兩階段投資組合均值－變異數模式最佳化分析

Optimization Analysis of Two-stage Portfolio Mean-variance Model

許晉雄[1] 鄒慶士[2]

(Received: Dec. 1, 2009；First Revision: Jan. 20, 2010；Accepted: Feb. 24, 2010)

摘要

如何將有限的資金在眾多之投資標的中作有效的配置，是財務管理領域中重要的議題之一，此問題稱為投資組合選擇。在傳統的投資組合理論中，最著名的是馬可維茲(1952)所提出的均值-變異數模式，在過去處理此類的投資組合選擇問題大多是將此單階段且具有衝突性的目標合併轉為單一目標的形式，並以單目標最佳化技術進行求解。本文即針對當投資組合最佳化均值-變異數模型中包含一些實務上所需的限制條件，例如基數限制或允許賣空情況，進行投資組合問題求解，主題探討分別在賣空與不允許賣空和基數限制與無基數限制的條件下獲得效率之投資組合。在第二階段，有關於在投資組合選擇問題中，再利用多屬性決策分析中的簡單加權法和 TOPSIS 法兩種方法，對投資組合進行分析排序，提供投資者更多樣化之投資組合選擇，由研究結果可發現投資者在選擇其投資組合時，應考慮更多全面性的績效指標。

關鍵詞：投資組合、基數限制、簡單加權法、TOPSIS 法

Abstract

The allocation of limited capital to a variety of assets available is one of the important problems in financial management. This problem is called portfolio selection problem. The mean-variance (MV) portfolio model originally proposed by Markowitz (1952) has been playing a critical role in the portfolio selection theory. Most studies had been made to solve this single-stage problem with single-objective optimization techniques by aggregating conflicting and incommensurate objectives into a single one. In this paper, we discuss the MV portfolio model with some practical considerations, such as cardinality constraints and short sales cases, are incorporated into this portfolio optimization models. Finally, Multi-Attribute Decision Making (MADM) methods named Simple Additive Weighting (SAW) Method and Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution (TOPSIS) method are employed to outrank the efficient portfolio that decision makers satisfy most in the second stage. We try to propose alternative choices to the decision makers when they want to optimize their asset allocations.

[1] 東吳大學財務工程與精算數學系副教授
[2] 國立台北商業技術學院企業管理系教授

***Keywords*:** Portfolio、Cardinality Constraints、Simple Additive Weighting Method、Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution Method

1. 緒論

近來，隨著物價上漲，使得投資大眾的荷包不僅縮水嚴重，也開始對未來的投資理財計劃充滿疑慮，因此越來越多投資者希望可藉由投資組合理論與現實情況之分析與判斷，在考慮到風險因素下，使其投資報酬極大化。另外一方面，金融市場的多元化使得資產管理的概念逐漸盛行，而在目前資產管理中最為重要的議題之一即是投資組合配置問題，也就是說投資人最在意的事情，就是如何調整投資組合中各資產的投資比例，以期追求投資報酬最大與報酬變異數最小之投資目標。

關於投資組合的學術研究，最早為Markowitz於1952年「Portfolio Selection」一文中所提出的「投資組合理論」，即以歷史報酬的平均數與變異數衡量投資組合的期望報酬與風險，做為選擇投資組合的依據，其基本假設為投資者皆遵循效率原則，在一定的投資報酬率水準上，選擇使投資風險極小化之效率投資組合，此最佳化問題可表示為二次規劃(Quadratic Programming)之模式。然而，在所有不同報酬水準下的效率投資組合之集合即構成效率前緣(Efficient Frontier)，位於效率前緣上之投資組合，皆為效率投資組合。在Markowitz的投資組合理論中，對於上述風險性投資組合選擇模型通常稱為均值-變異數模型(Mean Variance Model)。

關於其他相關的Markowitz模型，有許多學者探討不同條件下所得的投資組合模式，如Kendall and Su(2005)提出投資組合有兩種類型：未受限制的投資組合以及受限制的投資組合，前者為投資者可利用賣空股票的方式進行投資；反之，後者為投資者在選擇投資組合時是在不允許賣空的限制下進行投資，在Markowitz的均值-變異數模型僅考慮不允許賣空的情況，但如果把賣空的假設條件排除在外，對於投資者可能會失去某種意圖的套利機會。另外，Elton等人(2007)在研究實證分析中提及投資人藉由操作融券放空可提高投資組合報酬，但同時也具有較高的風險。他們認為投資人可以出售不屬於投資人本身的證券，這種交易的形式就稱之為融券放空，也就是說當投資人進行融券放空某證券，則此證券視為售出，而因為投資人本身並不擁有此證券，所以必須透過經紀商借到合適的證券提供給融券者並交割給購買者。

傳統Markowitz的均值-變異數模型僅考慮不允許賣空的情況，且只能讓投資者擁有單一的目標，亦即追求風險極小化，但往往投資者追求是多目標的，也就是說同時追求報酬極大化和風險極小化，因此在本質上是屬於多目標決策問題，此問題可運用多目標最佳化(Multi-Objective Optimization, MOO)來求解投資組合的問題，以協助投資者在眾多目標下尋找有效之投資組合。過去在處理多目標的問題時，是轉化成單目標規劃問題，再利用傳統最佳化單目標規劃技術進行求解，近年來關於求解投資組合問題的方法，大多是以模擬退火法(Simulated Annealing)、塔布搜尋法(Tabu Search)和基因演算法(Genetic Algorithm)等演算法進行求解，其中，Chang、Meade、Beasley及Sharaiha(2000)利用遺傳演算法求解實務交易中關於基數限制(Cardinality Constraints)之投資組合問

題，以及針對各投資標的設定投資比例的範圍，進而建構出基數限制下之效率前緣。

對於投資者而言，在目前的社會中，由於資訊收集來源的管道眾多，在做決策時已不能只從單一屬性或是標準來決定，而是要考慮相關各層面的因素，以符合實際問題的需求。在管理者的決策領域中，所面臨的問題經常包含多重評估屬性，而這些屬性卻往往彼此之間都是互相衝突的。多屬性決策(Multi-Attribute Analysis Model)方法，正是因應此需求，被應用來解決上述所具有多屬性、多衝突的問題。Hwang和Yoon(1981)認為多屬性決策方法為決策者在多個質化或量化的評估準則下，對一組有限、可數且數目不大的已知可行替代方案進行評估，針對各替代方案之優劣進行排序。因此針對投資組合模型的求解結果提供給投資者參考，讓投資者在評估本身的風險偏好程度之後，根據求解出的投資組合進行資金之最佳配置，以獲取利益。在多屬性決策分析中，以投資組合之期望報酬、風險作為投資組合的評選依據，可提供投資者多元化的投資組合選擇。例如Ehrgott、Klamroth及Schwehm(2004)針對Markowitz的均值-變異數模型進行延伸，在文中提出五個衡量目標的準則，除了傳統的平均報酬與變異數外，還有股票12個月和3年之績效表現、股票之每年現金股利、股票在Standard and Poors Star Ranking的評等表現及股票之波動率變化程度來衡量投資組合之績效。此篇文章中，作者提出一個基於多屬性效用理論的投資組合最佳化模型，來延伸起源於Markowiz所提出之均值-變異數模型，並以客製化區域搜尋方法(Customized Local Search)、模擬退火法、塔布搜尋法和基因演算法進行實證分析。

