在非對稱規格下弱度能力指標 C_{pp} 的貝氏估計

Bayesian Estimations of Incapability Index under Asymmetric Specifications

曾信超[1] 許淑卿[2] 郭信霖[3]

摘要

製程能力指標是常用來評估製造產業的能力，提供測量製程績效重要的量測方法；而傳統方法大部分是從頻率學派的觀點得到。在本文我們以貝氏方法(Bayes Approach)分別針對非情報事前分配(non-informative prior)、共軛事前分配(Conjugate Prior)與韋伯故障率函數(Weibull Hazard Function)求其有關弱度能力指標的點估計與在一般情形下 $\mu \neq T$ 的 $100 \times p\%$的信用區間。依據貝氏的方法，我們需先確定一個有關參數適當的事前分配，以得到其事後分配；並且在平方誤差損失函數(Squared-Error Loss Function)下，製程能力指標之事後機率的期望值就是其貝氏估計。

關鍵字：弱度能力指標、信用區間、非情報事前分配、共軛事前分配、韋伯故障率函數

Abstract

Process capability indices are used to measure on whether a manufacturing process meet a set of requirement preset in the workshop, which designed to quantify the relation between the actual performance of the process and its specified requirement. In this paper we consider the problem of estimations of indices $C_{pp}(\mu \neq T)$ under Bayesian framework. Several priors such as non-informative, conjugate prior and Weibull hazard function have been considered. Some estimates of hyper parameters are also studied. Some Bayesian estimators are derived and lower bound of the credible intervals under some conditions is also given.

Keywords：Incapability Indices; Credible Interval; Non-informative Prior; Conjugate Prior; Weibull Hazard Function

1. 前言

製程能力研究，在品質改善及提高生產力的評估與判定製程能力已日益普遍。Caulcutt, R.(2001)指出目前已有許多美國公司，如 Motorola，General Electric (GE)，Black and Decker，Bombardier 與 Minitab 等等，已廣泛運用製程指標，來評估製程能力是否達到能力水準。

製程能力指標(*PCI*)，它不僅是種用來衡量製程符合規格的能力(Process Capability)與規格界限(Specification Limits)之間的關係，而且也是種結合製程參數(μ, σ)與製程規

[1]長榮大學經營管理研究所副教授
[2]長榮大學經營管理研究所博士候選人/崇右技術學院國際貿易系講師
[3]崇右技術學院會計資訊系副教授

格(LSL, T, USL)的函數，其中 LSL 為規格下限(Lower Specification Limits)，USL 為規格上限(Upper Specification Limits)，T 為目標值(Target Value)。

由於數據常因單位之不同，便無法相互比較製程特性在品質上的好壞。所以，定義此品質指標來衡量不同特性的品質，在產業上是件重要的事情。因此，製程能力指標是依品質特性值的規格、製程特性的中心位置及一致程度，來表示製程中心的偏移度與製程的變化程度。而且在評價上常被用來衡量供應商是否有能力製造出符合規格產品的一個量數，以及在購買契約上作為買賣雙方對品質要求的標準依據。一般而言，一個對稱的生產製程，其品質特性的製程平均和規格中心值是一致的($\mu = m$)，但實際上，一個生產製程的變異是無可避免，因此，如何利用 PCI 的資訊來達到規格中心的位置，以作為持續改善品質的重要依據。

但由於製程品質特性分配的參數是未知的，必須由樣本資料來估計製程的參數，才能得到指標的估計值，故 Chou et al. (1990)指出，若以此估計值來判斷製程是否符合規格，是種不適當的方法；因為，藉由抽樣而取得樣本資料的方法，將會造成抽樣誤差的存在，而導致指標的估計值有很大的不確定性。因此，為了減少製程能力的誤判，Chou et al. (1990)採用區間估計的觀念，來計算再信賴係數 100(1− α)%下，製程能力指標 PCI 的最小下限與製程能力指標估計值 $P\hat{C}I$ 的推薦最小值(Recommended Minimum Values)。

Chou 與 Owen(1989)指出在常態製程下，分別求出 $\hat{C}_p$，$\hat{C}_{pu}$，$\hat{C}_{pl}$ 與 $\hat{C}_{pk}$ 的抽樣分配及統計性質。Chan et al. (1988)與 Wright, P. A. (1998) 指出在常態製程下，分別求出 $\hat{C}_{pm}$ 與 $\hat{C}_{pmk}$ 的抽樣分配及統計性質。由於這些指標估計量的抽樣分配通常是很複雜，要想由此得到一個好的區間估計值是件較困難的事。因此，本文係利用貝氏方法(Bayesian Approach)，討論在平方誤差損失函數與各種不同的事前分配下，以建構出一個保證事後機率(Posterior Probability)至少在 100p%下，合格製程所發生之各製程能力指標的貝氏信用區間。對指標 $PCI= C_p$，C_{pk}，C_{pm}，C_{pmk} 而言，假若在信用區間內所有的點皆大於事前所確定(Pre-specified)合格能力的水準(Capable Level)c_0，則就可說這製程是合格；否則，就必須針對缺點加以改善。但對指標 C_{pp} 而言，假若在信用區間內所有的點皆小於事前所確定合格能力的水準 c_{01}，則就可說，這製程是合格；否則，就必須針對缺點加以改進。

2. 製程能力指標

由於統計學家和品質工程師的熱心投入製程能力指標的研究，使其能更準確的衡量出製程能力與績效。現將幾個較重要的製程能力指標以及一些相關文獻，簡單敘述如下：

(1)C_p 指標

Juran(1974)提出第一代製程能力指標 C_p，其定義如下：

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{d}{3\sigma} \text{，} \tag{2.1}$$

