管理科學研究 Vol.1, No.1, 2003 第 31-47 頁

以線性規劃法估計台灣公債市場利率期限結構之實證研究

An Empirical Study of Term Structure Estimation of Taiwan Government Bonds Market - The Application of Linear Programming Model

周建新[1]　于鴻福[2]　張千雲[3]

摘要

本文以 Allen, Thomas, 和 Zheng (2000)所提出之線性規劃模型為基礎，加以連續平滑化之修正，來估計台灣公債市場的利率期限結構。更明確的說，由於 Allen, Thomas, 和 Zheng 所建構的利率期限結構，為一間斷的曲線，因此，為了配適更加連續平滑之利率期限結構，本文將線性規劃模型法所求解之即期利率，代入 Nelson 和 Siegel (1987) 之 Parsimonious 模型，估計所需之參數，並根據參數配適出一條連續的即期利率曲線。實證結果發現，結合線性規劃模型和 Parsimonious 模型所估計利率期限結構，其平均方根誤差百分比之平均值為 3.711%，而最小值為 0.793%。此一結果亦顯示結合線性規劃模型和 Parsimonious 模型，用來估計台灣公債市場之利率期限結構，具有相當不錯的結果。

關鍵詞：線性規劃、Parsimonious 模型、利率期限結構

Abstract

This paper is based on the linear programming model proposed by Allen, Thomas, and Zheng (2000) to estimate the term structure of Taiwan Government Bonds Market with a continuously smoothing modification. More precisely, the term structure estimation from Allen, Thomas, and Zheng are discrete curves. For the purpose of fitting more continuous and smooth term structure, we combine the linear programming model with the Parsimonious model (Nelson and Siegel, 1987), which attempts to estimate the necessary parameters and get the continuous spot rate curves. In this empirical results, we find the mean price error is 3.711% and the minimum price error is 0.793% from the term structure of Taiwan Government Bonds Market using the integration of linear programming model and Parsimonious model. This results also prove that the integration of the linear programming model and Parsimonious model is suitable to fit the term structure of Taiwan Government Bonds Market.

Keywords: Linear programming model; Parsimonious model; Term structure of interest rate

[1]國立高雄第一科技大學財管系副教授，作者感謝國科會 NSC89-2416-H-327-014 之研究補助。
[2]國立虎尾科技大學院工管系教授
[3]國立高雄第一科技大學管理研究所博士班研究生、修平技術學院資管系講師

1. 緒論

債券市場與股票市場為資本市場的兩大要角，在 1992 年以前，國內股票市場規模一直大於債券市場，但隨著政府推動一連串重大公共建設，以發行大量公債來融通財政赤字，公債發行金額有逐年增加之趨勢，例如在 2001 年之總發行量就高達到 4,570 億元；加上近年來，全球景氣下滑，利率亦隨之走低，造成債市的大多頭市場，根據櫃臺買賣中心之統計資料，2002 年之國內全年債券成交量即高達 134 兆元，遠遠超過同期股票市場之成交量。因此，在政府積極改善債券交易制度與業者全力發展債券新金融商品之努力下，未來我國債券市場之交易勢必更加熱絡，因而吸引了更多學者投入債券相關領域之研究。

利率期限結構是指在相同違約風險水準下的各期零息債券(zero-coupon bond)之殖利率曲線 (yield curve)。近年來，隨著國際金融市場的多元化、自由化，金融創新與金融商品的大量問世，分析利率期限結構的變化，是所有固定收益證券模型評價中最重要之概念，利用合理估計之利率期限結構，可以運用於投資決策、預測未來利率走勢，及管理利率風險；此外，利率期限結構可視為無風險基準點，因此投資人和交易商可以藉助推估而得之利率期限結構，對於風險性金融資產及其它利率衍生性金融商品 (例如：交換、利率上下限等)，作一評價。利率期限結構反應的是市場上所有參與者，對未來利率和通貨膨脹的預期，對政策制定者而言，其可作為貨幣政策的分析工具，因此，如何正確的建構一合適之利率期結構，就成為學術及實務界所共同關心的課題。

利率期結構估計之重要性雖然不言而喻，但實務上卻出現不少問題：第一是必須藉助市場有限之債券來建構連續平滑之曲線；第二是各國政府甚少發行到期日超過一年以上之零息債券，因此實務上必須藉助觀察到之殖利率估計產生。估計利率期限結構的研究可分為一般均衡模型 (general equilibrium model)、無套利模型 (no-arbitrage model) 和統計配適方法 (curve fitting) 等三種領域[4]。自 1970 年代末期，一些學者嚐試以均衡理論模型推導利率期限結構，例如包括 Vasciek (1977) 等學者，在假定經濟變數服從某一隨機過程（stochastic process）下，利用隨機過程描述利率，進而推導出在這些假設下的利率期限結構，故其所顯示之利率期限結構只是一種理論上存在於效率市場之無套利情況，但不一定能和真實市場上的利率期限結構完全一致。在無套利模型方面，則有 Ho 和 Lee(1986)、Heath, Jarrow ,和 Merton (1992)等學者，利用已知的利率期限結構，代入無套利模型中，以便研究未來利率期限結構之變化，以正確的評價利率衍生性商品，至於如何得到已知的利率期限結構，則必須以統計配適方法來估計。

以統計配適方法來建構利率期限結構，主要係提供一有效之估計模式，求得接近實際市場之零息殖利率曲線。然而其必須在曲線之精確性與平滑性 (accuracy and

[4]有些學者，例如 Lin (1999) 亦將估計利率期限結構之模型，區分成均衡模型 (equilibrium model)與實證模型 (empirical model) 兩大類。

smoothness) 上，取得平衡。 在配適函數之分類上，Subramanian (2001) 將其分為五種類型，包括 McCulloch (1971,1975) 、Mastronikola (1991) 所提出之多項式樣條函數(polynominal splines)；Vasicek 和 Fong (1982) 、 Shea (1985) 所提出之指數型樣條函數(exponential splines)；Shea (1984)、Steely (1991) 、Eom, Subrahmanyam, 和 Uno (1998) 所提出之基礎樣條函數 (B-spline function)；Nelson 和 Siegel (1987)、Svensson (1994) 、Bliss (1997) 所提出之指數型多項式遠期利率函數(exponential polynomial forms for the forward rate)；以及 Fisher, Nychka, 和 Zervos (1995)、Bliss (1997)、Waggoner (1997) 所提出之 Roughness Penalty Methods (RPM)。由上述分類可知，在配適函數之型態大致可以分成樣條函數家族及指數型多項式函數家族兩種類型，另外在目標函數之設定上，RPM 則是用來調整精確性與平滑性兩者之權重。