因此，本研究的目的第一階段即是參考Schrage(2003)運用LINGO，探討在不同投資限制條件下，求解投資組合的效率前緣。第二階段，在第一階段所得結果，投資人可依照個人的偏好、目標及風險承受力的差異，利用多屬性決策理論的簡單加權法(Simple Additive Weighting method, SAW method)或TOPSIS法(Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution method)，做出不同的投資決策，以讓投資者可以用不同的角度來尋求更多樣化的投資組合。

2. 投資組合均值-變異數模式

投資組合係指由一種以上的證券或資產構成的集合，其投資組合理論的焦點在於如何使風險最低，報酬率最大以及風險與投資績效間的取捨。關於投資組合的模型最為有名的是 Markowitz 在 1952 年於「Portfolio Selection」一文中所提出的均值-變異數模型(Mean-Variance Model)，此模型開啟金融投資量化研究的開端，成為金融投資理論研究的主要議題和決策實踐的重要工具。均值-變異數模型藉由分析變異數–共變異數矩陣(Variance–Covariance Matrix)，進而推導出報酬率及標準差構面下之效率前緣，期使風險(以報酬率之標準差衡量)固定的情況下，可使報酬率達到最大，且在報酬率固定之下，可使風險降到最低，以制定投資之決策。

在傳統的均值-變異數模型中，假設有n項資產可以投資，投資者欲決定各項資產之投資比例，所以投資組合最佳化問題的決策變數為各資產權重x_i ($i=1,2,\ldots,n$)所形成之向量，以$\vec{\mathbf{x}}=\left[x_1,x_2,\ldots,x_n\right]^T$表示，且對所有的資產而言，且$\sum x_i=1$。另外，各資產的平

均報酬為 p_i，以向量 $\vec{\mathbf{p}} = [p_1, p_2, ..., p_n]^T$ 表示所有資產的平均報酬。因此，投資組合期望報酬為個別資產報酬加權平均，以 $x_p = \vec{\mathbf{p}}^T \vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ 表示，而資產的變異數和共變異數以矩陣 $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \cdots \sigma_{1n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \sigma_{n1} \cdots \sigma_{nn} \end{bmatrix}$ 表示，其中 σ_{ii} 為資產 i 的變異數，σ_{ij} 為資產 i 和資產 j 的共變異數，所以投資組合的變異數以 $\sigma_p^2 = \vec{\mathbf{x}}^T V \vec{\mathbf{x}}$ 表示。

一般而言，在允許賣空之下有五種不同最佳化投資組合模型如下所示:

$$\text{模型1: 極大化} \quad x_p = \vec{\mathbf{p}}^T \vec{\mathbf{x}} \qquad \text{受限制於} \quad \vec{1}^T \vec{\mathbf{x}} = 1 \tag{1}$$

$$\text{模型2: 極小化} \quad \sigma_p^2 = \vec{\mathbf{x}}^T V \vec{\mathbf{x}} \qquad \text{受限制於} \quad \vec{1}^T \vec{\mathbf{x}} = 1 \tag{2}$$

上述模型 1 是一個線性規劃模式，且模型 2 是一個單目標的二次規劃模型，許多投資組合模型都是建構在此模型基礎之上，而這兩個模型的一個侷限性就是僅考慮投資者是追求極大化報酬且不考慮風險或是追求極小化風險且不考慮報酬的投資特性。另外還有三種投資組合模型，分別為模型 3、模型 4 及模型 5。

$$\text{模型3: 極大化} \quad x_p = \vec{\mathbf{p}}^T \vec{\mathbf{x}} \qquad \text{受限制於} \quad \vec{1}^T \vec{\mathbf{x}} = 1 \text{ 且 } \vec{\mathbf{x}}^T V \vec{\mathbf{x}} = \sigma^{2*} \tag{3}$$

$$\text{模型4: 極小化} \quad \sigma_p^2 = \vec{\mathbf{x}}^T V \vec{\mathbf{x}} \qquad \text{受限制於} \quad \vec{1}^T \vec{\mathbf{x}} = 1 \text{ 且 } \vec{\mathbf{p}}^T \vec{x} = p^* \tag{4}$$

$$\text{模型5: 極大化} \quad x_p = \vec{\mathbf{p}}^T \vec{\mathbf{x}} \qquad \text{極小化} \quad \sigma_p^2 = \vec{\mathbf{x}}^T V \vec{\mathbf{x}} \qquad \text{受限制於} \quad \vec{1}^T \vec{\mathbf{x}} = 1 \tag{5}$$

一般處理模型5可將上式轉化為：

極小化 $-\vec{\mathbf{p}}^T \vec{\mathbf{x}} + \gamma \vec{\mathbf{x}}^T V \vec{\mathbf{x}}$

受限制於 $\vec{1}^T \vec{\mathbf{x}} = 1$

其中 γ 為風險驅避指標，且 $\gamma \geq 0$

從模型 3 與模型 4 可以觀察出模型具有更嚴謹的限制條件，分別為在既定投資組合風險水準之下(σ^{2*})去追求最大化報酬和在既定期望報酬水準之下(p^*)去追求最小化風

險，其投資權重總和亦為 1。模型 5 屬於多目標規劃模型，投資者同時追求最大化報酬及最小化風險者，但一般處理方法將其轉為單目標問題處理，並在模型的建構中考慮了投資者對於風險趨避程度，而投資權重總和為 1。

3. 兩階段投資組合最佳化分析

一般投資組合管理的目標不外乎假設：風險在一個既定的水準之下，投資者想要最大化報酬或期望報酬在一個既定的水準之下，投資者想要最小化風險。另外，也有一些極端的投資者，他們只希望報酬達到最大化，而不考慮風險；或者是只希望可以最小化風險，不考慮報酬。本研究以LINGO求解單目標最佳化投資組合的效率前緣，接下來再利用多屬性決策理論的簡單加權法或TOPSIS法，求出不同的投資組合決策。

3.1 投資組合模型

本研究考慮投資人對於風險偏好程度有所不同，採用(5)式作為本研究投資組合模型建構之基礎。原則上，投資人會依自己的風險偏好來選擇其投資的對象。換句話說，理性的投資人除了重視風險與報酬間的合理性，投資者必須依個別的可行投資集合，結合自己的風險偏好，來選擇最適投資組合。本研究將融券賣空的操作加入投資行為中，以及加入投資者可對最終投資組合之投資標的限定其總數等，故可根據(5)式發展四種不同投資條件之投資組合，投資者不僅可衡量自己本身對於風險趨避的程度，亦可選擇是否以賣空投資標的之方式進行投資或是對於投資組合限制其投資標的之總額。在投資組合模型中，以γ代表風險趨避指標來衡量投資人對於風險的趨避程度，即代表投資人的風險愛好程度，其值越大表示投資人越不喜歡風險，本研究欲藉由變動γ值來獲得最佳投資組合配置，且基數限制(k)表示投資者可針對投資組合所包含投資標的總額進行設定，但基數限制之設定不可超過無基數限制條件下所求得投資組合中最大投資標的總額，文中以LINGO進行求解投資組合之配置。因此，經本研究修正後之投資組合模型，分為四種情況來加以探討：

