程的哲學基礎也是「建構主義」，也不是「建構實在論」，九年一貫課程全面實施之後，我們恐罷也要墜入「知識虛無主義」的深淵，而難以自拔。²⁰⁸當初的立意者是如此，但是施行者卻變成那般了。懷德海對於「歷程」、「實在」是這麼說的：

歷程自身便是實際的存在的建構。²⁰⁹

歷程是有創造性建立性的，它不是一般經驗事物的作用的過程，卻是作為終極實在的實際的存在的建構過程。²¹⁰

「實在」(reality) 是一種永遠是生生不息的動感的事情，而歷程 (process) 則是一種恆常地在活動狀態中的具有創發性、創造性的發展 (development)。²¹¹

眼前所見的東西不能即此即是具有終極實在性的實際的存在，它是需要被轉化、被點化，才能成就實際的存在。而這轉化、點化便是一種歷程。歷程即顯示一種層層漸進的程序，不能一蹴而成。²¹²

從這裡我們也可看出為何建構式數學為什麼會不那麼成功的原因，建構式數學強調過程的重要性，與懷德海所提的過程哲學實有相同之處，只是建構主義派的學

²⁰⁸ 黃光國：《教改錯在哪裡？——我的陽謀》，台北 INK 印刻出版有限公司，2003 年 9 月初版，p109。

²⁰⁹ 吳汝鈞（2004），《機體與力動：懷德海哲學研究與對話》，初版，台北市：台灣商務，p.141。

²¹⁰ 前揭書，p.141。

²¹¹ 前揭書，p.141。

²¹² 前揭書，p.142。

者，雖強調過程以及建構的過程，但卻著重於學生本身的自我建構，不過依照懷德海的看法，是必須還要加上老師的循循善誘，因為老師的引導，才能帶領學生將眼前所看到的事物，予以轉化、點化，如此才能真正達到數學知識的建構。因此，我們可以如此說，如果建構數學在實施的過程中，不要全然將老師去除在外，將老師引導者的角色發揮出來，相信學生就不會受那麼多苦了。

再讓我們來談數學課程改革之九年一貫。數學是依循嚴謹的邏輯程序而發展成的一個知識體系，它的特點在於能從問題的本質來探究其內在深層的結構，儘管這些問題的表相是多麼地不同。因此，數學敘述方式是一種抽象形式的語言，這種抽象性的本質是一般人學習數學的最大障礙。在國民教育的課程裡，如何協助學童擺脫數學形式規則的束縛，是編寫教科書及教師教學時所該注意的要點。具體來講，課程的設計應注重數學內在結構的連結，及數學在生活情境以及和其它學科（例如自然科學）的連結。雖然處理方式不是很令人滿意，這些內部連結在傳統的教學上多少都注意到。舉例來說，在國中時，傳統教學方式，通常先代數後幾何，教科書編排方式是在代數主題的全部題材或至少絕大部份題材教完後，再轉到幾何主題教學。這種教學方式，並不是說學童在國一下及國二上學完代數後，在往後的年級裡不再學習和代數相關的數學。事實上，在國二下及國三上的幾何課裡一般都有安排許多代數的應用。這類代數的應用至少包括以抽象的代數符號和運算來表達幾何圖形中量與量的關係，例如座標平面上的距離公式，又例如相似形與比例的關係，並且希望能夠透過對座標平面的認識，建立座標幾何的初步經驗。代數與幾何的關係，充分說明了數學內在結構連結的重要性。一些生活情境上的問題，例如拋物運動和一元二次方程式，在國中的學習應該出現。不僅如此，在國小曾經出現過的許多應用問題，包括一些以四則運算很難處理的，在經過分析之後，亦應在國中做第二階段的代數處理，以理解代數在解決問題中扮演的角色。縱使對教材編排的順序各有看法，但統整連結的原則仍必須兼顧。

九年一貫數學領域課程目標強調能力的開拓，以期培養學生「發展形成數學問題與解決數學問題的能力；發展以數學作為明確表達、理性溝通工具的能力；培養數學的批判分析能力；培養欣賞數學的能力。」使數學課程顧及技術層面外，

更重視與其他領域的連結，讓學生從生活情境中察覺問題、轉化問題、解決問題、溝通解法、評析解法，使能活用知識，在問題解決的過程中培養各項能力。此外，也強調數學內部的連結，顧及學生舊經驗與新經驗的連結，數學領域內各主題內容的連結，讓學生從生活中學習，更能應用到生活中。在教學方面，強調「數學學習活動應讓所有學生都能積極參與討論，激盪各種想法，激發創造力，明確表達想法，強化合理判斷的思維與理性溝通的能力，期在社會互動的過程中建立數學知識。」特別呼籲安排適當的學習內容，讓所有的學生都能參與學習；鼓勵教室內師生互動、討論的學習過程；培養合理判斷、理性溝通、明確表達的能力。

213

教育部對於九年一貫數學領域的課程綱要，是由下列四個原則來界定：首先是參考施行有年且有穩定基礎的傳統教材；其次是採用國際間數學課程必備的核心題材；再者是考慮數學作為科學工具性的特質；最後是現有學生能夠有效學習數學的一般能力。具體而言，九年一貫數學學習領域的教學總體目標為：培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力；學習應用問題的解題方法；奠定下一階段的數學基礎；培養欣賞數學的態度及能力。其中，國民小學階段的目標為：在第一階段（一至三年級）能掌握數、量、形的概念。在第二階段（四至五年級）能熟練非負整數的四則與混合計算，培養流暢的數字感。在小學畢業前，能熟練小數與分數的四則計算；能利用常用數量關係，解決日常生活的問題；能認識簡單幾何形體的幾何性質、並理解其面積與體積公式；能報讀簡單統計圖形並理解其概念。國民中學階段的目標則為：能理解坐標的表示，並熟練代數的運算及數的四則運算。能理解三角形及圓的基本幾何性質，並學習簡單的幾何推理。能理解統計、機率的意義，並認識各種簡易統計方法。²¹⁴

九年一貫整體而言，其教材的優點是：生活化、簡單化、本土（台灣）化；但缺點是：太簡略、殘缺、無法跟高中接上。以數學來說，九年一貫中，少掉了七大單元，約三分之一的教材。所謂銜接教材就是把這些少掉的部份補上。幾乎所有的高中都會做這項工作。舊教材的優點是系統較完整，但是難。對”快樂學