其中 USL 為製程品質特性的規格上限，LSL 為製程品質特性的規格下限，σ 為製程品質特性的標準差，$d = (USL - LSL)/2$ 為產品規格界限長度的一半。

(2) C_{pk} 指標

為了改進 C_p 指標的缺點，Kane(1986)提出第二代製程能力指標 C_{pk}，其定義如下：

$$C_{pk} = \min\left(\frac{USL-\mu}{3\sigma}, \frac{\mu-LSL}{3\sigma}\right) = \frac{d-|\mu-m|}{3\sigma} = (1-k)C_p \quad , \tag{2.2}$$

其中 $k = \dfrac{|\mu-m|}{d} = \dfrac{2|\mu-m|}{USL-LSL}$ 稱為製程中心偏離係數。雖然指標 C_{pk} 同時考慮 μ 與 σ 於指標中，卻只具有衡量製程平均數 μ 是否偏離規格中心值 m 的特性，基本上，仍無法反應製程平均數 μ 是否偏離目標值 T 的情形。

(3) C_{pm} 指標

Chan et al.(1988)針對著 C_p 指標的缺點，提出另一個第二代製程能力指標 C_{pm}，其定義如下：

$$C_{pm} = \frac{USL-LSL}{6\sqrt{E(X-T)^2}} = \frac{USL-LSL}{6\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} = \frac{C_p}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\mu-T}{\sigma}\right)^2}} \quad , \tag{2.3}$$

這個指標加了田口損失函數(Taguchi Loss Function)期望值的概念，使 C_{pm} 指標更能運用在各種不同的製程規格界限上，故在反應製程期望損失的能力上較優於指標 C_p 與 C_{pk}。

(4) C_{pmk} 指標

Pearn et al. (1992)將指標 C_{pk} 與 C_{pm} 的優點結合在一起，提出第三代製程能力指標 C_{pmk} ，其定義如下：

$$C_{pmk} = \frac{\min(USL-\mu, \mu-LSL)}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} = \frac{d-|\mu-m|}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} = (1-k)C_{pm} , \tag{2.4}$$

由定義可知，指標 C_{pmk} 同時考慮製程平均數 μ 與上、下規格界限及目標值 T 之間的關係。指標 C_{pmk} 較指標 C_{pk} 與 C_{pm} 敏感(Sensitive)，因此，指標 C_{pmk} 較能同時反應製程的良率(Process Yield，%*Yield*)與製程的期望損失(Expect Loss)。

(5) C_{pp} 指標

Greenwich 與 Jahr-Schaffrath(1995) 提出一個製程能力弱度指標(Incapability Index) C_{pp} ，是由指標 C_{pm} 經簡單的轉換而得到的，其定義如下：

$$C_{pp} = \frac{1}{(C_{pm})^2} = \left(\frac{\mu-T}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{D}\right)^2 = C_{ia} + C_{ip} , \tag{2.5}$$

其中 $D = d / 3$，C_{ia} 稱之為偏差指標(Inaccuracy Index)，用來評估製程的準確性(Accuracy)，即評估製程平均數 μ 與目標值 T 之偏離程度； C_{ip} 稱之為變異指標(Imprecision Index)，用來評估製程的精確性(Precision)，即評估製程變異的程度。如果僅利用指標 C_{pp} 是無法判斷出造成製程間差異的原因，是否來自製程平均數偏離的程度，或是來自製程變異的大小；因而，必須藉由 C_{ia} 與 C_{ip} 兩個次指標才能清楚了解造成製程間差異的原因，進而協助品管工程師或管理者得到正確的改進方向，以避免混淆而無法判別造成製程不合格的原因。所以，指標 C_{pp} 在評估製程的準確性和精確性方面較指標 C_{pm} 及 C_{pmk} 方便。

當 $C_{pp} = c_1$ 且 $T = m$ 時，其平均數為

$$\mu = T \pm \sqrt{\frac{c_1 d^2}{9} - \sigma^2} \ , \tag{2.6}$$

則製程良率可表示如下：

$$\%Yield = \Phi\left(\frac{1+\sqrt{c_1/9-(\sigma/d)^2}}{\sigma/d}\right) + \Phi\left(\frac{1-\sqrt{c_1/9-(\sigma/d)^2}}{\sigma/d}\right) - 1 \ , \tag{2.7}$$

其中 $\sigma/d \leqq \sqrt{c_1}/3$。當 $\sigma/d = \sqrt{c_1}/3$ 時 (*i.e.* $\mu = T$)， 則 $\%Yield = 2\Phi(3/\sqrt{c_1}) - 1$。在 $c_1 \leqq 1$ 的情況下，由表 1 中，可得知 $\%Yield \geqq 2\Phi(3/\sqrt{c_1}) - 1$。就一般的情況而言，弱度製程指標值大於 1.00 即表示製程能力不足 (Inadequate)，指標值小或等於 1.00 才表示製程能力足 (Capable)。因此當製程的 $C_{pp} \leqq 1.00$ 時，可以保證其製程良率 $\%Yield \geqq 2\Phi(3) - 1 = 0.9973$ 且其製程偏離率(製程偏離目標值的程度) $|\mu - T|/d < 1/3$，當 $c_1 = 1$。