上述利用統計配適方法來建構利率期限結構，如果在某些到期日，剛好只有一個附息債券到期，則前述方法就可以產生一組唯一之即期利率，但若在某些到期日剛好沒有債券到期，或同時有二個以上債券到期，則前述模型在拆解附息債券成為零息債券時，就會產生價格偏誤之不合理結果，Allen, Thomas, 和 Zheng 指出此一現象，尤其是在拆解有風險之附息債券時，尤其特別嚴重。為了解決前述的缺失，Allen, Thomas, 和 Zheng 三位作者所提論文，主要係以線性規劃模型(Linear Programming) 來解決 Fabozzi（1998）所提出的拔靴法（bootstrapping）估計現行利率期限結構所產生之價格偏誤 (mispricing) 缺失，亦即如果在每一特定期間祗有一張債券到期，拔靴法可以解得單一（unique）的即期利率，但是對於沒有債券到期的期間，或是同時有數個債券在某一期間到期時，則無法產生單一解之問題；此外，對於拔靴法拆解具風險性之零息債券，造成價格不一致之現象，利用 Allen, Thomas, 和 Zheng 所提模型，亦能有效地加以解決前述缺失。

Allen, Thomas, 和 Zheng 所提模型的最大特點，係利用不同債券之不同付息日(coupon date) 調整至固定樣本日 (sampling date) 上，再利用線性規劃模型求解不同到期樣本日之折現因子。故在實務應用上，不需借助複雜之數學模型，即可建構利率期限結構，使用上較其它模型容易操作。唯此一模型之最大缺點，即是無法產生一連續平滑之曲線，因此在本文中，我們將以線性規劃模型所求得之不同到期樣本日的折現因子，配合 Nelson 和 Siegel 模型，進一步予以平滑化，以求得一條連續之即期利率曲線。

在 Allen, Thomas, 和 Zheng 利用線性規劃模型以建構利率期限結構的論文中，三位作者並未利用真實的債券資料，來建構在一段期間內之利率期限結構，而僅是某一觀察日 (2/7/2000) 所觀察到之不同樣本日之零息債券價格與殖利率；而學術界目前亦尚未出現此一模型之驗證成果。台灣公債市場目前發行公債之種類不足，但仍有少數債券到期日相當接近，因此頗值得利用此一線性規劃模型，來估計國內之利率期限結構，因此本文即嘗試針對台灣的公債資料，提出 Allen, Thomas, 和 Zheng 模型之實證研究。綜合以上所述的論點，本文為國內首篇利用此一模型，建構台灣公債市場之利率期限結構之實證論文，在研究方法上又較原模型稍作改善，解決間斷曲線之缺失。本文的後續內容為：第二節文獻探討；第三節研究方法；第四節為實證結果分析；第五節為結論。

2. 文獻探討

應用曲線配適方法來建構利率期限結構，則視附息債券價格為一連串零息債券現值之總合。以統計方法來建構利率期限結構，一般是儘量平滑實際觀察到的資料，通常為了避免考慮違約風險，會以政府公債的報價來擬合利率期限結構，因此衍生以下兩個觀察樣本上的問題：第一個是公債到期日的缺口，因為公債發行的到期年限常集中於某些時段；第二個則因利率期限結構是由零息債券所建構，但是大部份的市場或政府公債皆為附息債券，因此在考慮了票息效果下，並無法直接由觀察資料配適利率期限結構。關於上述的問題，第一個問題因為各國公債發行量的不同和公債市場的活絡不一，必然存在於實證上的限制；至於第二個問題則可透過近似函數的轉換和估計的方法加以解決。

最早在殖利率曲線估計的實證，可以追溯到 Durand (1942)，以 40 年期的公司債資料並配合使用手繪的方式，描述出殖利率和到期日之相對時點，不過此種方式僅解釋債券殖利率和到期日間的關係，故往後學者開始由不同的領域，找尋更為合理的擬合利率期限結構之方法，按配適標的之分類，可分為三個領域；即期利率的配適、遠期利率的配適和折現函數的配適。

在即期利率函數之配適上，Chambers, Carleton, 和 Waldman (1984)假設期限結構為連續複利形式，根據 Weierstrass’s Approximation Theorem (WAT)，任何連續的函數皆可以簡單多項式來近似，其中以三次多項式的解釋能力最高，然而在短期時卻會出現較大的殘差；若把多項式的次數提高，只能改善長期的配適效果，至於中長期的配適能力則大致良好。此外，因為出現異質變異數 (heteroschedasticity)，故再以最大概似法(maximum likelihood estimation)來估計，得到以六次多項式之配適效果最佳。Nelson 和 Siegel 以美國貨幣市場為實證對象，根據利率期限結構中的預期理論，由遠期利率的二階微分方程式，推導出即期利率的 Parsimonious 模型，此一模型之優點為無需分段配適，故可減少參數的估計；所估計參數皆具有其經濟意義，可應用於總體經濟分析或投資決策上。此外，經由模型所求得之殖利率曲線，為一連續平滑的曲線，且形狀包括了駝峰(humps) 狀或 S 型態和單調函數 (monotonic)，與實際市場情況相當吻合，故不需依賴其它複雜的模式或參數，即可建構利率期限結構。國內賴曉璐 (1996)首次以 Parsimonious 模型估計台灣公債市場之殖利率曲線，並根據殖利率曲線形狀做為免疫策略的選擇標準，不過，由於賴曉璐並未考慮到票息效果，直接以市場上的殖利率報價來估計殖利率曲線，其所得到之結果祇能稱為殖利率曲線，而非本文所定義的利率期限結構。除了 Parsimonious 模型外，Lin (1999)、蔣松原 (2000) 同樣以基礎樣條函數，來建構台灣公債市場之利率期限結構，皆得到令人滿意之配適結果。

在遠期利率之配適上，Adams 和 Deventer (1994)以交換利率為觀察值，利用最大平滑法 (maximum smoothness)來配適遠期利率函數。根據 Adams 和 Deventer 的實證結果，以最大平滑法直接配適遠期利率曲線，平滑統計值遠較 MuCulloach (1975)、Vasicek 和 Fong (1982)的方法為小，故無論在平滑度和準確度上均優於這二種方法。Adams 和