投資組合模型(I)：不允許賣空無基數限制

$$
\begin{aligned}
&\text{極大化} && \vec{\mathbf{p}}^T \vec{\mathbf{x}} - \gamma \vec{\mathbf{x}}^T V \vec{\mathbf{x}} \\
&\text{受限制於} && \vec{1}^T \vec{\mathbf{x}} = 1 \\
&\text{且} && x_i \geq 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

投資組合模型(II)：不允許賣空有基數限制

$$
\begin{aligned}
&\text{極大化} && \vec{\mathbf{p}}^T \vec{\mathbf{x}} - \gamma \vec{\mathbf{x}}^T V \vec{\mathbf{x}} \\
&\text{受限制於} && \vec{1}^T \vec{\mathbf{x}} = 1 \\
& && \vec{1}^T \vec{\mathbf{z}} = k \\
&\text{其中} && \vec{\mathbf{z}} = \left[z_1, z_2, \ldots, z_n\right], \text{及 } z_i = \begin{cases} 1 & \text{若 } x_i > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\
&\text{且} && x_i \geq 0
\end{aligned} \tag{7}
$$

投資組合模型(III)：允許賣空且無基數限制

$$
\begin{aligned}
&\text{極大化} && \vec{\mathbf{p}}^T \vec{\mathbf{x}} - \gamma \vec{\mathbf{x}}^T V \vec{\mathbf{x}} \\
&\text{受限制於} && \vec{1}^T \vec{\mathbf{x}} = 1
\end{aligned} \tag{8}
$$

投資組合模型(IV)：允許賣空且有基數限制

$$
\begin{aligned}
&\text{極大化} && \vec{\mathbf{p}}^T \vec{\mathbf{x}} - \gamma \vec{\mathbf{x}}^T V \vec{\mathbf{x}} \\
&\text{受限制於} && \vec{1}^T \vec{\mathbf{x}} = 1 \\
& && \vec{1}^T \vec{\mathbf{z}} = k \\
&\text{其中} && \vec{\mathbf{z}} = \left[z_1, z_2, \ldots, z_n\right], \text{及 } z_i = \begin{cases} 1 & \text{若 } x_i \neq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}
\end{aligned} \tag{9}
$$

3.2 多屬性決策

決策的制訂是從眾多的可能選擇方案中，選擇一個可能方案的過程，而幾乎所有多屬性決策方法常被使用在「選擇」或「評估」方案層面的問題。多屬性決策方法是在一個有限集合中，就備選方案(Alternative)中的特質萃取屬性，分別進行評比後，了解各方案的優劣，並選擇較優者，基於決策者的偏好，而在一有限集合內選擇問題。多屬性決策方法種類很多，若根據決策者所提供的資訊來加以分類，可將多屬性決策方法分為三大類(Yoon和Hwang, 1995)：1.無法獲得決策者的偏好資訊，2.可獲得決策者對環境的偏好資訊，3.可獲得決策者對屬性的偏好資訊。除了Yoon和Hwang(1995)所列舉之十三種方法，另外，如多屬性效用理論(Multiple Attribute Utility Theory)、灰色系統理論中之灰關聯分析法，及模糊理論之模糊多屬性決策等，都是屬於多屬性決策方法。多屬性決策方法種類繁多，每個方法所依據的理論也不盡相同，在Yoon和Hwang所提出的多屬性決策方法分類圖中，包括簡單加權法、線性指派法、層級分析法、ELECTRE法和TOPSIS法，本研究以簡單加權法與TOPSIS法兩種方法針對投資組合問題進行多屬性決策分析。

3.2.1 簡單加權法

簡單加權法因為它的內容原理簡單且運算容易，故為多屬性決策方法中最常被廣為使用之方法，簡單加權法的研究源於Churchman和Ackoff(1954)，而Klee(1971)有進一步更深入討論與研究。在簡單加權法中，每一個屬性均分配有一權重，是為變數之係數，而決策者把每一個屬性項目下的值轉換成數字尺度，先將每一方案的每一屬性之尺度乘

以屬性權重數即可得每一個方案的總分數。然後，算出每一方案之總分數再予以比較，其最高得分的方案則為第一優先方案。簡單加權法主要步驟如下：

1. 首先決策者必須建立出m個替代方案和n個決策屬性，並且給與每個屬性各別對方案影響的重要程度，也就是指派屬性的權重$\mathbf{w}=(w_1,w_2,....,w_n)$。
2. 以一般方程式(10)計算權益屬性，但在計算成本屬性時，需用方程式(11)，再來用以方程式(12)計算每一方案的每一屬性之尺度乘以屬性權重數即可得每一個方案的總得分，然後依此算出每一方案之總得分再予以比較，其最高得分的方案則為第一優先方案。

$$r_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_j^{\max}} \qquad i=1,2,....,m\ ;\ j=1,2,....,n \tag{10}$$

$$r_{ij}=\frac{x_j^{\min}}{x_{ij}} \qquad i=1,2,...,m\ ;\ j=1,2,....,n \tag{11}$$

$$A^*=\left\{A_i \ \middle|\ \max\sum_{j=1}^{n} w_j r_{ij}\right\} \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j=1 \tag{12}$$

其中　x_{ij}為第i方案在第j屬性之原始評估值。

$x_j^{\max}$ 為第j屬性之原始評估值中最大值。

$x_j^{\min}$ 為第j屬性之原始評估值中最小值。

簡單加權法的基本假設為其每個評估屬性間需完全獨立(Yoon 和 Hwang, 1995)，其意義為單一屬性對方案總分數的貢獻是獨立於其他屬性的價值。Fishburn(1976)也提及決策者在使用簡單加權法時，其在一個屬性下所決定之評估值不能受到其他評估值的影響。然而，Edwards(1997)及 Farmer(1987)卻都證明簡單加權法在沒有精確的緊守各屬性間完全獨立的假設下，其所得的結果依然非常接近正確值。由以上對簡單加權法基本加設研究的相關文獻可知，決策者在使用簡單加權法最好能確認各屬性間的獨立性，但如無法確保屬性間的完全獨立性，由此二位學者的證明，其所得到的排序結果能然具有高度的可靠性。

3.2.2 TOPSIS 方法

TOPSIS法是由Hwang 和 Yoon於1981年所發展出來的一種多屬性評估方法，係改進Zeleny(1974)的妥協解距離理想解最近的概念而成之技術。學者們認為TOPSIS是當我們選擇一個方案時，必須根據各屬性所建立的n維空間裡的所有方案裡有與正理想解產

生最短的距離和負理想解產生最遠的距離。因此，其基本觀念乃在於先界定正理想解(Positive Ideal Solution, PIS)與負理想解(Negative Ideal Solution, NIS)。所謂正理想解是各屬性下的各備選方案最佳值之集合(利益屬性值最大者；成本屬性值最小者)；負理想解正好相反，是各屬性下的各備選方案最差值之集合(利益屬性值最小者；成本屬性值最大者)，被選擇的方案應是距正理想解最近，且距負理想解最遠。

1. 計算正規化評估值

其向量正規化計算公式如下：

$$r_{ij}=\frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}x^{2}_{ij}}}\qquad i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n \tag{13}$$