表 1 $C_{pp} = 1(0.2)2$，$\sigma/d = h\sqrt{c_1}/30$，$h = 1(1)10$ 時所對應之%*Yield*。

h	C_{pp}=1.0	C_{pp}=0.8	C_{pp}=0.6	C_{pp}=0.5	C_{pp}=0.4	C_{pp}=0.2	C_{pp}=0.1
1	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.000000000	1.00000000
2	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.000000000	1.00000000
3	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.000000000	1.00000000
4	0.99999990	0.99999999	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.000000000	1.00000000
5	0.99999012	0.99999967	0.99999999	1.00000000	1.00000000	1.000000000	1.00000000
6	0.99987710	0.99998962	0.99999984	0.99999999	1.00000000	1.000000000	1.00000000
7	0.99945354	0.99991879	0.99999679	0.99999976	0.99999999	1.000000000	1.00000000
8	0.99864663	0.99971151	0.99997852	0.99999735	0.99999988	1.000000000	1.00000000
9	0.99773978	0.99939470	0.99993213	0.99998819	0.99999914	0.999999999	1.00000000
10	0.99730006	0.99920366	0.99989244	0.99997789	0.99999789	0.999999999	1.00000000

很顯然地，當 C_{pp} 值能達到製程能力需求時， 它不僅能減少製程期望損失即能清晰地分辨出製程的改進方向，而且又能達到較高的製程良率%*Yield*。因此，本文以貝氏方法探討弱度能力指標 C_{pp} 的點估計與在一般情形下 $\mu \neq T$ 的 $100 \times p\%$的信用區間。

其估計量如下：

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6S} \ , \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \ , \tag{2.8}$$

$$\hat{C}_{pp} = \frac{(\bar{x} - T)^2}{D^2} + \frac{S^2}{D^2} \ , \ S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \ 。 \tag{2.9}$$

3. 非情報事前分配的貝氏估計

至於貝氏方法，對於事前機率的選擇，常考慮 $\pi(\theta) = 1/\theta$，$0 < \theta < \infty$。有兩個理由：一為此種非情報的事前分配，能提供出由事前分配和事後分配之間所產生參數的資訊有極大化差異；另一為此種非情報的事前分配，所得 $100p\%$的信用區間所覆蓋的機率比其他事前分配所得到的信用區間更精確。

在一般 $\mu \neq T$ 情況下，由(2.5)與(2.9)，可得到

$$\frac{(n-1)\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)\hat{C}_{pp}}{C_{pp}}=\frac{(n-1)\hat{\sigma}'^2}{\sigma^2}\sim\chi_n'^2(\lambda)\text{，}\tag{3.1}$$

其中 $\chi_n'^2(\lambda)$ 表示具有自由度為 n 與非中心化參數 $\lambda = n(\mu - T)^2/\sigma^2$ 的非中心化卡方分配。Boyles 在 1991 年建議利用 Patnaik(1949)所提出非中心化卡方分配非常近似於中心化卡方分配。

$$\frac{\chi_n'^2(\lambda)}{e}\cong\chi_f^2\text{ ，其中 } e=\frac{n+2\lambda}{n+\lambda}\text{ ，}\quad f=\frac{(n+\lambda)^2}{n+2\lambda}\text{ 。}\tag{3.2}$$

從(3.1) 與 (3.2)，則

$$\frac{(n-1)f\,\hat{C}_{pp}}{n\,C_{pp}}=\frac{(n-1)\,\hat{\sigma}'^2}{e\sigma^2}\sim\chi_f^2\text{ 。}\tag{3.3}$$

因此，製程指標 C_{pp} 的估計量 $\hat{C}_{pp}$ 之機率密度函數為

$$f(\hat{C}_{pp}|C_{pp})=\frac{2}{\Gamma(f/2)}\left(\frac{(n-1)f}{2nC_{pp}}\right)^{\frac{f}{2}}\left(\hat{C}_{pp}\right)^{\frac{f}{2}-1}\exp\left(\frac{-(n-1)f\hat{C}_{pp}}{2\,nC_{pp}}\right)\text{ 。}\tag{3.4}$$

假設 $Y=\hat{C}_{pp}$，則 Y 的機率密度函數為

$$f(y|C_{pp})=\frac{1}{\Gamma(f/2)}\left(\frac{(n-1)f}{2\,nC_{pp}}\right)^{\frac{f}{2}}y^{\frac{f}{2}-1}\exp\left(\frac{-(n-1)f\,y}{2nC_{pp}}\right)\text{ 。}\tag{3.5}$$

(A)、 $C_{pp}(\mu\neq T)$的點估計

設參數 $\theta=1/C_{pp}$，則 θ 的概似函數 $L(\theta|y)$ 為

$$L(\theta|y)=\frac{1}{\Gamma(f/2)}\times\left(\frac{(n-1)f}{2n}\right)^{\frac{f}{2}}\times\theta^{\frac{f}{2}-1}\times y^{\frac{f}{2}-1}\times\exp\left(\frac{-(n-1)f\,y\theta}{2n}\right)\text{ 。}\tag{3.6}$$

若考慮事前分配為非情報 $\pi(\theta)=1/\theta$，$0<\theta<\infty$，則在給定 y 下，θ 的事後分配為

$$f(\theta|y)=\frac{1}{\Gamma(f/2)}\left(\frac{(n-1)f\,y}{2n}\right)^{\frac{f}{2}}\theta^{\frac{f}{2}-1}\exp\left(\frac{-(n-1)f\,y\theta}{2n}\right)\text{ 。}\tag{3.7}$$