Deventer 模型祇適用於零息債券的配適資料，馮士耀 (1999)根據 Frishling 和 Yamamura (1996)所提出的模型為基礎，實證台灣的附息公債資料。馮士耀的實證過程中，即使在不同的配適準則下，分別以三種不同的數值方法；拉格蘭治乘數、牛頓法和共軛法都能獲得一致的解，但是會產生負的遠期利率，必須將到期日過於接近的資料排除。

最後在折現函數之配適上，McCulloch (1971)提出二次分段多項式 (piece-wise quadratic polynomial function)，認為不同債券在相同的到期日下，應有相同的殖利率，並可透過折現函數建構利率期限結構，並在連續複利的假設下，利用債券的評價公式和連續折現公式，建構利率期限結構。此一模型最主要之缺點在估計遠期利率曲線上，所產生之反曲點，使得一次微分不連續，曲線變得不平滑。為解決此一問題，McCulloch 又提出立方樣條函數 (cubic spline function)以解決上述的缺點。雖然 McCulloch 所提出的立方樣條函數可以解決前述反曲點之問題，但是因為公式的彈性太大，無法使折現因子為非遞增函數 (non-increasing)，導致在計算遠期利率時產生負值，故 Mastronikola (1991)提出複雜立方樣條函數(complex cubic spline function)以求解決上述的問題。Schaefer (1981) 以 Bernstein Polynomials 做為折現因子的近似函數, Schaefer 嚴格限制折現因子為非負和單調非遞增函數的條件，以避免產生負的遠期利率。Bernstein Polynomials 方法和一般傳統多項式近似函數相比，有較佳折現函數的微分近似值，而遠期利率曲線的估計主要就是來自於折現函數的一次微分。前述的立方樣條函數和 Bernstein Polynomial 函數在估計折現函數時，將導致遠期利率在到期日較長時，產生不佳的特性；以 McCulloch 的模式為例，當到期年限很長時，會產生陡峭的上升或下降曲線。故 Vasicek 和 Fong 將折現因子的近似函數設定為指數函數(exponential function)，認為遠期利率會是時間的連續平滑函數；估計而得之曲線有足夠的彈性，捕捉各種利率期限結構的形狀。Shea (1985)實證 Vasicek 和 Fong 的模型，發現指數函數並不能達成 Vasicek 和 Fong 所預期的結果，遠期利率曲線在短期的波動和一般多項式的表現一樣，波動地非常嚴重，此外，由於利用最小平方法估計該模型，會因為最小平方法對錯誤資料敏感性過大，故必須逐步地篩選資料，以避免產生過大之估計誤差。

國內李賢源和謝承熹 (1998)根據 Vasicek 和 Fong 的分段三次方指數函數來配適折現因子, 並以台灣公債為實證標的, 利用非線性最適化方法中的 downhill simplex method 來估計這些參數值，其實證結果僅證明以分段三次方指數函數來配適折現因子，可以配適良好的利率期限結構，但是就遠期利率曲線而言，並沒有說明是否可以解決遠期利率曲線在短期波動過大的現象；此外，過多的估計參數，亦增加了估計上的困難。

此外，針對利用統計配適方法來建構利率期限結構，如果在某些到期日，剛好只有一個附息債券到期，則前述方法就可以產生一組唯一之即期利率，但若在某些到期日剛好沒有債券到期，或同時有二個以上債券到期，則在拆解附息債券成為零息債券時，就會產生價格偏誤之不合理現象，Allen, Thomas, 和 Zheng 提出以線性規劃模型，來解決 Fabozzi (1998)所提之拔靴法估計現行利率期限結構所產生之價格偏誤缺失。更重要的是，不管在即期利率的配適、遠期利率的配適和折現函數的配適上，欲從附息債券市場

中粹取出利率期限結構，往往需使用複雜的數值方法來估計，因此，如能直接先從市場上得到即期利率或折現因子的資料，即可以單純之線性迴歸式估計利率期限結構；而 Allen, Thomas, 和 Zheng 所提出之線性規劃模型，正可符合上述條件；由於應用此一模型，不需對配適函數作任何假設，且國內尚無學者應用此一模型來估計國內公債市場之利率期限結構，因此本文以其作為主要之研究模型。

3. 研究方法

理論上，我們可將零息債券市場中的殖利率報價視為即期利率，但我國的債券市場卻缺乏零息債券市場，即使在國外有零息債券市場的存在，也因投資人買入持有的交易習慣，使得該市場缺乏流動性，故觀察到的即期利率，事實上仍隱含著流動性貼水，無法視為真實的即期利率，建構利率期限結構。為了取得附息債券市場上的即期利率，一般實務上常用的方法為 Fabozzi 所提出的拔靴法，如果在每一期間祗有一張債券到期，上述的方法可以解得單一的即期利率，但是對於沒有債券到期的期間，或是同時有數個債券在某一期間到期時，則無法產生單一解，為了解決上述的問題，Allen, Thomas, 和 Zheng 提出以線型規劃的方法拆解附息債券。

根據 Allen, Thomas, 和 Zheng 之線性規劃模型，首先須將不同債券之不同付息日調整至樣本日上，並求出在無風險下，一元零息債券的折現值 $v_0(t)$，並利用以下之線性規劃模型，並利用方程式 (1) 之線性規劃模型，在極小化各期訂價誤差之目標式下，配合套裝軟體 (LINGO)，求解出各樣本時點下零息債券之折現值[5]。

$$
\begin{aligned}
&Min && \sum_{i=1}^{N_0}(a_i + b_i) && (1)\\
&subject\ to && P_i + a_i = \sum_{t=1}^{T} c_i(t) v_0(t) + b_i\\
& && v_0(t) \geq [1 + f(t)] v_0(t+1)\\
& && v_0(1) < 1\\
& && a_i, b_i \geq 0\\
& && i = 1, 2, \ldots, N_0
\end{aligned}
$$

其中 P_i 表示債券的實際市場報價；下標 i 表示第 i 個債券 $(i = 1, ..., N_0)$，其中 N_0 代表市場上觀察到之債券樣本總數；付息期數為 $t = 1, ..., T-1$；調整後之付息期間為 $t = 1, ..., T-1$；$c_i(t)$ 是調整後之現金流量；$v_0(t)$ 是調整不同付息日至至特定樣本日後之折現因子；$f(t)$是期間 t 到 t+1 期中，最小預期遠期利率(minimum expected forward rate)，