其中 x_{ij} 為第 i 方案在第 j 屬性之原始評估值。

2. 計算加權後正規化評估值

$$v_{ij}=w_jr_{ij}\qquad i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n \tag{14}$$

其中 w_j 為第 j 屬性的權重值。

3. 決定正理想解 A^* 與負理想解 A^-

$$\begin{aligned}A^*&=\left\{v^*_1,v^*_2,\cdots v^*_j,\cdots,v^*_n\right\}\\&=\left\{\left(\max_i\ v_{ij}\,\middle|\,j\in J_1\right),\left(\min_i\ v_{ij}\,\middle|\,j\in J_2\right)\middle|\,i=1,\cdots,m\right\}\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}A^-&=\left\{v^-_1,v^-_2,\cdots v^-_j,\cdots,v^-_n\right\}\\&=\left\{\left(\min_i\ v_{ij}\,\middle|\,j\in J_1\right),\left(\max_i\ v_{ij}\,\middle|\,j\in J_2\right)\middle|\,i=1,\cdots,m\right\}\end{aligned} \tag{16}$$

其中 J_1 為一效益屬性的集合,且 J_2 為一成本屬性的集合。

4. 計算各替代方案在 n 維空間裡中正理想解與負理想解的歐氏距離

(1) 正理想解的歐氏距離

$$S_i^*=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(v_{ij}-v^*_j)^2}\qquad i=1,2,\cdots,m \tag{17}$$

(2) 負理想解的歐氏距離

$$S_i^-=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(v_{ij}-v^-_j)^2}\qquad i=1,2,\cdots,m \tag{18}$$

5. 計算各替代方法對正理想解的相對近似度

計算公式如下：

$$C_i^* = \frac{S_i^-}{\left(S_i^* + S_i^-\right)} \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{19}$$

其中 $0 \le C_i^* \le 1$，當 C_i^* 值約接近 1，則其方案與正理想解 A^* 越接近。

6. 按照 C_i^* 值大小排定方案之優劣順序

其值越大者，方案的偏好程度越高。

4. 投資組合之實例驗證

本研究就投資人熱中之美國股市新興產業-資訊科技業、醫療檢測儀器業與金融服務業等，選取 IBM(IBM)、Microsoft(MSFT)、Apple(AAPL)、Quest Diagnostics(DGX)、Bank of America(BAC)共 5 支股票進行分析，樣本期間為 2002/3/2-2007/2/1，並依據歷史股票資料計算各支股票的月期望報酬、變異數及 Sharpe 指標如下表(Duan，2007)，以求解最佳投資組合。

表 1 樣本資料

股票名稱	期望報酬	變異數	Sharpe指標	Sharpe指標排序
IBM	0.400%	0.6461000%	0.049763409	4
MSFT	0.513%	0.3900000%	0.025976765	5
AAPL	4.085%	1.2677780%	0.362802655	1
DGX	1.006%	0.5598361%	0.134452094	3
BAC	1.236%	0.1622897%	0.306812176	2

4.1 不允許賣空條件

Markowitz 投資組合理論中的均值-變異數模型，假設投資組合中各投資標的之權重都為正數，或是至少不小於零。在最佳化的問題中，這個假設是對投資標的設定非負性限制，意味著不得對於投資組合中的投資標的進行融券賣空之行為，亦即當投資者看跌某支股票價格時，不能從經紀人手中借入該股票拋出。本研究中不允許賣空之投資組合模型，分為無基數限制與基數限制。在含有風險趨避指標的投資組合模型中，以(6)、(7)式分別為不允許賣空無基數限制與基數限制之模型，並應用 LINGO 進行求解。

4.1.1 無基數限制

本小節以 LINGO 對含有風險趨避指標模型之投資組合模型(I)之(6)式求解最佳化投資組合。本研究參考 Duan(2007)風險趨避指標(γ)設定範圍為 0.01~1000。表 2 顯示第一個資料集中各支股票在投資組合中的權重，並以圖 1 呈現最佳資產配置圖。

表 2　LINGO 求解 5 支股票之投資組合模型(I)模式

風險趨避指標	投資組合之期望報酬	投資組合之風險	IBM	MSFT	AAPL	DGX	BAC
0.01	4.0850%	1.26778%	0	0	1	0	0
2	3.0519%	0.59853%	0	0	0.637374	0	0.362626
3	2.4445%	0.34615%	0	0	0.427981	0.046975	0.525045
4	2.1346%	0.25578%	0	0	0.322059	0.082167	0.595774
5	1.9487%	0.21394%	0	0	0.258505	0.103283	0.638212
10	1.5197%	0.15015%	0	2.83E-02	0.118903	0.1502217	0.702549
50	1.0150%	0.12049%	0	0.2405787	0	0.2047404	0.5546809
100	1.0080%	0.12082%	0	0.2493897	0	0.2072667	0.5433436
1000	1.0018%	0.12119%	0	0.2573196	0	0.2095404	0.53314