因此，可得到 $\left(\frac{1}{\theta}\right)\Big|y$ 服從 *Inverse Gamma* 分配。所以，$1/\theta=C_{pp}$ 之事後分配的期望值為

$$E\left(\frac{1}{\theta}\Big|\hat{C}_{pp}\right)=\left(\left(\frac{f}{2}-1\right)\times\frac{2n}{(n-1)f\,\hat{C}_{pp}}\right)^{-1}=\frac{(n-1)f}{n(f-2)}\times\hat{C}_{pp}\text{ ，}\tag{3.8}$$

於是，C_{pp} 在 $\mu\neq T$ 之貝氏估計量為 $\frac{(n-1)f}{n(f-2)}\times\hat{C}_{pp}$ ，其眾數為 $\frac{(n-1)f}{n(f+2)}\times\hat{C}_{pp}$ 。 (3.9)

(B)、 $C_{pp}(\mu\neq T)$的區間估計

由於 $$\frac{2\theta}{\beta}\sim\chi^2_{p,f}\text{ ，}\tag{3.10}$$

則 $\theta_{pp}=(\beta/2)\chi^2_{p,f}=n\chi^2_{p,f}/((n-1)f\ \hat{C}_{pp})$，式中 $\chi^2_{p,f}$ 表示右尾面積為$100\times p\%$之自由度f 的卡方分配。因此，C_{pp}在 $\mu\neq T$ 的 $100\times p\%$的上界信用區間 $[0，1/\theta_{pp}]$為

$$\left[\ 0,\ \frac{(n-1)f\hat{C}_{pp}}{n\chi^2_{p,f}}\right]。\tag{3.11}$$

假若f不是正整數，則利用 $\chi^2_{[f]}$與 $\chi^2_{[f]+1}$ 的插補法，求其 χ^2_f 的近似值，其中$[f]$表示小於等於f的最大整數之高斯函數。

最後，我們把指標在非情報之事前分配下，所得到的點估計與區間估計摘錄於表 2。

表 2 在非情報事前分配下，指標之點估計與區間估計

指標	事後分配的期望值	事後分配的眾數	$100\times p\%$ 信用區間
$C_{pp}(\mu=T)$	$\frac{n-1}{n-2}\hat{C}_{pp}$	$\frac{n-1}{n+2}\hat{C}_{pp}$	$\left[\ 0,\ \frac{(n-1)\hat{C}_{pp}}{\chi^2_{p,n}}\right]$
$C_{pp}(\mu\neq T)$	$\frac{(n-1)f}{n(f-2)}\times\hat{C}_{pp}$	$\frac{(n-1)f}{n(f+2)}\times\hat{C}_{pp}$	$\left[\ 0,\ \frac{(n-1)f\hat{C}_{pp}}{n\chi^2_{p,f}}\right]$

Note: 因f未知，故以 $MLE\ \hat{f}$ 估計之。其中 $\lambda=n(\mu-T)^2/\sigma^2$， $e=\frac{n+2\lambda}{n+\lambda}$ ，$f=\frac{(n+\lambda)^2}{n+2\lambda}$ ，且 $\hat{\lambda}/n=(\bar{x}-T)^2/S^2$ 。

4. *Gamma* 事前分配的貝氏估計

共軛事前分配在貝氏架構裡佔有很重要地位。在共軛事前分配中，事前分配與事後分配函數有相同的函數形式。由第 3 節可知 $Y=\hat{C}_{pp}$ 皆服從 *Gamma* 分配，所以我們知道共軛事前分配也一定是 *Gamma* 分配。因此本節討論 *Gamma* 事前分配，亦就是，$\theta\sim G(\alpha，\beta)$。

$$\pi(\theta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\times\theta^{\alpha-1}\exp\left(\frac{-\theta}{\beta}\right)，0<\theta，\alpha，\beta<\infty。\tag{4.1}$$

在一般 $\mu\neq T$ 情形下，由第 3 節的(3.3)式，得知，若 $Y=\hat{C}_{pp}$，則 Y 的機率密度函數為

$$f(y|C_{pp})=\frac{1}{\Gamma(f/2)}\left(\frac{(n-1)f}{2nC_{pp}}\right)^{\frac{f}{2}}y^{\frac{f}{2}-1}\exp\left(\frac{-(n-1)fy}{2nC_{pp}}\right)。$$

(A)、 $C_{pp}(\mu\neq T)$的點估計

設參數 $\theta=1/C_{pp}$，且 $\theta\sim G(\alpha，\beta)$，$\pi(\theta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\times\theta^{\alpha-1}\exp\left(\frac{-\theta}{\beta}\right)$，$0<\theta，\alpha，\beta<\infty$，則 θ 與 y 的聯合機率密度函數$f(\theta,y)$為

$$f(\theta, y) = \frac{\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{f}{2}\right)^{\frac{f}{2}}}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\theta^{\frac{f}{2}+\alpha-1}y^{\frac{f}{2}-1}\exp\left(-\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{fy}{2}+\frac{1}{\beta}\right)\theta\right)。\tag{4.2}$$

所以在給定 y 下，θ 的事後分配為

$$f(\theta|y) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{f}{2}+\alpha\right)}\left(\frac{(n-1)fy}{2n}+\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{f}{2}+\alpha}\theta^{\frac{f}{2}+\alpha-1}\exp\left(-\left(\frac{(n-1)fy}{2n}+\frac{1}{\beta}\right)\theta\right)。\tag{4.3}$$