[5]此外方程式(1)之線性規劃模型，隱含著並未考慮公債流動性不足 (illiquidity) 之限制，亦即觀察日之不同到期日債券均具有相同之流動性, 但事實上, 不管國內外公債市場, 均是熱門債券 (on the run issue) 成交量最為熱絡，其餘債券成交量較小，甚至可能沒有交易。

以保持$v_0(t)$為一遞減的函數。第一條限制式中的a_i和b_i為債券的實際市價與調整後的債券折現值，兩者之誤差，當a_i為正值而b_i為零時，表示調整後的債券折現值$\sum_{t=1}^{T} c_i(t)v_0(t)$，大於其實際報價$P_i$；而當$b_i$為正值而$a_i$為零時，則表示調整後的債券折現值$\sum_{t=1}^{T} c_i(t)v_0(t)$，小於其實際報價$P_i$。第二條限制式表示到期日較長的零息債券價格應小於到期日較短的零息債券，即折現值$v_0(t)$為一遞減的函數。第三條限制式，如果沒有設立$v_0(1)<1$的限制式，將導致折現因子出現大於一的情況，故本文在原來線性規劃模型中，再加入$v_0(1)<1$的限制式，使得折現因子不會超過 1，而違反經濟意義。至於第四條限制式是理論價格與實際債券價格誤差(a_i與b_i值)，均大於零。

在第一條限制式中，調整後之現金流量$c_i(t)$是決定於票面利息、付息日、樣本日和觀察日 (current date)，樣本日配合付息日，為$t=1,...,T$，期間為半年。當現金流量未調整之前，債券的現值 (PV)，為$t=1,...,T-1$ 期中，所有$c(t)\tilde{v}(t)$的加總；其中$c(t)$表示第t期的現金流量，$\tilde{v}(t)$代表未調整前，觀察日至不同付息日之折現因子。

假設α等於付息日距下次樣本日佔兩樣本日期間的百分比；β等於觀察日距下次樣本日佔兩樣本日期間的百分比 (α與β值均介於 0 與 1 之間)，F定義為債券之面額 (principal)，當$\alpha \geq \beta$，表示觀察日到下次樣本日之間不存在任何付息日，利用線性內插法 (linear interpolation)，$\tilde{v}(t)$為t期折現因子v_t和$t+1$期折現因子v_{t+1}兩者之線性組合，表示如下：

$$\tilde{v}(t) = \alpha v_t + (1-\alpha)v_{t+1}, \quad t=1,...,T\text{-}1$$

就$t=1,...,T-1$期而言，債券的現值應滿足於下式：

$$\begin{aligned} PV &= c(1)\tilde{v}(1) + ... + c(T-1)\tilde{v}(T-1) \\ &= c[\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2] + ... + (c+F)[\alpha v_{T-1} + (1-\alpha)v_T] \\ &= \alpha c v_1 + c v_2 + ... + c v_{T-2} + (c+\alpha F)v_{T-1} + (1-\alpha)(c+F)v_T \end{aligned}$$

當$\alpha < \beta$時，表示觀察日到下次樣本日之間存在著付息日，利用線性內插法，$\tilde{v}(t)$可表示為t期和$t+1$期的線性組合，如下所示：

$$\tilde{v}_0 = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta-\alpha}{\beta}v_1$$

就$t=1$期而言，債券的現值應滿足於下式：

$$PV = \frac{\alpha}{\beta}(c+F) + \frac{\beta-\alpha}{\beta}(c+F)v_1$$

就$t=2$期而言，債券的現值應滿足於下式：

$$PV = \frac{\alpha}{\beta}c + \left[\frac{\beta-\alpha}{\beta}c + \alpha(c+F)\right]v_1 + (1-\alpha)(c+F)v_2$$

就 $t = 1,\ldots,T-1$ 期而言，債券的現值應滿足於下式：

$$PV = \frac{\alpha}{\beta}c + \left[\frac{\beta-\alpha}{\beta}c + \alpha\right]cv_1 + cv_2 + \ldots + cv_{T-2} + (c+\alpha F)v_{T-1} + (1-\alpha)(c+F)v_T$$

將上述二種情況，在 $t = 1,\ldots,T-1$ 期時，整理出以下之通式：

(a)當 $\alpha \geq \beta$：

$$PV = P_c + (\alpha-\beta)c \tag{2}$$
$$= \alpha cv_1 + cv_2 + \ldots + cv_{T-2} + (c+\alpha F)v_{T-1} + (1-\alpha)(c+F)v_T$$

(b)當 $\alpha < \beta$：

$$PV = P_c + (1+\alpha-\beta)c \tag{3}$$
$$= \frac{\alpha}{\beta}c + \left[\alpha + \frac{\beta-\alpha}{\beta}\right]cv_1 + cv_2 + \ldots + cv_{T-2} + (c+\alpha F)v_{T-1} + (1-\alpha)(c+F)v_T$$

在方程式 (2) 和 (3)中，PV 為債券現值；P_c 是未含息之市場報價（clean price）；α 等於付息日距下次樣本日佔兩樣本日期間的百分比；β 等於觀察日距下次樣本日佔兩樣本日期間的百分比；$(\alpha-\beta)c$ 和 $(1+\alpha-\beta)c$ 是應計利息。當 $\alpha \geq \beta$ 時，方程式 (2)表示觀察日到下次樣本日之間不存在任何付息日；而當 $\alpha < \beta$ 時，方程式 (3)表示觀察日到下次樣本日之間存在著付息日。

將方程式 (2)和(3)的各期調整後現金流量代入方程式(1)，進行規劃求解，可得到各樣本日的折現值，即為到期日尚餘 m 年之零息債券面值一元時的報價，在一年付息二次之情況下，將折現因子代入下式，轉換為離到期日尚餘 m 年之即期利率 $R(m)$。

$$R(m) = 2 \times \left\{\left[\frac{1}{v_0(m)}\right]^{\frac{1}{2m}} - 1\right\} \tag{4}$$

由於線性規劃法所建構的利率期限結構，為一間斷的曲線，祇能描述樣本日下的即期利率，因此，為了配適連續之利率期限結構，本文結合了線型規劃方法和 Parsimonious 模型，將線性規劃模型法所求解之即期利率，代入 Nelson 和 Siegel 之 Parsimonious 模型估計參數，並根據參數配適出一條連續的即期利率曲線，研究流程如下列步驟：