²¹³ 楊美伶：〈教師如何因應數學課程的變革〉，載於《國北師教育論壇》，2003年10月1日。

²¹⁴ 教育部（2003），《國民中小學九年一貫課程綱要》，台北：教育部。

習”有阻礙。對以後想往上念書的學生，則較優。

第三節 從懷德海談數學教改之綜觀

行文至此，對於懷德海的哲學思想、數學知識、數學教育以及數學改革有了全盤的理解。在本節中將把他們彼此連結起來，而連結用懷德海的術語來說便是「進入」。懷德海的整個哲學思想中，有一個很重要的概念便是他希望能夠融合自然科學與人文科學長久以來的鴻溝。而懷德海的過程哲學給了我們這樣的觀點，因此，楊士毅在《懷德海哲學入門——超越現代與後現代》一書中說到懷德海的機體哲學能夠：

則除了將關係視為重要的潛在實存，更強調事物間或人與人、人與自然的關聯乃是本來就存在那兒的本質性的內在固有的關聯，並凸顯身體感受式的感性關聯的特殊重要價值。因此筆者深信提倡懷德海哲學將有助於喚醒人類重新重視人與人、人與自然原本即存在那兒的親密關係，尤其是感性的情感關係，藉以化解由「疏離」所產生的文化與社會的危機。總之，懷德海哲學蘊含了一套人與自然和諧相處的自然哲學，以及人與人、人與社會相互攝受關聯、互為主體、與利己利人的倫理學與社會哲學。²¹⁵

數學正突破傳統的應用範圍向幾乎所有的人類知識領域蔓延，並越來越直接地為人類物質生產與日常生活做出貢獻。數學作為一種文化，已成為人類文明進步的標誌，因此，對於當今社會每一個有文化的人士而言，不論他從事何種職業，都需要學習數學，了解數學和運用數學，現代社會對數學的這種需要，在未來的世紀中無疑將更加與日俱增。

二十世紀數學思想的深刻變革，已將這門科學的核心部分引向高度抽象化的道路，面對各種深奧的數學理論和複雜的數學方法，門外漢往往只好望而卻步，這樣，提高數學的可接受度，就成為一種當務之急。如果可以深入淺出介紹當代

²¹⁵楊士毅（2001），《懷德海哲學入門——超越現代與後現代》，台北：揚智，p.21。

數學的重大成就與運用；或是循循善誘啓迪數學思維與發現技巧；或是富於哲理闡釋數學與自然或其他科學的聯繫；等等，如此當可試圖爲人們提供全新的觀察視角，以窺探現代數學的發展概貌，領略數學文化的豐富多彩。

數學的學習貴在於能理解，教師在教學的過程中應重視學習經驗的銜接、重視概念抽象的歷程、經營互動討論的環境、靈活運用數學的教材以幫助學生獲得關聯式的理解，使知其然又知其所以然，進而拓展個別學生的數學知識範疇。

而懷德海在其《科學與現代世界》(Science and the Modern World)中，強調了數學在探索物理世界中的重要性。²¹⁶在第三章中，我們也說明了數學在知識探求時所佔的地位，而我們所處的世界也就是一個物理世界，再在說明數學在我們人類發展中的地位。如果沒有數學知識的輔助與進展，就沒有科學的發展與進步，更沒有現代生活的科技發展與便利。在全世界各國的學校教育，數學教育列爲基礎教育的道理也是在於此。他說：

從純粹數學在近代的發展看來，這門科學可以說是人類精神最富原創性的產物。²¹⁷

數學的確定性基於它完全抽象的普遍性。但是我們並沒有先天的確定性可以相信：實際世界中被觀察到的實有，能成爲我們普遍推理過程中的一個特殊事件。²¹⁸更說到：把數學應用在特殊的實際事例上，我們便應完全牢記亦下三個過程。首先我們必須仔細檢查純數學的推理，確信它沒有漏洞，沒有因偶然疏忽而產生的不合邏輯之處。第二個過程是，確實弄清楚這個推論所假定的一切抽象條件是否可以成立；就是把數學推論藉以進行的抽象前提確定一下。第三個批評過程是，檢證我們的抽象假設在當前的特殊事例中是否可以成立。這個由例證推及全體的推理過程，就是歸納法。²¹⁹

²¹⁶ M·克萊因：《數學與知識的探求》，劉志勇譯，上海，復旦大學出版社，2005，p52。

²¹⁷ 懷德海：《科學與現代世界》，傅佩榮譯，初版，台北立緒，民89，p30。

²¹⁸ 前揭書，p31。

²¹⁹ 前揭書，p31-33。

在數學的抽象領域中左右大局的函數概念，反映在自然秩序中便是以數學表達出來的自然規律。²²⁰

這句話點出了數學與生活息息相關的觀點。函數在數學中的解釋就是兩變數或更多變數之間的關係，而我們處在這個有機環境之中，也是一種函數關係，生活之中的此一事物是彼一事物的函數，而彼一事物又是另一事物的函數，彼此之間有著函數與函數之間的關聯，事物之間產生了融合意涵，因此懷德海的哲學思想亦可稱之為融合的哲學。

教育部在國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域的附錄一中提到五大主題的說明，其中一大主題是「連結」：數學是依循嚴謹的邏輯程序而發展成的一個知識體系，它的特點在於能從問題的本質來探究其內在深層的結構，儘管這些問題的表相是多麼地不同。因此，數學敘述方式是一種抽象形式的語言，這種抽象性的本質是一般人學習數學的最大障礙。在國民教育的課程裡，如何協助學童擺脫數學形式規則的束縛，是編寫教科書及教師教學時所該注意的要點。具體來講，課程的設計應注重數學內在結構的連結，及數學在生活情境以及和其它學科（例如自然科學）的連結。

雖然處理方式不是很令人滿意，這些內部連結在傳統的教學上多少都注意到。舉例來說，在國中時，傳統教學方式，通常先代數後幾何，教科書編排方式是在代數主題的全部題材或至少絕大部份題材教完後，再轉到幾何主題教學。這種教學方式，並不是說學童在國一下及國二上學完代數後，在往後的年級裡不再學習和代數相關的數學。事實上，在國二下及國三上的幾何課裡一般都有安排許多代數的應用。這類代數的應用至少包括以抽象的代數符號和運算來表達幾何圖形中量與量的關係，例如座標平面上的距離公式，又例如相似形與比例的關係，並且希望能夠透過對座標平面的認識，建立座標幾何的初步經驗。代數與幾何的關係，充分說明了數學內在結構連結的重要性。一些生活情境上的問題，例如拋物運動和一元二次方程式，在國中的學習應該出現。不僅如此，在國小曾經出現過的許多應用問題，包括一些以四則運算很難處理的，在經過分析之後，亦應在