因此，可得到 $\left(\frac{1}{\theta}\right)\Big\|y$ 服從 *Inverse Gamma* 分配。

所以，$1/\theta = C_{pp}$ 之事後分配的期望值為

$$E\left(\frac{1}{\theta}\middle|\hat{C}_{pp}\right) = \left(\left(\frac{f}{2}+\alpha-1\right)\times\left(\frac{(n-1)f\hat{C}_{pp}}{2n}+\frac{1}{\beta}\right)^{-1}\right)^{-1}。\tag{4.4}$$

對於任意固定的 α 和 β，Y 的機率密度函數為

$$f(y|\alpha,\beta) = \frac{\Gamma\left(\frac{f}{2}+\alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\left(\frac{(n-1)f}{2n}\right)^{\frac{f}{2}}\left(\frac{(n-1)fy}{2n}+\frac{1}{\beta}\right)^{-\left(\frac{f}{2}+\alpha\right)}y^{\frac{f}{2}-1}\tag{4.5}$$

若給定 $\alpha = \alpha_0$，則從(4.5)式，如同第 3 節的處理方法，得到 β 的最大概似估計量 $\hat{\beta}$ 為

$$\hat{\beta} = \frac{n}{n-1}\times\frac{1}{\alpha_0\hat{C}_{pp}}\quad。\tag{4.6}$$

所以，給定 $\hat{C}_{pp}$ 下， $C_{pp}(\mu \neq T)$之事後分配的期望值為

$$E\left(\frac{1}{\theta}\middle|\hat{C}_{pp}\right) = \left(\left(\frac{f}{2}+\alpha-1\right)\times\left(\frac{(n-1)f\hat{C}_{pp}}{2n}+\frac{1}{\beta}\right)^{-1}\right)^{-1} = \frac{(n-1)(f+2\alpha_0)\hat{C}_{pp}}{n(f+2\alpha_0-2)}\ ,\tag{4.7}$$

故 C_{pp} 之貝氏估計量為 $\frac{(n-1)(f+2\alpha_0)\hat{C}_{pp}}{n(f+2\alpha_0-2)}$，其眾數為 $\frac{(n-1)(f+2\alpha_0)\hat{C}_{pp}}{n(f+2\alpha_0+2)}$ 。 (4.8)

(B)、 $C_{pp}(\mu\neq T)$的區間估計

因為 $2\theta/\left(\frac{(n-1)fy}{2n}+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)^{-1} \sim \chi^2_{f+2\alpha_0}$， (4.9)

則 $\theta_{pp} = \chi^2_{p,f+2\alpha_0}\left(\frac{(n-1)fy}{2n}+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)^{-1}/2 = \frac{n}{n-1}\times\frac{1}{f+2\alpha_0}\times\frac{\chi^2_{p,f+2\alpha_0}}{\hat{C}_{pp}}$，式中 $\chi^2_{p,f+2\alpha_0}$ 表示右尾面積為 $100\times p$%之自由度 $f+2\alpha_0$ 的卡方分配。因此，C_{pp} 在 $\mu \neq T$ 的 $100\times p$%的上界信用區間 $[0，1/\theta_{pp}]$為

$$\left[\ 0\ ,\ \ \frac{(n-1)(f+2\alpha_0)\hat{C}_{pp}}{n\,\chi^2_{p,f+2\alpha_0}}\right]。\tag{4.10}$$

最後，我們把指標在 *Gamma* 之事前分配下，所得到的點估計與區間估計摘錄於下表 3。由表中可知，當 α = 0 時，表 3 就變成表 2。因為當 α 接近於 0 時，*Gamma* 之事前分配的極限就變成 *Non-informative* 之事前分配。

表 3 在 *Gamma* 事前分配下，各指標之點估計與區間估計，
G(α₀ ,β)，其中 β 由 *ML* 方法估計。

指標	事後分配的期望值	事後分配的眾數	100×*p*% 信用區間
$C_{pp}(\mu=T)$	$\frac{(n-1)(n+2\alpha_0)\hat{C}_{pp}}{n(n+2\alpha_0-2)}$	$\frac{(n-1)(n+2\alpha_0)\hat{C}_{pp}}{n(n+2\alpha_0+2)}$	$\left[0,\ \frac{(n-1)(n+2\alpha_0)\hat{C}_{pp}}{n\chi^2_{p,n+2\alpha_0}}\right]$
$C_{pp}(\mu\neq T)$	$\frac{(n-1)(f+2\alpha_0)\hat{C}_{pp}}{n(f+2\alpha_0-2)}$	$\frac{(n-1)(f+2\alpha_0)\hat{C}_{pp}}{n(f+2\alpha_0+2)}$	$\left[0,\ \frac{(n-1)(f+2\alpha_0)\hat{C}_{pp}}{n\chi^2_{p,f+2\alpha_0}}\right]$

Note: 因 f 未知，故以 *MLE* $\hat{f}$ 估計之。其中 $\lambda=n(\mu-T)^2/\sigma^2$，$e=\frac{n+2\lambda}{n+\lambda}$，$f=\frac{(n+\lambda)^2}{n+2\lambda}$，且 $\hat{\lambda}/n=(\bar{x}-T)^2/S^2$。