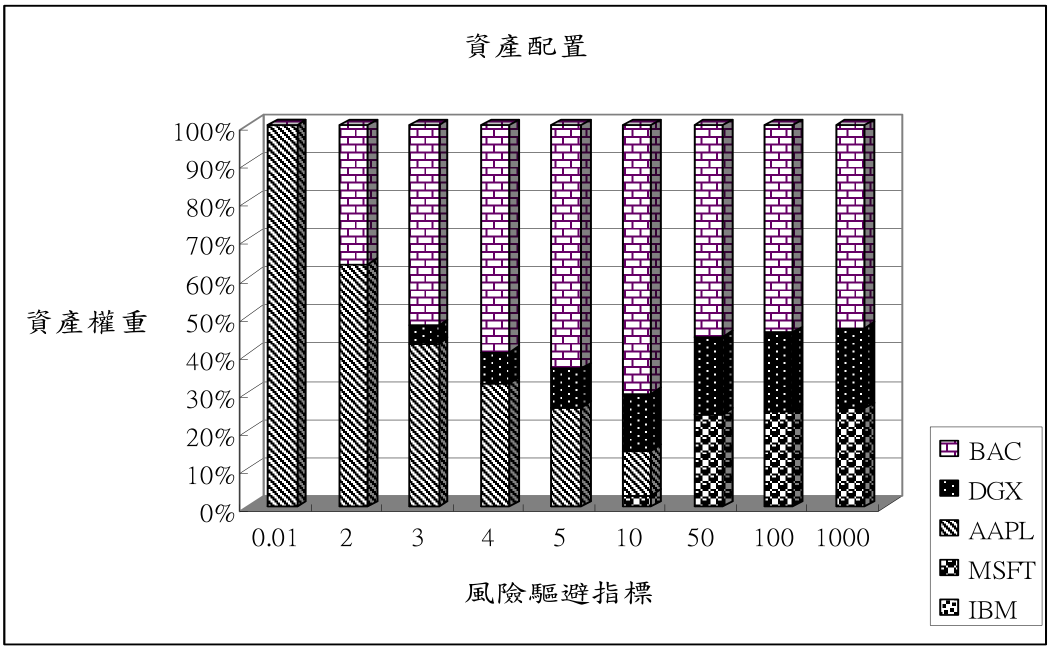

圖 1 LINGO 求解 5 支股票投資組合模型(I)最佳資產配置

我們可以從表 2 中觀察當風險趨避指標 γ=0.01 時，風險愛好的投資者將會投入全部的資金於 AAPL 股票(擁有最高風險與最高報酬之投資標的)，此類型的投資者偏好追求高風險高報酬的投資標的，而經濟學家認為這些投資者喜歡冒險，哪怕贏的機會再弱，但只要贏一次，就能欣喜若狂；相對於當 γ=1000 時，投資者為風險趨避者，會採取投資多支股票以分散投資風險，經實驗結果建議此類型投資者最佳投資組合配置比例為：25.73%的資金於 MSFT 股票、20.95%於 DGX 股票及 53.31%於 BAC 股票。從圖 1 可以觀察到風險趨避指標逐漸增加時，投資組合中的股票數量有明顯的增減變動，當 γ=0.01 增加至 γ=10 時，從圖中看出 AAPL 股票之投資比例從 100%快速下降至 11.89%，這是因為 AAPL 股票在所有投資標的中為最高報酬率、最高風險的股票，故只要投資者對風險偏好程度稍加變化，AAPL 股票投資比例就會有明顯的改變，且投資組合中投資

標的總額也有明顯的增減變動，從原本投資單一股票到至多投資 4 支股票。另外，從表 2 觀察出不管風險趨避指標如何變動下，投資者於 IBM 股票之投資比例皆為零，故推論投資者在投資組合模型(I)之投資條件下所有投資組合皆不會選擇此類股票作為最佳投資組合。

4.1.2 基數限制

本節為探討不允許賣空條件但有基數限制條件，但基數限制設定不可超過無基數限制下所求解出投資組合中包含最多投資標的總額，由表 2 顯示投資組合中至多分別包含 4 支股票，故基數限制不可超過此範圍，故本研究於基數限制之實驗中設定為 2 與 3。利用 LINGO 軟體針對有偏好之投資組合模型(II)之(7)式求解最佳化投資組合，風險趨避指標(γ)同樣設定範圍為 0.01-1000。表 3、表 4 分別呈現第一個資料集中基數限制為 2 與 3，各支股票在投資組合中的權重。

表 3　LINGO 求解 5 取 2 支股票之投資組合模型(II)

風險趨避指標	投資組合之期望報酬	投資組合之風險	IBM	MSFT	AAPL	DGX	BAC
0.01	4.0850%	1.26778%	0	0.0000001	0.9999999	0	0
2	3.0519%	0.59853%	0	0	0.637374	0	0.362626
3	2.4693%	0.35581%	0	0	0.4328995	0	0.5671005
4	2.1781%	0.27085%	0	0	0.3316623	0	0.6693377
5	2.0033%	0.23153%	0	0	0.2693199	0	0.7316801
10	1.6538%	0.17910%	0	0	0.1466352	0	0.8533648
50	1.1935%	0.13961%	0	0	0	0.1849581	0.8150419
100	1.1931%	0.13960%	0	0	0	0.1867599	0.8132401
1000	1.0687%	0.13934%	0	0.2314335	0	0	0.7685665

表 4　LINGO 求解 5 取 3 支股票之投資組合模型(II)

風險趨避指標	投資組合之期望報酬	投資組合之風險	IBM	MSFT	AAPL	DGX	BAC
0.01	4.0850%	1.26778%	0	0.0000001	0.9999998	0.0000001	0
2	3.0519%	0.59853%	0	0	0.6373741	0.0000001	0.3626259
3	2.4445%	0.34615%	0	0	0.4279807	4.70E-02	0.5250446
4	2.1346%	0.25578%	0	0	0.3220586	8.22E-02	0.5957744
5	1.9487%	0.21394%	0	0	0.2585051	0.1032825	0.6382124
10	1.5769%	0.15817%	0	0	0.1313985	0.1455133	0.7231882
50	1.0150%	0.12049%	0	0.2405269	0	0.2047209	0.5547521
100	1.0081%	0.12082%	0	0.2493386	0	0.2072468	0.5434146
1000	1.0018%	0.12118%	0	0.2572691	0	0.20952	0.5332109

從表 3 與表 4 可觀察出當風險趨避指標越大時，基數限制設定為 2 時，其投資組合之報酬率相對較基數限制設定為 3 時，相對地，投資組合的風險也較高，故可推論風險保守者有可能會藉由設定較大的基數限制，來減少投資組合的風險。另外，從上述兩表中可顯示，當投資者為風險愛好者(風險趨避指標 γ=0.01)時，投資者皆幾乎將所擁有的全部資金投資於 AAPL 股票，對於 DGX、MSFT 這兩支股票所投入的資金非常微小。相對於保守型的投資者(風險趨避指標 γ=1000)，基數限制設定為 2 時，由表 3 建議投資者之最佳投資組合為：23.14%的資金於 MSFT 股票及 76.85%於 BAC 股票;設定為 3 時，從表 4 建議投資者之投資組合配置為 25.72%的資金於 MSFT 股票、20.95%於 DGX 股票及 53.32%於 BAC 股票。

從上述二表中可以發現在不允許賣空的條件下，基數限制設定值越大時，投資組合的期望報酬與風險會越接近無基數限制下投資組合的期望報酬與風險，故一個保守的投資者在限制投資標總額的情況進行投資時，欲想維持無基數限制下投資組合的期望報酬和風險時，可將基數限制設定為較大的數值。反之，一個風險愛好的投資者，在不允許賣空且限制投資標的總額之條件下，可藉由設定較低基數限制，提高投資組合的報酬，但也必須相對地承擔高風險。

4.2 允許賣空條件

本研究中允許賣空投資組合模型，可分為無基數限制與基數限制。在此投資組合模型中，以(8)、(9)式分別為允許賣空無基數限制與基數限制之模型，以 LINGO 進行求解，表 5 為 LINGO 求解 5 支股票之投資組合模型(III)的實驗結果，圖 2 顯示 LINGO 求解 5 支股票之投資組合模型(III)的最佳資產配置圖。

4.2.1 無基數限制

從表5得知風險愛好型的投資者在允許放空的投資環境中，會從經紀人手中借入較低報酬之股票進行拋出，以獲取較高資本利得報酬率。例如：在風險趨避指標為0.01時，投資者利用較低報酬率的IBM、MSFT、BAC進行賣空之投資行為，並以最低報酬的IBM股票放空比例最大，其次為MSFT股票，最後DGX股票比例最小，其投資組合之期望報酬與風險分別高達497.55%和25059.3249 %。上述結果與表2 LINGO求解5支股票之投資組合模型(I)的結果互相對應比較之下，可發現雖然在允許賣空的投資環境中，投資組合的期望報酬可以成長四百多倍，但是在風險部分卻高達25059.3249 %，由此可知，投資者雖可利用賣空來賺取高資本利得報酬率，但面臨的風險程度卻也是相當高的。因此，風險保守型與風險中立型的投資者，對於採取賣空融券之套利投資策略，仍然是保守態度。

表 5　LINGO 求解 5 支股票投資組合模型(III)