²²⁰ 前揭書，p45。

國中做第二階段的代數處理，以理解代數在解決問題中扮演的角色。縱使對教材編排的順序各有看法，但統整連結的原則仍必須兼顧。²²¹這裡的概念，與懷德海哲學的思想是不謀而合的。

茲就三方面來說明：

一、就教育而言：不要教死的知識應該重視知識的活用

在懷德海當時所處的年代，他對當時的教育體制提出了不少的抨擊，因此，楊士毅在《懷德海哲學入門——超越現代與後現代》該書中記載著：

懷氏認為過去數十年或百年的西方教育太偏重抽象思維的訓練，而必須補強具體化的訓練，以達到平衡。他說：「智慧是平衡發展的結果，教育所要達到的目的，正是這種個體的平衡成長……，我個人對傳統教育方法的批評是：過於偏重知識的分析，與求得公式化的材料。我的意思是：我們沒有注意培養一種習慣，對於具有價值且相互作用的個別事實作具體的認識與欣賞，我們所強調的只是抽象的公式，而抽象公式則不管這種不同價值的交互影響。」²²²

這樣的現象與我們甚或是世界各國所遇到的現實教育處境是一樣的，因此我們可以透過懷德海的思想來對目前所遭遇到的困境予以加以解釋分析。

懷德海在其《教育的目的》中〈技術教育及共同科學與文學之關係〉裡說到：

如果我們利用數學教育僅僅是為了牢記普遍定理，我們就會毀掉數學教育。普通概念只是聯接特殊結果的手段。歸根結柢，具體特殊的事例才是重要的。因此，在處理數學時，你的答案不能太具體，你的方法也不能太一般。推理的基本過程是將特殊的東西一般化，又將一般的東西特殊化。

²²¹ 教育部公佈之《國民中小學九年一貫課程綱要》，p78。

²²² 楊士毅（2001），《懷德海哲學入門——超越現代與後現代》，台北：揚智，p.102。

沒有一般化就沒有推理，沒有具體化就毫無意義。²²³

由於懷氏的教育目的，既在造成有文化且有專門知識的人，亦即能思想與行動並重的人，則其教育風字字以此為依歸，故其對教育有兩大訓練：一為教授過多科目，一為對所教授科目需極為透徹，因此其教育方法主張要重視「活用觀念」（living ideas），重視活用觀念才能與學習者的經驗相銜接，為預防死知識的獲得或惰性觀念的產生，應該避免教授過多的科目，並且對所教授的科目要能透徹瞭解。²²⁴

數學教育家柯朗（Richard Courant，1888-1972）在其名著《什麼是數學》（1941）第一版的序言中就已經指出：「數學教學有時竟演變成空洞的解題訓練，這種訓練雖然可以提高形式推導的能力，但卻不能導致真正的理解與深入的獨立思考。數學研究已出現一種過份專門化和過於強調抽象的趨勢，而忽視了數學的應用以及與其他領域的聯繫。」²²⁵

為了防止教育受呆惰觀念不當的影響，懷德海提出兩個教育的箴規，那就是一為勿教太多科目；另一為所教的務要徹底。教的科目太多，只能傳授各科目中的一部份，學生將消極地吸收不相干的觀念，無法引燃旺盛活力的知識火花。因此教育之道在傳導主要的概念，使得學生對重要概念作恰當的整合，並瞭解其在真實生活中的即刻運用。

懷德海特別強調在現實生活中的實用性，知識的效用在於對目前是否有用，教育的最大傷害是捨棄現在，因他現在包含一切，古代賢哲交融是件偉大而令人振奮的聚會，但唯一的交會點是現在²²⁶。教育強調實用的另一個條件是能將觀念融會貫通而活用，講某一領域的觀念和其他領域做關聯，這又是懷德海所強調的通才要件。他說：「我所說的應用觀念即是將它和構成生活的感官知覺、情感、

²²³ 懷德海：《教育的目的》吳志宏譯，初版，台北市：桂冠，1994，P64。

²²⁴ 謝幼偉：《懷黑德的哲學》，台北：先知，民 63。

²²⁵ 科朗：《甚麼是數學—對思想和方法的研究》，張飴慈譯，上海：復旦：，2005，5月，第一版序言。

²²⁶ 懷德海：《教育的目的》吳志宏譯，初版，台北市：桂冠，1994，p14-15。

願望、慾望及思想間調適的心靈活動產生關聯。」

因此，學生所學的若僅是眾多不相關聯的瑣碎知識，則無法形成獨立思考的能力，將有陷入懷氏所批判的「呆惰觀念」的泥淖中的危機之虞。

二、就本體論而言：有機哲學堅持過程就是實在，實在就是過程。

整個世界是由各種事件、各種實際存在物相互連結、相互包容所形成的有機系統。學生、數學、教師、教育、改革、思維、社會、自然乃至整個世界，都是活生生的、具有生命的有機體，處於永恆的創造和進化過程之中。構成宇宙的基本單位不是所謂原初的物質或物質實體，而是由性質和關係所構成的“有機體”。而數學是一個有機整體，各種問題是相互關聯的。²²⁷有機體的根本特徵是活動，活動表現為過程，過程則是構成有機體的各元素之間具有內在聯繫的、持續的創造過程，它表明一個機體可以轉化為另一個機體，因而整個宇宙表現為一個生生不息的活動過程。所以，我們可以說：教育應該是一種以人為本的、主動的、有機的、開放的、創造的、藝術的、歷險的和享受的過程與活動。也可以說：教育應該是一個師生、生生互動、教學相長的過程。教育應該是一個師生雙向互動、教學相長的過程。

而如何做連結呢？懷德海的說法是透過攝入。而何謂攝入？我們在第二章的時候已經說明過，在此我們再說一次，他說，實際存在物與宇宙中的每一項都有某種完全而確定的聯繫。這種確定的聯繫，就是它對那一項的攝入。我們透過攝入，可以去做連結，也可以產生下一點我們要說的價值。