5. *Weibull HazardFunction* 事前分配的貝氏估計

由於技術開發的腳步太快，新技術與新材料等等不斷出現，致使未評價的領域範圍愈來愈大，造成了不可靠與不安全的存在。因此，在進行製造工程管理之前，不遲延地做好事前評價與預測在內的設計之保證技術，就愈來愈必要了。亦隨著系統及產品在量方面的膨大與複雜化，故障率產生的機會也隨著增多，所以對於整個系統和時間性品質之可靠性的大小與製程能力的程度有加以探討的必要，因此，本節考慮對於任意尺度參數 α 以及形狀參數 β 給定之下的韋伯故障率函數(*Weibull Hazard Function*)之事前分配，亦就是，$\theta\sim W(\alpha,\beta_0)$；當 $\beta_0<1$ 時，此函數是時間(θ)的遞減函數；當 $\beta_0>1$ 時，此函數是時間的遞增函數；當 $\beta_0=1$ 時，此函數是常數函數；以及在平方誤差的損失函數下，求其製程指標之貝氏的估計量以及極值的單邊信用區間估計。

$$\pi(\theta)=\frac{\beta_0}{\alpha}\left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\beta_0-1}，\quad \theta，\alpha，\beta_0>0。\tag{5.1}$$

在一般 $\mu\neq T$ 情形下，得知若 $Y=\hat{C}_{pp}$，則 Y 的機率密度函數為

$$f(y|C_{pp})=\frac{1}{\Gamma(f/2)}\left(\frac{(n-1)f}{2nC_{pp}}\right)^{\frac{f}{2}}y^{\frac{f}{2}-1}\exp\left(\frac{-(n-1)fy}{2nC_{pp}}\right)。$$

(A)、 C_{pp} ($\mu\neq T$)的點估計

設參數 $\theta=1/C_{pp}$，且 θ～ W(α，β_0)，$\pi(\theta)=\dfrac{\beta_0}{\alpha}\left(\dfrac{\theta}{\alpha}\right)^{\beta_0-1}$， θ，α，$\beta_0>0$，則 θ 與 y 的聯合機率密度函數 $f(\theta, y)$為

$$f(\theta, y)=\frac{\beta_0}{\alpha^{\beta_0}}\times\frac{\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{f}{2}\right)^{\frac{f}{2}}}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)}\theta^{\frac{f}{2}+\beta_0-1}y^{\frac{f}{2}-1}\exp\left(-\frac{n-1}{n}\times\frac{f\,y\,\theta}{2}\right)。\tag{5.2}$$

所以在給定 y 下，θ 的事後分配為

$$f(\theta|y)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{f}{2}+\beta_0\right)}\left(\frac{(n-1)f\,y}{2n}\right)^{\frac{f}{2}+\beta_0}\theta^{\frac{f}{2}+\beta_0-1}\exp\left(-\frac{(n-1)f\,y\,\theta}{2n}\right)。\tag{5.3}$$

因此，可得到$\left(\frac{1}{\theta}\right)\Big|y$ 服從 *Inverse Gamma* 分配。故在給定 $\hat{C}_{pp}$ 下， $C_{pp}(\mu\neq T)$之事後分配的期望值為

$$E\left(\frac{1}{\theta}\Big|\hat{C}_{pp}\right)=\left(\left(\frac{f}{2}+\beta_0-1\right)\times\left(\frac{(n-1)f\,\hat{C}_{pp}}{2n}\right)^{-1}\right)^{-1}=\frac{(n-1)f\,\hat{C}_{pp}}{n(f+2\beta_0-2)}，\tag{5.4}$$

因此，C_{pp} 在之貝氏估計量為$\dfrac{(n-1)f\,\hat{C}_{pp}}{n(f+2\beta_0-2)}$，其眾數為$\dfrac{(n-1)f\,\hat{C}_{pp}}{n(f+2\beta_0+2)}$。 (5.5)

(B)、 $C_{pp}(\mu\neq T)$的區間估計

由於 $$2\theta/\left(\frac{(n-1)f\,y}{2n}\right)^{-1}\sim\ \chi^2_{f+2\beta_0}，\tag{5.6}$$

則 $\theta_{pp}=\chi^2_{p,f+2\beta_0}\left(\dfrac{(n-1)f\,y}{2n}\right)^{-1}/2=\dfrac{n}{(n-1)f}\times\dfrac{\chi^2_{p,f+2\beta_0}}{\hat{C}_{pp}}$，式中 $\chi^2_{p,f+2\beta_0}$ 表示右尾面積為 $100\times p\%$之自由度 $f+2\beta_0$ 的卡方分配。

因此，C_{pp} 在 $\mu\neq T$ 的 $100\times p\%$的上界信用區間為$\left[\ 0\ ,\ \dfrac{(n-1)f\ \hat{C}_{pp}}{n\,\chi^2_{p,f+2\beta_0}}\right]$。 (5.7)

當 $f+2\beta_0$ 不是整數，則採用如同第 3 節的插補法，求 $\chi^2_{f+2\beta_0}$ 的近似值。

最後，我們把指標在 *Weibull Hazard* 函數之事前分配下，所得到的點估計與區間估計摘錄於下表 4。由表中可知，當 $\beta_0=0$ 時，表 4 就變成表 2。因為當 β 接近於 0 時，*Weibull Hazard* 函數之事前分配的極限就變成 *Non-informative* 之事前分配。

表 4 在 *Weibull Hazard* 函數事前分配下，指標之點估計與區間估計，$W(\alpha,\beta_0)$ ，β_0 給定下

製程指標	事後分配的期望值	事後分配的眾數	100×p% 信用區間
$C_{pp}(\mu = T)$	$\dfrac{(n-1)\hat{C}_{pp}}{n+2\beta_0-2}$	$\dfrac{(n-1)\hat{C}_{pp}}{n+2\beta_0+2}$	$\left[0,\ \dfrac{(n-1)\hat{C}_{pp}}{\chi^2_{p,n+2\beta_0}}\right]$
$C_{pp}(\mu \neq T)$	$\dfrac{(n-1)f\hat{C}_{pp}}{n(f+2\beta_0-2)}$	$\dfrac{(n-1)f\hat{C}_{pp}}{n(f+2\beta_0+2)}$	$\left[0,\ \dfrac{(n-1)f\hat{C}_{pp}}{n\chi^2_{p,f+2\beta_0}}\right]$