風險趨避指標	投資組合之期望報酬	投資組合之風險	IBM	MSFT	AAPL	DGX	BAC
0.01	497.5485%	25059.3249%	-66.68949	-59.89318	137.668	-21.9181	11.83282
0.012	414.7991%	17401.5962%	-55.61659	-49.8359	114.7237	-18.21055	9.939346
0.014	355.6926%	12784.3422%	-47.70738	-42.6522	98.33498	-15.56228	8.586878
0.016	311.3626%	9787.6241%	-41.77547	-37.2644	86.04341	-13.57606	7.572521
0.018	276.8837%	7733.1273%	-37.16176	-33.0739	76.4833	-12.03124	6.783572
0.02	249.3107%	6263.5909%	-33.47078	-29.72147	68.83522	-10.7954	6.152426
0.05	100.3520%	1001.6380%	-13.53958	-11.61843	27.53556	-4.12173	2.744182
1	6.0179%	2.5744%	-0.916472	-0.15318	1.379104	0.104916	0.585632
10	1.5494%	0.1409%	-0.318538	0.389913	0.140114	0.315127	0.483384
50	1.1522%	0.1211%	-0.265387	0.438188	0.029981	0.322923	0.474296
100	1.1025%	0.1209%	-0.258744	0.444222	0.016215	0.325147	0.47316
1000	1.0579%	0.1211%	-0.252764	0.449653	0.003825	0.327149	0.472137

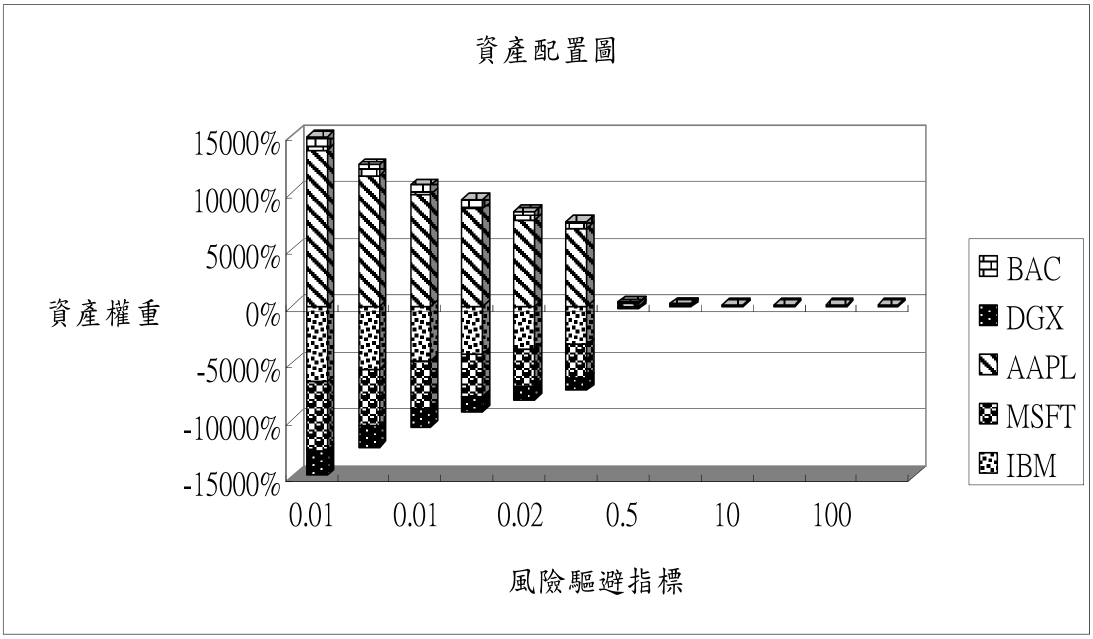

圖 2　LINGO 求解 5 支股票之投資組合模型(III)最佳資產配置圖

4.2.2 基數限制

從表 6 及表 7 二表中得知，基數限制設定值越大時，投資組合期望報酬與風險相對越高，更為接近無基數限制之投資組合期望報酬與風險。另外，根據完整組數之風險趨避指標求解之結果，可觀察出當風險趨避指標介於 0.01~2.2 左右時，其風險愛好、中立型的投資者會運用融券賣空股票之操作，來獲得超額報酬；風險趨避指標大於 2.2 以上，

風險保守型之投資者儘管在可以允許賣空的投資條件環境下，也不會採用賣空股票方式來賺取高額報酬。

表 6　LINGO 求解 5 取 2 支股票之投資組合模型(IV)

風險趨避指標	投資組合之期望報酬	投資組合之風險	IBM	MSFT	AAPL	DGX	BAC
0.01	471.9971%	23527.7764%	-126.9775	0	127.9775	0	0
0.012	393.5766%	16339.2498%	-105.6965	0	106.6965	0	0
0.014	337.5502%	12003.9091%	-90.4926	0	91.4926	0	0
0.016	295.5494%	9191.3616%	-79.09483	0	80.09483	0	0
0.018	262.8734%	7262.5251%	-70.22753	0	71.22753	0	0
0.02	236.7191%	5882.1500%	-63.13	0	64.13	0	0
0.05	95.5634%	941.7194%	-24.82452	0	25.82452	0	0
1	4.7719%	1.8817%	0	0	1.241085	0	-0.2410852
10	1.1965%	0.1398%	0	0	0	0.171745	0.8282554
50	1.0807%	0.1395%	0	0.2147543	0	0	0.7852457
100	1.0744%	0.1394%	0	0.2234708	0	0	0.7765292
1000	1.2339%	0.3310%	0	0.7981829	0.201817	0	0

表 7　LINGO 求解 5 取 3 支股票之投資組合模型(IV)

風險趨避指標	投資組合之期望報酬	投資組合之風險	IBM	MSFT	AAPL	DGX	BAC
0.01	481.7489%	24028.9432%	-105.2024	0	137.79	0	-31.58759
0.012	401.6554%	16687.0010%	-87.66088	0	114.8245	0	-26.16366
0.014	344.4376%	12259.4247%	-75.12271	0	98.42016	0	-22.29745
0.016	301.5398%	9386.7845%	-65.71722	0	86.12292	0	-19.4057
0.018	268.1575%	7416.2847%	-58.40483	0	76.55145	0	-17.14662
0.02	241.4551%	6007.0132%	-52.55868	0	68.89437	0	-15.3357
0.05	97.2946%	961.4060%	-20.95657	0	27.5672	0	-5.610627
1	1.8186%	0.5132%	-0.4193012	-0.3209214	0	0	1.740223
10	1.1014%	0.1228%	0	0.1344554	0	0.1626938	0.7028508
50	1.1916%	0.1401%	0	0.209625	3.76E-02	0	0.7527527
100	1.1478%	0.1394%	0	0.2203024	2.49E-02	0	0.7547544
1000	1.1078%	0.1392%	0	0.2295677	1.33E-02	0	0.7571735

4.3 多屬性決策分析

本節為投資組合問題運用多屬性決策分析進行實例驗證，在實驗過程中擷取了2項代表投資組合績效表現之資料，分別為期望報酬、風險，作為多屬性評估方法中簡單加

權法與TOPSIS排序法之評估屬性，來進行投資組合績效分數之計算與排序。在此節中以LINGO求解投資組合模型(III)之結果中前20組非凌越解進行多屬性決策分析，而屬性對於方案影響之權重設定為本研究自行設定，其投資人可依據自己的偏好來設定不同的權重比例，在本研究中屬性權重總和為1，其屬性權重的間距以0.1為增加或減少，例如：期望報酬權重為0.1時，風險為0.9；期望報酬權重為0.2時，其風險即為0.8，以此類推，表8為投資組合相關資料。