以攝入思想為原點，懷德海所提出的一個重要觀點是，作為主體的自我是在過程之中出現的突現物。道統西方哲學認為，在實際進行認識和取得知識之前，必須先有認識者。而懷德海的觀點則與此相反。他認為，執行攝入功能者即主體是攝入活動的產物。用懷德海的話說，感受者（feeler）是從自己的感覺活動中出現的統一體。同時，根據過程哲學的基本觀點，懷德海指出道統哲學中的“主

²²⁷ 王樹禾：《數學演義》北京：科學出版社，2004，p22。

體”一詞容易引起誤解，認為最好使用“超體”一詞來表達有關的思想。因為這種作為主體的超體正是產生那些感受的過程的目的。各種感受不能與它們所要達到的目的相割裂；這種目的就是感受者。各種感受以感受者為目標，作為它們的目的因。各種感受就是其所是，以便使它們的主體可能是其所是。²²⁸

沈清松先生在《現代哲學論衡》中提到：懷海德認為吾人必須用理性化的方式，來保障經驗不斷向上演進，而不致於向下退化。為此，我們必須一方面致力於表象系統本身的融貫，另一方面必須不斷返回新的經驗歷程。²²⁹

而數學的學習又何嘗不是如此呢？就像上一節所探討的台灣數學教育改革的現況分析中，數學課程改革的重點放在過程與連結。不管是強調知識建構的數學課程時代，這樣的課程強調學習者獲得知識的歷程；還是九年一貫數學學習領域暫行綱要強調數學的內外部連結以培養學生各項能力；抑或是六十四年版、八十二年版和九年一貫數學課程，無一不是在強調數學概念的抽象化過程。六十四年版是透過具體、半具體到抽象；八十二年版是透過具體活動、表徵活動到抽象活動；九年一貫是透過學習的方式在不同階段的特徵為具體操作、具體表徵、類化具體表徵到符號表徵。雖然說法不同，不過卻都說明了概念發展的階段歷程。由此可見，我們的數學教育教改仍是圍繞在懷德海的哲學思想之中。

所以在教學時，教師要顧及學生的心智發展，適切地運用教具與學生溝通題意、進行解題、理解解題活動的過程意義，進而表徵解題活動的過程意義，當學生對解題活動的過程意義越趨理解與掌握時，進而抽象化其意義建立概念。如果每個教師能夠將數學知識與生活經驗能夠做夠多的融合，相信學生在學習數學過程中的疑慮與挫折能夠減少一些的，也能促使他們對數學知識與生活經驗做一個融合。適時地在教學過程中帶入數學史，相信學生會更明瞭數學在人類發展史中具有重要的角色，更能明瞭原來數學是我們活生生世界中的一部份，進而更接近數學，讓數學成為生活中甚獲生命中的一部份。

²²⁸ 懷得海：《過程與實在》，楊富彬譯，北京：中國城市出版社，2003，p406。

²²⁹ 沈清松：《現代哲學論衡》台北黎明，民83年四刷，p157。

三、就價值而言：

懷德海認為價值就是現實（actuality），就是「事素」或「實際體」。價值不是純理想的，不是僅在思想中的。必須理想狀態和現實狀態有一真實的結合，價值才會產生。而數學的價值，並非只是在思想所造就而成的真理，應該還在於它是我們生活的一部分，是所有知識來源的源頭，也就是在於將數學與生活做連結，讓數學真的成爲我們生活的一部分，而不是將它與生活分隔，故價值產生於理想和現實的統一上。

再進一步的分析，懷德海認為的價值，是就價值的廣義而言，指一般的價值，不是指特殊的價值。他認為任何事物都有一般價值，這就是天地不虛生萬物，懷德海因不輕視天地間任何事物的生成，遂以價值歸諸於每一物，而認為每一物的生成，即爲價值之所在。這也就是說，存在價值是不分離的，存在即爲價值。

而懷德海認為價值的產生，主要在「攝受」的歷程。每一「實際體」之如何「攝受」可視之爲價值如何產生，故價值不是純主觀的，也不是純客觀的，不是純屬於心的，也不是純屬於物的，而是客合一，心物合一的。理由是，每一「實際體」之成爲實際體，一方面有物理的攝受，一方面又有概念的攝受，一方面有客觀的材料，一方面又有主觀的形式。必這兩方面，即理想狀態和現實狀態，有一真實的結合，然後「實際體」或價值才會產生。²³⁰而學習數學的價值應該也是在於此。

懷德海以爲，宇宙間事物都是在關係中而不是孤立的，所以他在教育上主張「具體」。他又以爲生命是一個完整而統一的歷程，因此主張「完整」。例如，教師應該讓兒童自己用眼睛看，自己動手做，以獲得直接的經驗。²³¹

懷德海所謂的價值就是現實（actuality），就是「事素」或「實際體」，價值不是純理想的，不是僅在思想中的，必理想狀態和現實狀態有一真實的結合，價

²³⁰ 郭郁智：〈懷德海哲學及其教育思想之研究〉，載於《教育研究》，7期，民88，p401。

²³¹ 前揭書，民88，p405。

值才會產生。價值的產生在於「攝受」的歷程，在選取攝受對象的過程便促成價值的產生，而選取又必有有其標準，亦即價值的標準，懷德海在「創造性的宗教中」一書中提到『自我興趣』(Self interest)，可視為懷德海所謂的價值標準。他說：「價值是內在於現實的本身。成爲一個實體，就是在有一自我興趣，這種自我興趣，就是自我評價之感；它乃是一個情緒音調。」由此可知，自我興趣只每一自我，每一主體本身所期求，所需要的，所達成的目標，就是每一自我的評價標準。一「實際體」的出現，在於我一「自我興趣」，然而「自我興趣」又是從何而來？追溯之下，就得推至上帝，而上帝開始這個歷程。因上帝的性質是無理由可說的，上帝本身就是理由，這即是終極理由。「上帝的目的，就是在時間世界中達成價值（創造中的宗教 Religion in the Making）」²³²

爲了尋求事實與價值、科學與人文的統一，懷德海構建了一種新穎的價值理論。它主要包括“樣式理論”和“感受理論”這兩部分。懷德海的價值理論是貫穿於其早中晚期哲學的一條紅線，更是其晚期哲學的核心。這一理論對於增強我們的人文精神，克服主觀價值論和客觀價值論的片面，具有重要的啓示和借鑒意義。