步驟一：尋找國內附息公債之樣本資料。

步驟二：將不同公債樣本的付息日調成一致。

步驟三：利用 LINGO 求解線型規劃模型，可得到各樣本日的折現值，再將折現值轉換為即期利率 $R(m)$。

步驟四：將求出即期利率帶入 Nelson 和 Siegel 之 Parsimonious 模型。

步驟五：依周建新、于鴻福和張千雲(2003) 所提出之高斯-牛頓法，求解上述 Parsimonious 模型中的各項參數。

步驟六：求算 Parsimonious 模型中的即期利率。

根據 Nelson 和 Siegel 所提出之 Parsimonious 模型，即期利率 *R(m)*可以表示如下：

$$R(m) = \beta_0 + \beta_1(\tau/m)[1-\exp(-m/\tau)] + \beta_2(\tau/m)[1-\exp(-m/\tau)(m/\tau+1)] \tag{5}$$

方程式(5)中的 $R(m)$分別受到 β_0、β_1 和 β_2 三個參數的影響，其意義如下：β_0 為長期因子，是描述殖利率曲線的平行移動；β_1 為短期因子，是描述殖利率曲線斜率的改變；β_2 為中期因子，是描述殖利率曲線之曲度改變(沈中華，1998)。因為 $R(m)$之函數曲線包含了駝峰、S 型態和單調遞增或遞減之特性，故無需依賴其它複雜的模式或參數即可建構利率期限結構。方程式(5)中的 τ 為一未知的固定時間參數，其決定了 β_1 和 β_2 收斂的速度，當 τ 值較小時，收斂的速度較快，短期和中期影響力開始衰退的時點較快；反之，當 τ 值較大時，收斂速度較慢，短期和中期影響力開始衰退的時點較慢。

根據周建新、于鴻福和張千雲之實證結果，τ 值的可能範圍介於 0 到 10 之間，並依此將[0,10]以每 0.2 做切割，考慮了 0.2,0.4,…,9.8,10 等 50 個可能的 τ 值。其所得之結果，τ 值大多介於 0~5 之間和 10。至於 10 以後的 τ 值，將使得模型中的誤差逐漸擴大，因此在下節的實證分析中，本研究考慮以下 100 個可能的 τ 值：0.1,0.2,…,9.9,10，亦即設定 $S = \{0.1\times k \mid 1 \le k \le 100\}$，以求得 β_0、β_1 和 β_2 之估計值。

4. 實證結果分析

本文的觀察期間為 1995 年 12 月 29 日至 2000 年 11 月 23 日，且到期日在 15 年以內的台灣政府發行之公債，為了配合樣本日的設定，公債付息頻率取半年付息一次，故總計公債樣本數為 23 筆，樣本公債資料如附表一所示，由於台灣公債市場資料並不完整，故資料之處理如下：

一、由於模型求解過程繁雜，故公債樣本為每月最後一個星期五的最高和最低平均殖利率報價；若無交易資料時，假設市場仍未有新的資訊來反應價格，故價格以前一日報價代替之。

二、當公債接近到期日時，公債波動性和成交量會異常的變化，為了避免模型受到極端值的影響，在到期日六個月以內者，即予以刪除。

三、因為公債付息頻率為半年，故樣本日設定為每年的 3 月 15 日、9 月 15 日。

利用模式(1)做線性規劃求解時，$f(t)$是期間 t 到 $t-1$ 期間中，最小預期遠期利率，根據 Allen, Thomas, 和 Zheng 實證發現，$f(t)$在 0 到 0.03 之間，且並不影響求解的準確度，即目標函數的值差異不大，因此，本文分別以 $f(t)$＝[0,0.03]進行實證，在目標函數最小化的原則下，以 $f(t)$＝0.01 代入線性規劃模型進行求解。

圖 1 為線性規劃模型所求出的折現因子，具有逐漸遞減的特性，且小於 1，十分符合經濟意義，因為樣本資料受限於一年付息二次，故 1995 年後的資料必須予以剔除，導致觀察日中最長的到期日祇有十一年。

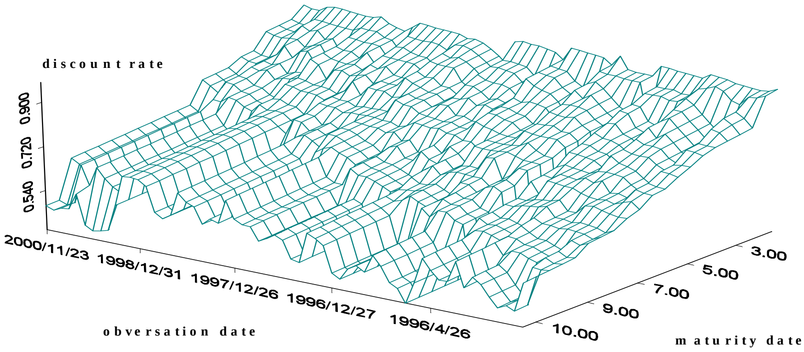

圖 1 線性規劃模型下各期間之折現因子

將上述折現因子利用方程式(4)進行代換，可以求得即期利率，連接各樣本日下的即期利率，即可得到間斷之利率期限結構，如圖 2 所示。至於圖 2 中逐年增加的平滑部份，因為樣本祇侷限在 1995 年之前的公債，故隨著到期公債的增加，使得樣本資料減少，平滑部份即隨之增加，在缺乏樣本描述之下，將會影響到模型的配適能力。

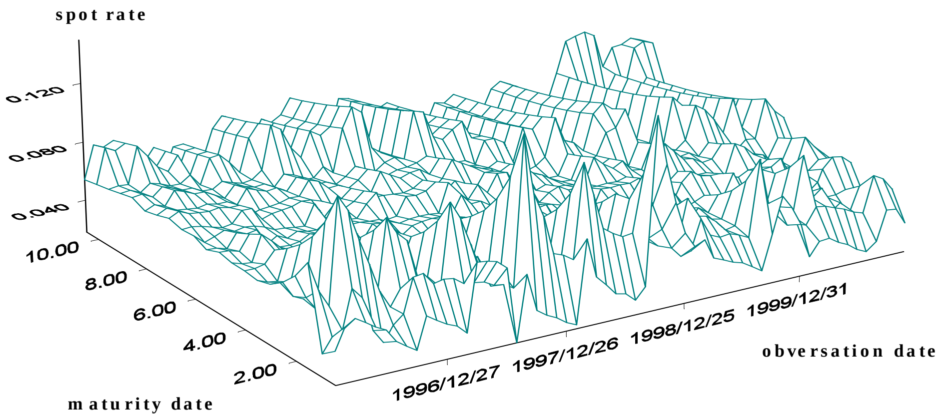

圖 2 線性規劃模型下間斷之利率期限結構

為了獲得連續之利率期限結構，本文利用 Parsimonious 模型來配適由線性規劃模型所求出的即期利率，其圖形如圖 3 所示。比較圖 2 和圖 3 可以發現，二者在各觀察日的