Note: 因 f 未知，故以 $MLE\ \hat{f}$ 估計之。其中 $\lambda = n(\mu-T)^2/\sigma^2$， $e=\dfrac{n+2\lambda}{n+\lambda}$ ，$f=\dfrac{(n+\lambda)^2}{n+2\lambda}$ ，且 $\hat{\lambda}/n=(\bar{x}-T)^2/S^2$ 。

為了將上述的貝氏信用區間程序，在產業界的評估製程能力與績效時，更方便、更可靠，我們應用統計軟體，計算在不同的製程能力指標的值、參數及信用水準 100p%下，貝氏上界信用區間的變化情形，更期能簡化應用上繁瑣的計算過程。同時，根據以上的資料整理一個判斷程序步驟，簡述如下：

步驟 1：針對顧客對製程產品的滿意程度，設定預設值 c_{01} 與信用水準 100p%。

步驟 2：其次，根據樣本資料，計算各製程能力指標值以及對應的參數，如 $\bar{x}$ 、S、$\hat{\lambda}$ 、$\hat{\delta}$ 、$\hat{f}$ 、α_0 或 β_0 等。

步驟 3：再根據信用水準 100p%，樣本大小 n 及各參數值，計算各製程能力指標上界信用區間值 c_1。

步驟 4：最後，若上界信用區間值 c_1 小於 c_{01}，表示製程能力已達到要求；否則，表示製程能力未達到要求。

6. 範例說明

假若一個製程的 C_{pp} 指標值小於等於 0.5 時,則這種製程的品質稱為上等的(Super)；假若 0.5 ≦C_{pp} < 0.67 時，則這種製程的品質稱為優等的(Excellent)；假若 0.67 ≦C_{pp} < 0.75 時，則這種製程的品質稱為良品的(Satisfactory)，表示這製程的品質是滿意的且也允許替換材料；假若 0.75≦C_{pp} < 1 時，則這種製程的品質稱為合格品 (Capable)，此時表示必須要很小心注意製程分配以及製程控制；最後，假若 C_{pp}≧ 1 時，則這種製程的品質稱為不合格品 (Inadequate)，意思是表示要嚴格地控制製程及必須要調整這製程規格，要降低製程變動幅度或移動製程平均靠近於目標值，或是兩者一起調整。

為了判斷在渴望地品質控制下，製程是否符合品質需求，我們考慮下列貝氏步驟。如果 $C_{pp} < c_{01}$。如果，我們所計算的製程能力指標之上界信用區間 [0，θ_{pp}] 且 $\theta_{pp} < c_{01}$，則我們以貝氏的觀點而言，可宣稱這製程為合格製程。

接下來，我們使用有關自動發動機的活塞環(Piston Ring)是從煉鐵的過程中被製造的資料 來說明貝氏程序。設從一個穩定過程中所測量活塞環的內徑長度之資料中隨機抽出樣本大小 n =125 的資料，詳細請見 Montgomery(2001)的表 5-1，其規格為(LSL，T，USL) = (73.95，74，74.05)，經由計算得其樣本平均數 $\bar{x}$ =74.001176，樣本標準差 s

=0.01006997，以及弱度製程能力指標的點估計值為 $\hat{C}_{pp} = 0.370034$。

並且針對三種事前分配建立其表格，並說明如下：

首先，對非情報事前分配而言，經由活塞環的例子，對各種 $\hat{\delta}$ 值，其中 $\hat{\delta}(=\hat{\lambda}/n=(\bar{x}-T)^2/S^2)$，建立各事後分配的期望值與眾數，如表 5。而在非情報事前分配下，有關製程指標的信用區間$[\,0\,,\theta_{pp}\,]$，如表 6。在表 6 中，當 $\hat{\delta}$ 固定時，製程指標的上界值會隨事後機率 100×p%增加而遞增；然而，對 $\hat{C}_{pp} = 0.370034$， $\mu \neq T$，與 n=125 而言，在 $\hat{\delta}=0$ 與 $\hat{\delta}=2$ 以及事後機率 95%下，其上界信用區間分別為 [0 , 0.4580] 與 [0 , 0.4318]，假若消費者要求 C_{pp} 的製程能力水準至多為 $c_{01} = 0.83$，則由於 $\hat{\delta}=0$ 與 $\hat{\delta}=2$ 所對應的 $C_{pp}(\mu \neq T)$在 99.9%之最大值分別為 0.5611 與 0.5003，皆比 $c_{01} = 0.83$ 小。因此，表示對於 $\hat{\delta}=0$ 與 $\hat{\delta}=2$ 的兩種製程，皆為合格製程。

其次，對 *Gamma* 事前分配而言，經由活塞環的例子，對各種 $\hat{\delta}$ 及 α_0 值，建立各製程指標之事後分配的期望值與眾數，如表 7 至表 9。而有關弱度製程指標的信用區間$[\,0\,,\theta_{pp}\,]$，如表 10。在表 10 中的 C_{pp} 上界值則隨 α_0 增加而遞減；當 α_0 固定時，製程指標 C_{pp} 的上界值會隨事後機率 100×p%增加而遞增；當事後機率 100×p%固定時，製程指標 C_{pp} 的上界值則隨 $\hat{\delta}$ 增加而遞減。更值得注意的是，當 α_0 接近於 0 時，表 10 中 C_{pp} 上界值就變成表 6 的內容。