依懷氏，終極的真理或真實、實在是從歷程中成就的，他所時常強調的實際的存在、實際的境遇都具有實在義。²³³

數學的真正價值是從過程中成就的，所謂過程就是實在，而實在就是過程。

²³² 謝幼偉：《懷黑德的哲學》，先知，民 63，p101。

²³³ 吳汝鈞（2004），《機體與力動：懷德海哲學研究與對話》，初版，台北市：台灣商務，pp138-9。

第五章 結論

綜合上述幾個章節，我們應可發現數學的重要，更可知學習數學的價值，因此被學校教育認為是基本教育的數學教育，應該更被重視的。從以上的探究與分析，我們深知數學在我們追求知識的過程中，確確實實起了作用，因此數學史在學習數學的過程中是不容忽視的。而既然數學是與我們的日常生活息息相關的，那麼在教授的過程中就應該是活用知識的，而不是讓數學變成僵化甚或死的、無用或是有害的知識。

第一節 總結

讓我們再次回顧本篇論文，從第二章中，我們可以發現：雖然懷德海與我們所處的時空不同，但是面臨到的問題與困境是相同的，我們都面臨到將教育僵化、學習到無用知識，以致與生活脫節了。懷德海在當時提出了抨擊，而此時的我們甚或世界各國，都是在進行教育改革。而懷德海的教育最終目標是打造一個有文化的人，這與目前世界各國進行中的教育改革是雷同的。但該如何達成呢？懷德海提出了活力的概念。這與他赴美從事哲學教育後，所轉向之後形成偉大的哲學思想，也就是過程哲學是一樣的概念。過程哲學強調動態的過程，每一個個體都是活生生的有機體，而我們所處的社會更是一個有機體，藉由過程中的互動與融合，才能避免使教育僵化，甚或是把教育教死了。

是故，經由第二章中的討論，我們明確知道：懷德海的過程哲學是以有機論為基本思想，以活力論為基本精神，以動力學為基本方法，所以說，他在這樣的基礎上，形成的以活力論為根本的過程教育思想，無庸置疑是當代教育的前進方向。用懷德海的過程哲學及教育思想來看新課程理念，那我們就必須用活力論思想來建構新的知識觀、課程觀、教學過程觀，進而希望達到一種以活力為本質特徵的課程實施過程。由第二章的討論，我們確實明瞭，懷德海的過程哲學在當代教育改革中的確是領導前進的一盞明燈。因為懷德海的教育思想中，其內容包含了整合教育、教育節奏、首創精神等方面，與過程哲學所強調的活動以及融合概念是一樣的，所以說在我國教育重大變革時期，懷德海的教育哲學思想對我國教

育改革具有重要的借鑒意義。

從第三章的探討中，我們深切知道數學在人類知識發展過程中的確起了作用，因此數學是人類文化的重要資產。既然數學在知識探索過程中是不容忽視的，因此數學的重要性就不在話下，或更甚之，我們可以大膽的說數學與我們的生活是脫離不了關係的。只是很可惜數學，伊姆雷·拉卡托斯（Imre Lakatos，1922－1974）認為科學史可以看作科學的理性之“檢驗”。因此，若要好好地清楚解決科學是如何發展這個問題，就必須要將科學哲學與科學史兩者互相結合。康德宣稱：「不具內容的思維是空虛的，不具概念的直觀是盲目的。」²³⁴所以拉卡托斯根據這樣的模式也這麼說：

他根據康德這樣的思想提出了一個著名的口號：沒有科學史的科學哲學是空洞的科學哲學，而沒有科學哲學的科學史是盲目的科學史。可見拉卡托斯在一定程度上體現了邏輯與歷史統一的辯證思想。²³⁵

同樣的，我們也可以說：沒有數學史的數學是空洞的數學，而沒有數學的數學史是盲目的數學史。回顧一下我們的求學階段，上數學課時，數學課本中的數學史的介紹，通常是被教師們所跳過、所忽略的，因為它在聯考中是不會出現的，它不會為我們的分數加分，因為我們社會的現象是：學校教育是一個應試教育，而不是一個素質教育。所以，數學史是被忽略、被放在一旁的。雖然國內由洪萬生先生所領導的團隊成立的 HPM²³⁶，在數學史與數學教學上進行研究與發表文章，但是由於施行者與執行者之間存在著落差，以致似乎沒那麼被數學教師所接觸。所謂：

歷史背景是重要的，現在的根，深紮在過去。²³⁷

²³⁴ 傅偉勳：《西洋哲學史》台北：三民，民 77 年十版，p.393。

²³⁵ 舒煒光、邱仁宗：《當代西方科學哲學述評》台北：水牛，民 80，P197-198。

²³⁶ 洪萬生：《此零非彼〇：數學、文化、歷史與教育》台北：台灣商務，2006，序。所謂 HPM，是 Relations between History and Pedagogy of Mathematics（數學史與數學教學之關聯）的縮寫，同時，它也代表一個以此為宗旨、且隸屬於國際數學教育委員會（International Congress on Mathematics instruction，ICMI）的國際研究群。

²³⁷ 吳讓泉等：《數學的智慧之光》初版，台北市：新潮社，2005，p26。

而從本文中，我們真的可以發現：數學史在數學教育中的確佔了一席之地。很慶幸的，在進行多次數學教育改革之下的現行數學教育，行政官員與教育學者真的也看見數學史在數學教育中所扮演的角色，也將它納入規範之中。但，教育絕不是可以單方面進行的。因為教育是一個有機整體，各個環節與教育中的所有成員是相互關聯的。而，數學也是一個有機整體，牽涉其中的所有各種問題是相互關聯的，它的生命力的過去和現在是不可分離的。因此，

在學習近代數學的今天，追尋它的根，熟悉它的歷史背景，不是無關緊要的，要努力去吸取和發掘它所創造的特色、奇智和真諦。²³⁸

況且，教育是學習者在渦式迴圈的浪漫階段、精確階段和綜合運用階段中動態生成的過程。在教育中，學習者生成的最終目的是成爲一個有智慧的人，希望能夠達到了解自己本身生命與意義的涵義，從而擴展到社會與實踐的層面，最後達到靈魂與境界的完美和諧統一。所以，爲了能達到教育的目的，必須面向具體個人，通過自由與紀律的節奏，借助技術教育及其與科學、文學的統一關係，挖掘古典教育在當代的意義，是教育促進個體生成的有效途徑。

英美大哲懷德海，對圓融和諧的精神，表現得極爲深刻，他所表達的「歷程哲學」(Process philosophy)，基本上就是一種機體主義，強調交融互攝的機體主義，肯定「歷程」(process) 裡面就有「實在」(reality) 成爲其重要名著《過程與實在》的中心思想。現在國內方興的教育改革，何嘗不是朝著這個方向在行走呢？數學課程改革的基本理念，就是朝著重視歷程而行走。因此，莫里斯·克萊因說：