走勢是一致的，主要的差異則在於曲線是否平滑而已。

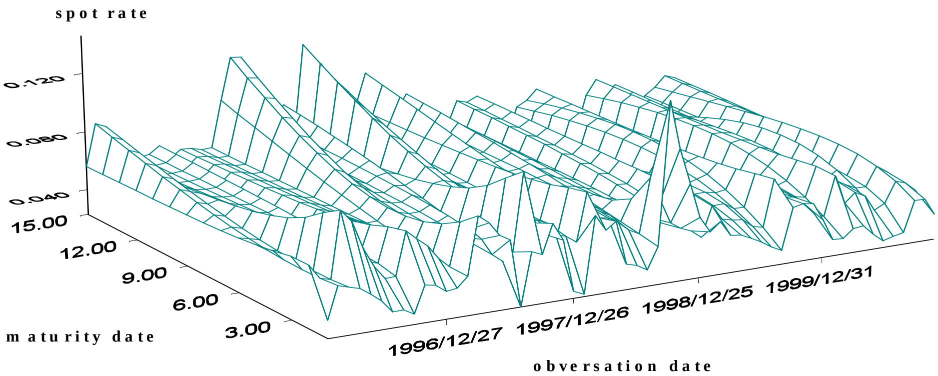

圖 3　線性規劃模型下連續之利率期限結構

本文以線性規劃模型為基礎，估計出各樣本日的折現值，再將折現值轉換為即期利率，受限於此一結果為間斷之利率期限結構，因此本文再以 Nelson 和 Siegel 之 Parsimonious 模型修正為平滑之曲線。為了解上述研究過程所建構之利率期限結構的配適能力，本文利用 Parsimonious 模型中求出的即期利率，並反推出債券之理論價格，並和實際債券價格相比，分別計算出平均方根誤差百分比[6]和平均方根誤差[7]，結果如表 1 所示。以平均方根誤差百分比而言，其平均值為 3.711%，最小值為 0.793%；而平均方根誤差的平均值為 3.711 元，最小值為 0.794。亦即，根據線性規劃模型所估計的理論價格和實際的價格，在每百元報價的債券中，平均每個樣本債券價格相差 3 元，不過，最小卻祗相差 0.79 元。另外，根據表 1，不同觀察日的誤差大小，其差異頗大，故有必要對誤差做更深入的探討。

圖 4 為各觀察日的平均方根誤差百分比分佈圖，由圖上每個誤差點的分佈可知，觀察日在 15~25 及 40~50 兩個區間內的誤差較大，即樣本債券的理論價格和實際價格相差較大，應是樣本資料的缺陷所致。對於本研究的估計誤差並無法有效控制在一定的範圍內，其主要的原因可能有下列四點：

[6]平均方根誤差百分比 RMSPE (Root Mean Squared Percentage Error)：

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{P_i - B_i}{P_i}\right]^2}$$ *100%，為一相對量的誤差評估準則。

[7]平均方根誤差：$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(P_i - B_i)^2}$，為一絕對量的誤差評估標準。

一、由於國內公債交易以附買賣回交易為主，所以市場上公債價格資料不夠完整，影響實證的精確度。
二、公債發行種類不夠多樣化，就到期日而言，無法涵蓋整個樣本期間；就樣本數而言，缺乏有效的估計樣本。
三、缺乏短期利率之報價，使得到短天期的估計結果之誤差較大。
四、國內在 1995 年後，以發行一年付息一次之公債為主，故使得線性模型的估計樣本，沒有 1995 年後才上市之公債價格資料。

表 1　樣本觀察期間之配適結果分析

判斷準則 / 統計值	平均方根誤差百分比	平均方根誤差
平均值	0.03711	3.71149
標準差	0.02213	2.21304
最大值	0.08995	8.99563
最小值	0.00793	0.79353

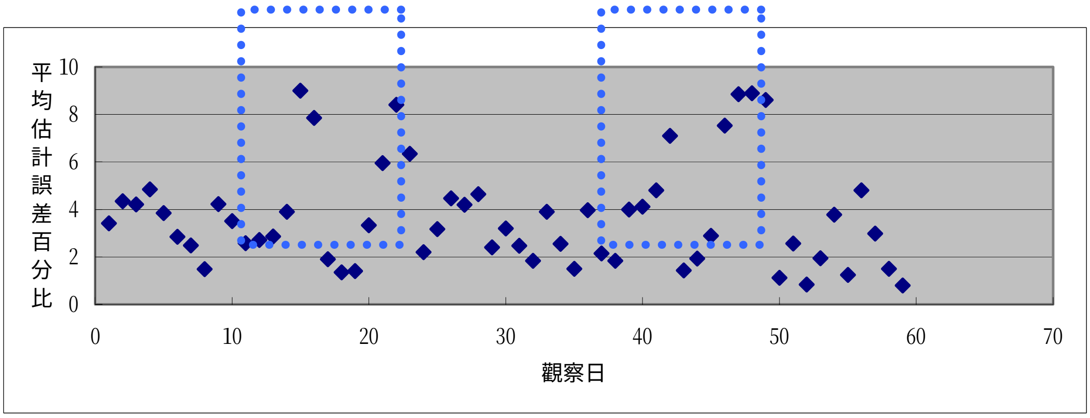

圖 4 樣本觀察期間之誤差分佈圖

5. 結論

利率期限結構為零息債券的殖利率與其到期日之間的關係，其在財管領域之應用十分廣泛，不僅可以用來評價公債、公司債等普通債券，亦是各種利率衍生性商品評價之依據，其重要性不言而喻。由於各國政府發行公債皆以附息債券為主，甚少發行到期日超過一年以上之零息債券，因此本文利用以 Allen, Thomas, 和 Zheng 所提出之線性規劃模型為基礎，配合 Nelson 和 Siegel 模型予以平滑化，所建構之殖利率曲線，即為台灣公債市場之利率期限結構。