表8 投資組合績效評估

投資組合代碼	投資組合之期望報酬	投資組合之風險
1	497.5485%	25059.3249%
2	249.3007%	6263.5909%
3	166.5514%	2783.2924%
4	125.1768%	1565.3231%
5	100.3520%	1001.6380%
6	83.8021%	695.4707%
7	71.9808%	510.8816%
8	63.1148%	391.0891%
9	56.2191%	308.9684%
10	50.7024%	250.2339%
11	25.8777%	62.5165%
12	17.6028%	27.7933%
13	13.4653%	15.6535%
14	10.9828%	10.0406%
15	9.3278%	6.9949%
16	8.1457%	5.1604%
17	7.2591%	3.9710%
18	6.5695%	3.1564%
19	6.0179%	2.5744%
20	5.5665%	2.1443%

4.3.1 簡單加權法求解投資組合

簡單加權法因為它的內容原理簡單且運算容易，故為多屬性決策方法中最常被廣為使用之方法。簡單加權法主要步驟如下：

1. 建立出各替代方案和各個決策屬性，並且給與每個屬性各別對方案影響的重要程度，也就是指派屬性的權重$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,....,w_n)$。
2. 先以(10)式將投資組合之期望報酬屬性資料轉換成數值決策矩陣，而投資組合之風險需以(11)式進行轉換可得表9，再以方程式(12)計算每一方案的每一屬性之尺度乘以屬性權重數即可得每一個方案的總得分，然後依此算出每一方案之總得分再予以比

較，其最高得分的方案則為第一優先方案可得表10。

表 9 決策屬性轉數值決策矩陣

投資組合代碼	投資組合之期望報酬	投資組合之風險
1	1.0000	0.0001
2	0.5011	0.0003
3	0.3347	0.0008
4	0.2516	0.0014
5	0.2017	0.0021
6	0.1684	0.0031
7	0.1447	0.0042
8	0.1269	0.0055
9	0.1130	0.0069
10	0.1019	0.0086
11	0.0520	0.0343
12	0.0354	0.0772
13	0.0271	0.1370
14	0.0221	0.2136
15	0.0187	0.3065
16	0.0164	0.4155
17	0.0146	0.5400
18	0.0132	0.6793
19	0.0121	0.8329
20	0.0112	1.0000

表10 投資組合績效表現評估

投資組合之 期望報酬權重	投資組合之 風險權重	投資組合績效最佳之 投資組合代碼
0.1	0.9	20
0.2	0.8	20
0.3	0.7	20
0.4	0.6	20
0.5	0.5	20
0.6	0.4	1
0.7	0.3	1
0.8	0.2	1
0.9	0.1	1

經簡單加權法評估進行多屬性決策分析，結果發現投資組合之期望報酬與風險之權重分別在 0.5 與 0.5 以前，最佳投資組合績效皆為投資組合代碼 20，故建議投資者在允許賣空之投資組合模型下，賣空 IBM、MSFT 等兩支股票，其比例分別為-0.8561、-0.0983，以及融資 AAPL、DGX、BAC 等三支股票，比例分別為 1.25、0.1251、0.5753；而權重分別從 0.6 與 0.4 以後，由上表 10 顯示皆為投資組合代碼 1 之績效表現最好，為賣空 IBM、MSFT、DGX 等三支股票，其比例分別為-66.69、-59.89、-21.92，以及融資 AAPL、BAC 等兩支股票，比例分別為 137.69、11.83。

4.3.2 TOPSIS 求解投資組合

TOPSIS 法選擇一個方案時，必須根據各屬性所建立的 n 維空間裡的所有方案裡有與正理想解產生最短的距離和負理想解產生最遠的距離。在本小節中，屬性權重與 SAW 法設定相同，其 TOPSIS 計算步驟如下：

1. 利用(13)式計算正規化評估值，計算結果如下表 11 表示：

表 11 決策屬性正規化結果

投資組合代碼	投資組合之期望報酬	投資組合之風險
1	0.8001	0.9614
2	0.4009	0.2403
3	0.2678	0.1068
4	0.2013	0.0601
5	0.1614	0.0384
6	0.1348	0.0267
7	0.1158	0.0196
8	0.1015	0.0150
9	0.0904	0.0119
10	0.0815	0.0096
11	0.0416	0.0024
12	0.0283	0.0011
13	0.0217	0.0006
14	0.0177	0.0004
15	0.0150	0.0003
16	0.0131	0.0002
17	0.0117	0.0002
18	0.0106	0.0001
19	0.0097	0.0001
20	0.0090	0.0001

2. 應用(14)式計算加權後正規化評估值，計算結果如下表 12 所示：

表 12 決策屬性加權後正規化結果

(為期望報酬權重為 0.1、風險權重為 0.9，加權後正規化之結果)

投資組合代碼	投資組合之期望報酬	投資組合之風險
1	0.0800	0.865225
2	0.0401	0.216263
3	0.0268	0.096099
4	0.0201	0.054046
5	0.0161	0.034584
6	0.0135	0.024013
7	0.0116	0.017639
8	0.0101	0.013503
9	0.0090	0.010668
10	0.0082	0.008640
11	0.0042	0.002159
12	0.0028	0.000960
13	0.0022	0.000540
14	0.0018	0.000347
15	0.0015	0.000242
16	0.0013	0.000178
17	0.0012	0.000137
18	0.0011	0.000109
19	0.0010	0.000089
20	0.0009	0.000074

3. 利用(15)、(16)式決定正理想解 A^* 與負理想解 A^-，如表 13 所示：

表 13 正理想解與負理想解數值

(為期望報酬權重為 0.1、風險權重為 0.9)

	投資組合之期望報酬	投資組合之風險
正理想解 A^*	0.080011	0.000074
負理想解 A^-	0.000895	0.865225

4. 以(17)、(18)式計算算各替代方案在 n 維空間中正理想解與負理想解的歐氏距離，其結果如下表 14、15 所示：

表 14 各組投資組合與正理想解之歐式距離

(為期望報酬權重為 0.1、風險權重為 0.9)

投資組合代碼	投資組合與正理想解之歐式距離
1	0.8652
2	0.2198
3	0.1098
4	0.0806
5	0.0726
6	0.0707
7	0.0707
8	0.0711
9	0.0718
10	0.0724
11	0.0759
12	0.0772
13	0.0778
14	0.0782
15	0.0785
16	0.0787
17	0.0788
18	0.0790
19	0.0790
20	0.0791

表 15 各組投資組合與負理想解之歐式距離

(為期望報酬權重為 0.1、風險權重為 0.9)

投資組合代碼	投資組合與負理想解之歐式距離
1	0.0791
2	0.6501
3	0.7696
4	0.8114
5	0.8308
6	0.8413
7	0.8477
8	0.8518
9	0.8546
10	0.8566

投資組合代碼	投資組合與負理想解之歐式距離
11	0.8631
12	0.8643
13	0.8647
14	0.8649
15	0.8650
16	0.8650
17	0.8651
18	0.8651
19	0.8651
20	0.8652