數學即實在 (reality) 的一部分，數學本身即是無價，也絕對值得追尋。

²³⁹

²³⁸吳讓泉等：《數學的智慧之光》初版，台北市：新潮社，2005，p86。

²³⁹莫里斯·克萊因：《數學：確定性的失落》趙學信、翁秉仁譯，台北商務，2004 出版，p3。

因爲，在努力過程中善盡其責，盡其在我，就能充分自我實現。

第二節 建議

從事教職已多年，從一個被給予者到給予者，其中的過程的確值得一說的。當還是個被給予者時，所處的教育環境是較威權、較封閉的，在學校所學得的知識，似乎是與日常生活脫節的。爲何受教育？爲何要讀書？普世的答案應該是爲了應試。因此，在當時身邊的朋友對數學是懼怕的，在那時候就思索著，如何讓身邊的朋友不懼怕數學，在當時所用的方法就是與他述說我在研讀數學過程中所得到的樂趣，以及在考試中得到的分數結果。誠如在今年的大學推甄入選結果出爐中，其中就讀台北市建國中學的程大容，推甄台大數學系順利上榜，聯合報報導如下：

從國中階段就很堅定要念數學系……程大容說，很享受在解題過程中絞盡腦汁，最後得到答案的滿足感。²⁴⁰

與本身的求學過程是相似的：我們皆可在數學解題的過程中，得到數學的答案與真理。似乎也符合了本文所探討的主題，懷德海說：過程就是實在，而實在就是過程。回想起以往的求學經驗中，依稀可發現我是利用過程來記結果的。而這也是本身在從事教職生活中，一直秉持的一個信念。雖說數學教師都有他一個的素養存在，但在功利主義與應試制度之下，似乎過程被捨棄而只重視結果了，這是目前教育體制很大的一個缺失，其實教育改革的出現，也是由此出發的，只是執行者與執行過程還是缺失連連，所以似乎教改沒有預期中的成效。

在陳振宣發表的〈五十年數學教育的反思〉一文中，將其數十年的心聲抒發於中，看完之後真是有些共鳴。其中他說到了：

“題海戰術”的成果是靠花費了大量的精力，反覆練習而取得的。但是學生處於被動的地位，以記憶代替理解，以摹仿代替思索，束縛了思維的自

²⁴⁰ 聯合報（2007），A3 焦點，2007年4月14日。

由，扼殺了學生的創造力，不利於身心的健康發展。²⁴¹

相信這也是多數數學教師會採用的數學教法之一。在聯考壓力之下，明知不可為而又得如此做，相信也是很多對數學擁有熱情的數學教師感到悲哀的地方吧！處於競爭的社會下，每個家長總希望自己的子女能夠有所成，而如此的思維下，也犧牲了學生在求學過程中當有的學習，而屈服在應試制度之下。於此，我強烈建議：要改變應試的方式。唯有改變應試方式，才能讓數學的學習更具意義。

陳振宣在文中又提到：

進入 1980 年代之初，世界數學教育改革經歷了新數學運動由興到衰的變化。數學教育工作者逐漸認識到在數學教育中，應把培養學生的數學思維的能力放在首位，不能侷限於單純的知識傳授。如何提高學生的思維能力，為世界各國研究的重點。²⁴²

從這段文章中，我們也明確看到學習數學，不可以侷限在單純的知識傳授，而應當是要著重於思維能力，唯有重視思維能力的提升，才能真正讓學生學習到帶著走的能力。因為死的知識會隨著時間的流逝而忘記的，但是有活力的知識是會跟著學生走的，更會隨著生活經驗的累積而激發出其創造力的。如同懷德海的過程哲學，是存在著創造力的。因此，我再次強烈建議：數學教育過程中應重視思維能力的提升。而如何做呢？數學教師必須充實自己的數學史的知識。回想我們的求學經驗，在老師的教授過程中，一個數學公式或是定理的形成過程常是被忽略的，但這些公式或定理為何重要，是可在它的形成過程中被看出的，如果忽略了這個部份，將會使著些公式或定理淪為知識的傳授而已。在前面的說明中，我們可以清楚知道數學史在數學教育中是不容忽視的，而越清楚數學史，會越清楚數學在知識的形成以及探索過程中所扮演的角色。換句話說，數學教師必須充實自己的專業知識。說實在的，並不是每個數學教師的數學素養是夠的。其實有很多學生數學沒學好，是跟他的數學教師是有關的。因為，教育是一個過程，過程並

²⁴¹ 陳振宣(1996)，〈五十年數學教育的反思〉，《數學傳播》，1996年3月，20卷1期，pp72-73。

²⁴² 陳振宣(1996)，〈五十年數學教育的反思〉，《數學傳播》，1996年3月，20卷1期，p.73。

不是只會影響現在，它是會連帶著影響將來的。因此，身為一個教師，豈能忽視過程的重要呢？所以真的很希望台灣未來的數學教育環境是一個重視過程而不是一個強調應試的環境，因為過程就是實在，而實在就是過程，唯有重視過程，才能真正洞悉數學真正的價值，而學生或教師體會到數學真正的價值，也會將數學與生活結合達到融合。如此相信數學在普世的眼中不再是可怕的學科，而是發現原來數學是與我們的生活息息相關，進而讓數學真正是我們生活的一部份。