Allen, Thomas, 和 Zheng 所提出之線性規劃模型，最大特點係利用不同債券之不同付息日調整至固定樣本日上，再利用線性規劃模型求解不同到期樣本日之折現因子。故

在實務應用上，不須借助複雜之數學模型，即可建構利率期限結構，使用上較其它模型容易操作。此一模型之最大缺點，是無法產生一連續平滑之曲線，因此本文將線性規劃模型求解不同到期樣本日之折現因子，配合 Nelson 和 Siegel 模型，進一步予以平滑化，以求得一條連續之即期利率曲線。由於 Nelson 和 Siegel 模型來配適利率期限結構，可以減少過多參數的估計，而且該模型係由遠期利率之二階微分方程所推導而成，並非一般的多項近似式，較具理論基礎，此外，其參數皆具有經濟意義，投資人甚至可由參數的正負值，直接判斷利率期限結構之形狀。本文以該模型做為配適函數，修正了線性規劃模型使用之限制，而同時保留線性規劃模型之優點。

在台灣債券市場之實證結果中，本文所推估之利率期限結構包括上升型和駝峰型等各種不同形狀，故可以捕捉到大部份實際市場的情況。就模型的配適能力而言，雖然台灣公債市場的交易資料不甚完整，尤其是在樣本期間中段的時點，得到較差之配適結果，此為本研究之主要限制，不過，實證顯示結合線性規劃模型和 Parsimonious 模型，所估計利率期限結構，其平均方根誤差百分比之平均值為 3.711%，而最小值為 0.793%，此結果顯示了結合線性規劃與 Parsimonious 模型，在建構台灣公債市場之利率期限結構上，仍可得到相當不錯之結果。

目前學術界尚未出現此一模型之驗證成果，而本文為國內首篇利用此一模型，建構台灣公債市場之利率期限結構之實證論文，在研究方法上又較原模型稍作改善，解決間斷曲線之缺失。因此本研究之成果，對學術界與實務界而言，在配適利率期限結構的過程中，能提供更多的選擇。

參考文獻

1. 李賢源、謝承熹 (1998)，「以分段三次方指數函數及非線性最適化技巧配適-台灣公債市場之利率期限結構」，管理與系統，第五卷第二期，pp. 277-286。
2. 沈中華 (1998)，「影響台灣貨市利率的三因子」，貨幣市場雙月刊，第 12 期，10 月號，pp. 4 -7。
3. 周建新、于鴻福、張千雲 (2003)，「利率期限結構估計模型之實證研究」，管理學報，第二十卷第四期，pp.775-804。
4. 賴曉璐 (1996)，「政府公債殖利率曲線形狀與免疫策略的選擇」，碩士論文，國立台灣大學財務金融學研究所。
5. 馮士耀 (1999)，「配適最平滑之遠期利率曲線」，碩士論文，國立台灣大學商研究所。
6. 蔣松原 (2000)，建構台灣市場殖利率曲線，貨幣觀察與信用評等，第 22 期，pp. 99-119。
7. Adams, K. J., and Deventer, D. R.(1994), “Fitting Yield Curves and Forward Rate Curves with Maximum Smoothness ”, *The Journal of Fixed Income*, pp. 52-62.
8. Allen, D. E., Thomas, L.C., and Zheng, H. (2000), “Stripping Coupons with Linear Programming”, *Journal of Fixed Income*, September, pp. 80-87.

9. Bliss, R. R. (1997), "Testing Term Structure Estimation Methods," *Advances in Futures and Options Research* , vol. 9 , pp. 197-231.
10. Chambers, D. R., Carleton, W. T., and Waldman, D. R.(1984), "A New Approach to Estimation of the Term Structure of Interest Rate", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19, pp. 233-252.
11. Durand, D. (1942), "Basic Yields of Corporate Bonds", New York National Bureau of Economic Research.
12. Eom, Y. H., Subrahmanyam, M. G.,and Uno, J. (1998), "Coupon Effects and the Pricing of Japanese Government Bonds: An Empirical Analysis, " *Journal of Fixed Income*, 8, pp. 69-86.
13. Fisher, M., Nychka, D., and Zervos, D. (1995), "Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines," Working Paper 95-1, Finance and Economics Discussion Series, Federal Reserve Board.
14. Frishling, V., and Yamamura, J. (1996), "Fitting A Smooth Forward Rate Curve to Coupon Instruments", *The Journal of Fixed Income*, September, pp. 97-103.
15. Fabozzi, F. (1998), *Valuation of Fixed Income Securities and Derivatives*, New Hope, PA: Frank J. Fabozzi Associates.
16. Ho, T. S., and Lee, S. (1986), "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claim", *Journal of Finance*, 41, pp. 1011-1028.
17. Heath, D., Jarrow, R., and Merton, A. (1992), "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A new Methodology for Contingent Claims Valuation", *Econometrica*, 60, pp.77-105.
18. Lin, B. H. (1999), "Fitting The Term Structure of Interest Rates for Taiwanese Government Bonds," *Journal of Multinational Financial Management*, pp. 331-352.
19. Mastronikola, K. (1991), "Yield Curves for Gilt-Edged Stocks: A new model", Bank of England Discussion Paper (Technical Series), December, 49.
20. McCulloch, J. H. (1971), "Measure the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Business*, pp. 19-31.
21. McCulloch, J. H. (1975), "The Tax-Adjusted Yield Curve", *Journal of Finance*, 30（3）, pp. 811-830.
22. Nelson, C. R., and Siegel, A. F. (1987), "Parsimonious Modeling of Yield Curves", *Journal of Business*, 60 (4), pp. 473-489.
23. Schaefer, S. M. (1981), "Measuring a Tax-Specific Term Structure of Interest Rates in the Market of British Government Securities", *The Economic Journal*, pp. 415-438.
24. Shea, G. S. (1984), "Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure Data: Equilibrium Models and Spline Approximation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19, pp. 253-269.