5. 以(19)式計算各替代方法對正理想解的相對近似度，計算結果如下所示：

表 16 各投資組合與正理想解之相對近似度

(為期望報酬權重為 0.1、風險權重為 0.9)

投資組合代碼	投資組合與正理想解之相對近似度
1	0.083785163
2	0.747302043
3	0.875146149
4	0.909627094
5	0.919635799
6	0.922468616
7	0.923060877
8	0.922917709
9	0.922538772
10	0.922101846
11	0.919188592
12	0.91801494
13	0.917406836
14	0.917036337
15	0.916787175
16	0.916608194
17	0.916473412
18	0.916368262
19	0.916283957
20	0.916214837

6. 按照與正理想解之相對近似度值大小排定方案之優劣順序，如下表所示：

表 17 各權重下之最佳投資組合績效

投資組合之期望報酬權重	投資組合之風險權重	最佳投資組合績效(投資組合代碼表示)	投資組合與正理想解之相對近似度
0.1	0.9	7	0.923060877
0.2	0.8	5	0.849052863
0.3	0.7	4	0.774480304
0.4	0.6	3	0.701747258
0.5	0.5	2	0.637883045
0.6	0.4	2	0.590500461
0.7	0.3	1	0.657579804
0.8	0.2	1	0.767013521
0.9	0.1	1	0.881054515

經由 TOPSIS 法評估之後，從上表 17 可顯示出當投資組合之期望報酬權重與風險權重分別為 0.1 與 0.9 時，其最佳投資組合績效為投資組合代碼 7，故建議投資者在允許賣空之投資組合模型下，可賣空 IBM、MSFT、DGX 等三支股票，其放空之比例分別為-9.7432、-8.1702、-2.8506，以及融資 AAPL、BAC 等兩支股票，融資比例分別為 19.67、2.09；相對於投資組合之期望報酬權重與風險權重分別為 0.9 與 0.1 時，為賣空 IBM、MSFT、DGX 等三支股票，而賣空比例分別為-66.69、-59.89、-21.92，以及融資 AAPL、BAC 等兩支股票，其比例分別為 137.69、11.83。另外，可從表 17 可觀察出當投資者對於期望報酬權重偏好較高時，會追求擁有較高報酬高風險之投資組合，並推測投資者對於投資組合的風險容忍程度亦較高；而當投資者對於風險偏好權重較高時，投資者會追求較低期望報酬與風險之投資組合，故對於風險的容忍程度亦較低。

綜合上述兩種多屬性決策分析結果，我們可以發現在作決策時已不能從只從單一屬性或是標準來決定，而是要考慮相關各層面的因素，以符合實際問題的需求，且不同決策屬性以及不同的屬性權重，會產生不同的分析結果。

5. 結論

本研究在四種不同投資模型下，以 LINGO 求解投資組合問題。最後，對於投資組合問題應用多屬性決策分析方法進行評估，以提供投資者更多樣化的投資組合選擇。綜合前述討論所得結論如下：一、LINGO 求解投資組合配置結果分析：1.在投資組合(I)的求解結果中，可以明顯觀察出風險愛好投資者，會將其所擁有全部資金投資於單一投資標的機率極大。2.觀察投資組合(II)之求解結果，可發現基數限制設定較大時，可以降低投資組合之報酬與風險，故較保守型的投資者可以透過基數限制的設定，來降低風險之承受程度。3.在投資組合(III)之求解結果中，發現透過允許賣空的機制下，雖然可讓

投資組合之報酬倍數成長，但投資組合之風險的成長倍數卻遠遠超過報酬的成長，故對於風險容忍程度較低之投資者，不建議採用賣空融券的方式來賺取最大報酬。4.觀察投資組合(IV)之求解結果，可發現投資組合配置大多是以高報酬之投資標的進行融資，以低報酬之標的物操作融券放空，故建議投資人在允許賣空且設有基數限制下之投資環境中，以此投資策略來進行投資。二、投資組合應用多屬性決策分析：1.在多屬性決策中經由簡單加權法分析，可發現投資組合之期望報酬與風險在非凌越解排序最低者，透過不同的權重設定，其績效表現有可能是最佳的；而在 TOPSIS 分析結果中，藉由不同之權重變動下，與正理想解之相對近似度最高之最佳投資組合也有所不同。另外，由 TOPSIS 分析結果可觀察出投資者對於期望報酬權重偏好較高時，會追求擁有較高報酬高風險之投資組合，並推測投資者對於投資組合的風險容忍程度亦較高；而當投資者對於風險偏好權重較高時，投資者會追求較低期望報酬與風險之投資組合，故對於風險的容忍程度亦較低。2.在不同的多屬性決策方法下，其研究結果也會有所不同，故投資人在選擇投資組合時，不僅應考慮投資組合的報酬、風險之外，可納入更多衡量指標以及不同的方法。

參考文獻

1. Chang, T. J., N. Meade, J. E. Beasley and Y. M. Sharaiha (2000), "Heuristics for Cardinality Constrained Portfolio Optimisation," *Computers & Operations Research*, 27(13), pp.1271-1302.
2. Churchman, C. W. and R. L. Ackoff (1954), "An Approximate Measure of Value,'' *Journal of the Operations Research Society of America*, 2(2), pp.172-187.
3. Duan, Y. (2007), "A Multi-objective Approach to Portfolio Optimization," *Rose-Hulman Undergraduate Math Journal*, 8(1), pp.1-18.
4. Edwards, W. (1977), *Conflicting Objectives in Decision,* New York：Wiley.
5. Ehrgott, M., K. Klamroth and C. Schwehm (2004), "An MCDM Approach to Portfolio Optimization," *European Journal of Operational Research*, 155(3), pp. 752-770.
6. Elton, E. J., M. J. Gruber, S. J. Brown and W. Goetzmann (2007), *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis,* 7th edition , New York：John Wiley.
7. Farmer, T. A. (1987), "Testing the Robustness of Multiattribute Utility Theory in An Applied Setting," *Decision Sciences*, 18(2), pp.178-193.
8. Fishburn, P. C. (1976), "Utility Independence on Subsets of Product Sets," *Operations Research*, 24(2), pp.245-255.
9. Hwang, C. L. and K. Yoon (1981), *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications,* Berlin：Springer.
10. Kendall, G. and Y. Su (2005), "Particle Swarm Optimisation Approach in the Construction of Optimal Risky Portfolios", *Proceedings of the 23rd IASTED International Multi-Conference Artificial Intelligence and Applications Innsbruck*.
11. Klee, A. J. (1971), "The Role of Decision Models in the Evaluation of Competing Environmental Heath Alternatives," *Management Science*, 18(2), pp.B52-B67.
12. Markowitz, H. (1952), "Portfolio Selection," *Journal of Finance*, 7(1), pp.77-91.
13. Schrage, L. (2003), *Optimization Modeling with LINGO,* Chicago：Lindo Publishing.
14. Yoon, K. P. and C. L. Hwang (1995), *Multiple Attribute Decision Making: an Introduction,* Sage Publications.
15. Zeleny, M. (1974), "A Concept of Compromise Solutions and the Method of the Displaced Ideal," *Computers & Operations Research*, 1, pp.479-496.