參考文獻

一、書籍

- Colin Adams、Joel Hass, Abigail Thompson (2003), 《How to Ace Calculus: The Streetwise Guide》師明睿譯, 台北: 天下遠見, 第一版。
- David Berlinski (2000), 《A Tour of the Calculus》陳雅茜譯, 台北: 天下遠見, 第一版。
- Howard Eves (1993), 《數學史概論》, 歐陽絳譯, 第一版, 台北市: 曉園。
- Marilyn Nickson (2004), 《數學的學習與教學: 六歲到十八歲》詹勳國等譯, 初版, 台北市: 心理, 2004。
- M·克萊因 (2005): 《數學與知識的探求》, 劉志勇譯, 上海, 復旦大學出版社。
- Richard R. Skemp (1995), 《The Psychology of Learning》陳澤民譯, 台北市: 九章, 六版。
- Rob Eastaway Jeremy Wyndham (2004), 《Why do buses come in three: the hidden mathematics of every life》蔡承志譯, 台北: 三言社。
- Rob Eastaway Jeremy Wyndham (2005), 《How Long Is a piece of String? more hidden mathematics of every life》蔡承志譯, 台北: 三言社。
- Ron Jarman (2004), 《Teaching Mathematics in Rudolf Steiner》李心儀、劉雲英、謝淑樺譯, 台北: 洪葉文化, 初版。
- 王文科 (2003), 《課程與教學論》五版, 台北市: 五南。
- 王樹禾 (2004), 《數學演義》北京: 科學出版社, 2004。
- 王懷權 (1986), 《數學發展史 (中) 代數學發展史》, 新竹: 凡異, 二版。
- 田中裕 (2001), 《懷特海——有機哲學》, 包國光譯, 第一版, 河北教育出版社。
- 休謨 (1980), 《人性論》, 關文運譯, 北京: 商務印書館, 民 69。
- 安傑利斯 (2004), 《哲學辭典》, 段德智、尹大貽、金常政譯, 二版, 台北市: 貓頭鷹出版, 2004 年 4 月
- 行政院教育改革委員會 (1995), 《第一、二期教改諮議報告書》, 1995。
- 行政院教育改革審議委員會 (1996), 《教育改革審議報告書》, 民 85。
- 吳汝鈞 (2004), 《機體與力動: 懷德海哲學研究與對話》, 台灣商務。
- 吳讓泉等 (2005), 《數學的智慧之光》初版, 台北市: 新潮社, 2005。

- 沈清松（1994），《現代哲學論衡》台北黎明，民 83 年四刷。
- 林炎全（1983），《數學史－數學思想的發展（下冊）》，台北市：九章。
- 柏格森（1999），《創造進化論》肖律譯，一版，北京：華夏，1999。
- 洪萬生（2006），《此零非彼〇：數學、文化、歷史與教育》台北：台灣商務。
- 科朗（2005），《甚麼是數學－對思想和方法的研究》，張飴慈譯，上海：復旦。
- 胡作玄（2003），《數學》，香港：中華。
- 胡塞爾（1990），《歐洲科學危機和超驗現象學》張慶熊譯，台北唐山，1990 初版。
- 孫文先（1992），《中學數學教學法通論》，台北市：九章，一版。
- 徐炎章等（1998），《數學美學思想史》初版，台北：曉園，1998。
- 殷海光（1991），《邏輯新引》，台北：水牛，初版。
- 高強華主編（2000），《九年一貫課程革新論文集》，台北：國立台灣師範大學。
- 康德（1997），《任何一種能夠做為科學出現的未來形上學導論》龐景仁譯，一版，北京：商務，1997。
- 張世忠（2003），《建構取向教學－數學與科學》，台北：五南，初版。
- 張凱元（2004），《解讀九年一貫教育》，台北：心理。
- 張景中（1996），《數學與哲學》，台北市：九章。
- 教育部（1994），《國民小學課程標準》，台北市：台捷。
- 教育部（1998），《愛的啓航——新課程的天空》，1998。
- 教育部（1999），《教育改革成果報告：跨世紀教改工程》，1999。
- 教育部（1999），《邁向教育新世紀：全國教育改革檢討會議》，1999。
- 教育部（2001），《國民中小學九年一貫課程暫行綱要》，台北市：教育部。
- 教育部（2003），《國民中小學九年一貫課程綱要》，台北：教育部。
- 教育部（2003），《樂在數學－國民中小學數學教學參考手冊》，台北市：教育部。
- 莫里斯·克萊因（2004），《數學：確定性的失落》趙學信、翁秉仁譯，台北商務。
- 陳奎德（1994），《懷特海》，初版，台北：東大，1994。
- 陳德和（2002），《臺灣教育哲學論》初版，台北市：文史哲，民 91。
- 傅佩榮（1995），《愛智的趣味：亞里斯多德. 多瑪斯. 休謨. 懷德海》，洪建全教育文化基金會出版，1995。
- 傅偉勳（1988），《西洋哲學史》台北：三民，民 77 年十版
- 曾仰如（1995），《柏拉圖的哲學》二版，台北：台灣商務，1995。
- 舒煒光、邱仁宗（1991），《當代西方科學哲學述評》台北：水牛。

- 華宏祖（1999），《大學微積分解題方法》，新竹：理藝，出版。
- 黃光國（2001），《社會科學的理路》，台北市：心理。
- 黃光國（2003），《教改錯在哪裡？——我的陽謀》，台北 INK 印刻出版有限公司，2003 年 9 月初版。
- 黃光雄（1996），《教學理論》，高雄：復文。
- 黃光雄主編（1996），《教學原理》，台北：師大書苑。
- 黃貝德（1995），《西方哲學的發展軌跡》，台北市：揚智文化。
- 黃武雄（1994），《中西數學簡史》，台北縣：人間文化。
- 黃武雄（2003），《學校在窗外》，台北新店：左岸文化。
- 黃國彥（1994），《懷德海教育思想之研究》，嘉新水泥文化基金會，民 58。
- 黃榮村（2005），《在槍聲中且歌且走——教育的格局與遠見》，台北：天下，2005 年 10 月第一版。
- 黃毅英（1997），《邁向大眾數學的數學教育》一版，台北市：九章，1997。
- 楊士毅（1987），《懷德海哲學》，台北：東大，初版，民 76。
- 楊士毅（2001），《懷德海哲學入門——超越現代與後現代》，台北：揚智。
- 楊維哲（2000），《高中資優生的立體解析幾何學》，台北：三民，初版三刷。
- 劉玉玲（2003），《課程發展與設計》，台北縣：桂冠。
- 鄭毓信、李國偉（1999），《數學哲學中的革命》，台北市：九章。
- 鄧東皋、孫小禮、張祖貴編（1994），《數學與文化》，台北：凡異，1994。
- 獨狼（2006），《我教女兒學數學》，初版，台北縣汐止市：雅典文化。
- 戴久永（1986），《現代數學入門（中）》，新竹：凡異，二版。
- 戴久永（1987），《現代數學入門（中）》，新竹：凡異，一版。
- 謝幼偉（1974），《懷黑德的哲學》，台北：先知，民 63。
- 龐之垣（1993），《常用數學解題思維方法》，新竹：凡異，初版。
- 懷得海（2003），《過程與實在》，楊富彬譯，北京：中國城市出版社，2003。
- 懷德海（1994），《教育的目的》吳志宏譯，初版，台北市：桂冠，1994。
- 懷德海（2000），《科學與現代世界》，傅佩榮譯，初版，台北立緒，民 89。
- 藪內清（1981），《中國算學史》林桂英、簡茂祥譯，台北永和：聯鳴文化。