25. Shea, G. S. (1985), "Interest Rate Term Structure Estimation with Exponential Splines: A Note ", *The Journal of Finance*, 6(1), pp. 319-325
26. Steeley, J. M. (1991), " Estimating the Gilt-Edged Term Structure: Basis Splines and Confidence Intervals," *Journal of Business Finance and Accounting*, 18, pp. 513-29.
27. Subramanian, K. V. (2001), "Term Structure Estimation in Illiquid Markets, " *Journal of Fixed Income*, June, pp. 77-86.
28. Svensson, L. E. O. (1994), "Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994, " Working Paper, WP/94/114, International Monetary Fund.
29. Vasicek, O. A. (1977), "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188.
30. Vasicek, O. A., and Fong, H. G. (1982), "Term Structure Modeling Using Exponential Splines", *Journal of Finance*, 37, pp. 339-356.
31. Waggoner, F. D. (1997), "Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices, " Working Paper 97-10, Federal Reserve Bank of Atlanta.

附表一 台灣公債之樣本資料

公債碼	每年付息	票面利率	西元發行日	到期日	年數
00064 北二高四	2	8	1994/3/25	2001/3/25	7
00121 82 交建甲一	2	8.25	1993/6/23	1997/6/23	4
00231 83 交建甲二	2	7.75	1994/4/29	2001/4/29	7
00341 84 交建甲三	2	7.6	1995/3/17	2002/3/17	7
00442 84 交建甲四	2	8	1995/6/16	2010/6/16	15
00551 85 交建乙一	2	7.75	1995/7/21	2010/7/21	15
00652 85 交建甲五	2	7.6	1995/8/25	2010/8/25	15
00751 85 交建甲七	1	7.3	1996/1/19	2006/1/19	10
00753 85 交建甲六	2	7.35	1995/9/22	2010/9/22	15
00811 央債 81-1	2	9	1991/11/22	1996/11/22	5
00812 央債 81-2	2	8.75	1991/12/20	1998/12/20	7
00813 央債 81-3	2	8.5	1992/2/21	1996/2/21	4
00814 央債 81-4	2	8.5	1992/3/13	1997/3/13	5
00821 央債 82-1	2	8.5	1992/7/24	1997/7/24	5
00822 央債 82-2	2	8.5	1992/8/28	1997/8/28	5
00823 央債 82-3	2	8.5	1992/11/27	1999/11/27	7
00824 央債 82-4	2	8.5	1993/2/19	2000/2/19	7
00825 央債 82-5	2	8.5	1993/3/19	1998/3/19	5

附表一 (續)

公債碼	每年付息	票面利率	西元發行日	到期日	年數
00826　央債 82-6	2	8.5	1993/4/16	2000/4/16	7
00831　央債 83-1	2	8.75	1993/9/22	2003/9/22	10
00832　央債 83-2	2	8.25	1993/12/17	2000/12/17	7
00833　央債 83-3	2	8.25	1994/1/18	2004/1/18	10
00841　央債 84-1	2	7.75	1994/11/18	2004/11/18	10
00842　央債 84-2	2	7.6	1994/12/16	2001/12/16	7
00851　央債 85-1	1	0	1995/10/20	1998/10/20	3
00852　央債 85-2	1	0	1995/11/24	1998/11/24	3
00853　央債 85-3	1	7.25	1995/12/22	2002/12/22	7
00955　85 交建乙二	1	7.3	1996/3/22	2011/3/22	15
A85104 85 央債甲四	1	7	1996/6/18	2003/6/18	7
A85308 85 交建甲八	1	7.2	1996/4/26	2006/4/26	10
A86101 86 央債甲一	1	6.9	1996/9/24	2006/9/24	10
A86102 86 央債甲二	1	6.8	1996/10/22	2006/10/22	10
A86103 86 央債甲三	1	6.6	1996/11/19	2003/11/19	7
A86104 86 央債甲四	1	6.8	1996/12/20	2006/12/20	10
A86309 86 交建甲九	1	7.1	1996/8/23	2011/8/23	15
A86310 86 交建甲十	1	6.9	1997/1/21	2012/1/21	15
A86403 86 交建乙三	1	6.9	1997/3/11	2012/3/11	15
A87101 87 央債甲一	1	6.375	1997/9/23	2007/9/23	10
A87102 87 央債甲二	1	6.125	1997/11/21	2002/11/21	5
A87103 87 央債甲三	1	6.875	1997/12/19	2012/12/19	15
A87104 87 央債甲四	1	6.25	1998/3/17	2005/3/17	7
A87201 87 央債乙一	1	6.875	1998/2/20	2013/2/20	15
A88101 88 央債甲一	1	5.125	1998/9/25	2008/9/25	10
A88102 88 央債甲二	1	5.5	1998/11/24	2018/11/24	20
A88103 88 央債甲三	1	5.25	1999/1/22	2019/1/22	20
A88201 88 央債乙一	1	5.875	1999/4/23	2019/4/23	20
A89101 89 央債甲一	1	5.875	1999/7/23	2004/7/23	5
A89102 89 央債甲二	1	6.25	1999/8/20	2009/8/20	10
A89103 89 央債甲三	1	6.125	1999/9/21	2014/9/21	15
A89104 89 央債甲四	1	6.125	1999/10/15	2014/10/15	15
A89105 89 央債甲五	1	5.875	1999/11/23	2009/11/23	10

附表一 (續)

公債碼	每年付息	票面利率	西元發行日	到期日	年數
A89106 89 央債甲六	1	6	1999/12/17	2009/12/17	10
A89107 89 央債甲七	1	6.25	2000/1/18	2020/1/18	20
A89108 89 央債甲八	1	5.625	2000/2/15	2007/2/15	7
A89109 89 央債甲九	1	6.125	2000/3/14	2015/3/14	15
A89110 89 央債甲十	1	5.75	2000/6/16	2010/6/16	10
A89111 89 央債甲 11	1	5.125	2000/8/11	2015/8/11	15
A89112 89 央債甲 12	1	5.125	2000/9/13	2005/9/13	5
A89113 89 央債甲 13	1	0	2000/11/14	2020/11/14	20
A89201 89 央債乙一	1	5.875	2000/4/21	2020/4/21	20
C85101 北建債 85	2	6.5	1996/4/26	2003/4/26	7
C86101 北建債 86	1	5.997	1996/12/17	2006/12/17	10
C86102 北建債 86 二	1	6.33	1997/5/8	2007/5/8	10
C87101 北建債 87	1	6.7	1998/6/25	2005/6/25	7
C88101 北建債 88	1	5.5	1998/11/9	2005/11/9	7
C89101 北建債 89	1	5.2	2000/8/15	2007/8/15	7
C89102 北建債 89 二	1	5.375	2000/9/15	2007/9/15	7