二、期刊

- 丘成桐（1992），〈我的求學經驗〉，《數學傳播》，1992年9月，16卷3期，頁1-5。
- 丘成桐（1999）〈數學的內容、方法和意義〉，《數學傳播》，1999年3月，23卷1期，頁3-7。
- 石厚高（1998），〈建構數學的迷思〉，《數學傳播》，1998年12月，26卷4期，頁1-6。
- 石厚高（1998），〈西方文化中的數學〉，《數學傳播》，1998年12月，22卷4期，頁1-6。
- 石厚高（2003），〈數學人物〉，《數學傳播》，2003年6月，27卷2期，頁81-92。
- 石厚高（2004），〈二十世紀數學的演進〉，《數學傳播》，2004年6月，28卷2期，頁88-92。
- 吳亭萱等（2004），〈64年、82年、90年、92年數學課程教材綱要之比較〉，載於《洪雪芬（主編），64年、82年、90年、92年國小數學教材綱要整理與比較》，頁101-143。國立中山大學教育學程中心，未出版，高雄市。
- 吳清山（1999），〈推行「國民教育階段九年一貫課程」學校行政配合之探究〉，載於《教育研究資訊》，1999.1，7（1），頁14-21。
- 吳開朗（1993），〈數學中的公理化方法（上）〉，《數學傳播》，1993年3月，17卷1期，頁1-7。
- 吳開朗（1993），〈數學中的公理化方法（下）〉，《數學傳播》，1993年6月，17卷2期，頁1-7。
- 李迪（2002），〈對中國傳統筆算之探討〉，《數學傳播》，2002年9月，26卷3期，頁59-68。
- 李國偉（1978），〈數學的本質〉，《數學傳播》，2卷3期，頁17-21。
- 李善良、單墀（2002），〈我們為什麼要學習數學——兼及新世紀中小學數學課程目標〉，《數學傳播》，26卷4期，頁77-88。
- 林炎全（1997），〈中國數學課程的演變〉，《數學傳播》，1997年9月，21卷3期，頁31-44。
- 金周新（1993），〈序、系與邏輯、真理（Order、Hierarchy and Logic、Truth）〉，

- 《數學傳播》，1993年3月，17卷1期，頁1-9。
- 俞懿嫻：〈懷海德與機體哲學〉，載於東海哲研所主編《東海哲學研究集刊第七輯》，頁149—175。
- 徐利治、鄭毓信（1994），〈數學哲學現代發展概述〉，《數學傳播》，18卷1期，頁3-10。
- 康明昌（1999），〈從五十年代說起〉，《數學傳播》，1999年12月，24卷4期，頁69-76。
- 張海潮（2001），〈我所知道的愛因斯坦〉，《數學傳播》，2001年9月，25卷3期，頁27-28。
- 郭郁智（1999），〈懷德海哲學及其教育思想之研究〉，載於《教育研究》，7期，頁397-409。
- 陳振宣（1996），〈五十年數學教育的反思〉，《數學傳播》，1996年3月，20卷1期，頁72-75。
- 陳榮波（1989），〈〈學記〉與懷德海的教育觀比較〉，載於東海哲研所主編《中國哲學與懷德海》，台北：東大，1989，頁145—173。
- 陳榮波〈懷德海的教育觀與中國傳統教育思想〉，載於東海哲研所主編《東海哲學研究集刊第九輯》，頁157—173。
- 傅海倫（2003），〈從“賈憲三角”看數學史在數學教育中的作用和價值〉，載於《數學傳播》27卷1期，民92年3月，頁85—90。
- 程石泉（1989），〈懷德海學術討論會論文集序言〉，載於東海哲研所主編《中國哲學與懷德海》，台北：東大，1989。
- 黃永和（1998），〈數學哲學及其對數學教育的影響與啓示〉，教育研究資訊，6（1），頁91-105。
- 黃敏晃（1994），〈國民小學數學新課程之精神〉，載於《國民小學數學科新課程概說》，教育部台灣省國民學校教師研習會編印，1994，頁1—17。
- 黃敏晃（2003），〈數學的本質與格式〉，《研習資訊》，20（2），頁36-47。
- 楊美伶（2003），〈教師如何因應數學課程的變革〉，《國民教育》，44（2），頁27-31。
- 溫明麗（1999），〈當代臺灣教育哲學典範之轉移〉，載於《哲學雜誌》第29期，1999年8月，頁48—69。
- 葉坤靈（1998），〈四位西洋思想家的教育改革論點—教育視野之擴展〉，載於《師大學報》，民87，頁1—19。
- 董世平（1994），〈數學與真理〉，《數學傳播》，1994年3月，18卷1期，頁

1-5。

- 蔡鈺鑫 (1992), <懷德海論數學教育>, 載於《現代教育》, 民 81, 頁 88-98。
- 鄭毓信 (1994), <數學哲學的內容和意義>, 《數學傳播》, 18 卷 1 期, 頁 11-13。
- 鄭毓信 (1998), <建構主義與數學教育>, 《數學傳播》, 1998 年 9 月, 22 卷 3 期, 頁 36-49。
- 蕭文強 (1992), <數學=證明?>, 《數學傳播》, 1992 年 12 月, 16 卷 4 期, 頁 1-11。
- 蕭文強 (1992), <數學史和數學教育:個人的經驗和看法>, 《數學傳播》, 1992 年 9 月, 16 卷 3 期, 頁 1-8。
- 鍾靜 (1999), <落實國小數學新課程之意圖與學校本位的進修活動>, 《課程與教學季刊》, 2 (1), 頁 15-35。
- 鍾靜 (2003), <「建構數學」的誤解與迷思>, 《國民教育》, 44 (2), 頁 5-10。
- 鍾靜 (2005), <論數學課程近十年之變革>, 載於《教育研究月刊》, 133 期, 2005 年 5 月, 頁 124-134。
- 譚建國 (1996), <數學美賞析(上)>, 《數學傳播》, 1996 年 3 月, 20 卷 1 期, 頁 55-61。
- 譚建國 (1996), <數學美賞析(下)>, 《數學傳播》, 1996 年 6 月, 20 卷 2 期, 頁 69-76。