最後，對 *Weibull Hazard Function* 事前分配而言，經由活塞環的例子，對各種 $\hat{\delta}$ 及 β_0 值，建立弱度製程指標之事後分配的期望值與眾數，如表 11 與表 12。而有關弱度製程指標的信用區間 $[\,0\,,\theta_{pp}\,]$，如表 13。在表 13 中的 C_{pp} 上界值則隨 β_0 增加而遞減；當 β_0 固定時，製程指標 C_{pp} 的上界值會隨事後機率 100×p%增加而遞增；當事後機率 100×p%固定時，製程指標 C_{pp} 的上界值則隨 $\hat{\delta}$ 增加而遞減。更值得注意的是，當 β_0 接近於 0 時，表 13 中 C_{pp} 上界值就變成表 6 中 C_{pp} 上界值。

表 5 在非情報事前分配下，$C_{pp}\,(\mu \neq T)$之事後分配的期望值與眾數

製程指標	$\hat{\delta}$	0	0.5	1	1.5	2
	$\hat{f}$	*n*	*9n/8*	*4n/3*	*25n/16*	*9n/5*
		125	140.625	166.6667	195.3125	225
C_{pp} $(\mu \neq T)$	期望值	0.3730	0.3724	0.3715	0.3709	0.3704
	眾數	0.3613	0.3619	0.3627	0.3634	0.3638

表 6 在非情報事前分配下， $C_{pp}\,(\mu \neq T)$的信用區間，$n = 125$

製程指標	$\hat{\delta}$	0	0.5	1	1.5	2
	$\hat{f}$	*n*	*9n/8*	*4n/3*	*25n/16*	*9n/5*
		125	140.625	166.666	195.312	225
$C_{pp}\,(\mu \neq T)$	0.9	0.4361	0.4316	0.4256	0.4206	0.4165
	0.95	0.4580	0.4519	0.4439	0.4372	0.4318
	0.975	0.4782	0.4706	0.4606	0.4523	0.4456
	0.99	0.5032	0.4936	0.4811	0.4708	0.4624

表 7 在 *Gamma* 事前分配下，製程能力指標的事後分配的期望值，
$n = 125$， $G(\alpha_0, \beta)$ ，$\hat{\delta} = 0$

製程指標	α_0							
	0.001	0.01	0.1	0.5	1	10	50	100
$C_{pp}(\mu = T)$	0.3730	0.3730	0.3730	0.3730	0.3729	0.3722	0.3704	0.3693
$C_{pp}(\mu \neq T)$	0.3730	0.3730	0.3730	0.3730	0.3729	0.3722	0.3704	0.3693

表 8 在 *Gamma* 事前分配下，製程能力指標之事後分配的眾數，
$n = 125$， $G(\alpha_0, \beta)$ ，$\hat{\delta} = 0$

製程指標	α_0							
	0.001	0.01	0.1	0.5	1	10	50	100
$C_{pp}(\mu = T)$	0.3613	0.3613	0.3613	0.3613	0.3614	0.3621	0.3638	0.3648
$C_{pp}(\mu \neq T)$	0.3613	0.3613	0.3613	0.3613	0.3614	0.3621	0.3638	0.3648

表 9 在 *Gamma* 事前分配下，製程能力指標 $C_{pp}(\mu \neq T)$之事後分配的期望值，
$n = 125$，$G(\alpha_0, \beta)$

		α_0							
$\hat{\delta}$	$\hat{f}$	0.001	0.01	0.1	0.5	1	10	50	100
0	*n*	0.3730	0.3730	0.3730	0.3730	0.3729	0.3722	0.3704	0.3693
0.5	*9n/8*	0.3724	0.3724	0.3724	0.3723	0.3723	0.3717	0.3702	0.3692
1	*4n/3*	0.3715	0.3715	0.3715	0.3715	0.3715	0.3710	0.3698	0.3691
1.5	*25n/16*	0.3709	0.3709	0.3709	0.3709	0.3708	0.3705	0.3696	0.3689

表 10 在 *Gamma* 事前分配下，製程能力指標 $C_{pp}(\mu \neq T)$的上界信用區間，

$n = 125$，$G(\alpha_0, \beta)$

			α_0							
$\hat{\delta}$	$\hat{f}$	*p*	0.001	0.01	0.1	0.5	1	10	50	100
0	*n*	0.9	0.4361	0.4361	0.4360	0.4358	0.4355	0.4305	0.4165	0.4075
		0.95	0.4580	0.4580	0.4579	0.4576	0.4572	0.4504	0.4318	0.4197
		0.975	0.4782	0.4782	0.4781	0.4777	0.4772	0.4687	0.4456	0.4308
		0.99	0.5032	0.5032	0.5031	0.5026	0.5019	0.4913	0.4624	0.4441
0.5	*9n/8*	0.9	0.4316	0.4316	0.4315	0.4313	0.4311	0.4269	0.4147	0.4064
		0.95	0.4519	0.4519	0.4519	0.4516	0.4512	0.4456	0.4294	0.4184
		0.975	0.4706	0.4706	0.4705	0.4702	0.4697	0.4627	0.4426	0.4291
		0.99	0.4936	0.4936	0.4935	0.4931	0.4925	0.4837	0.4587	0.4420
1	*4n/3*	0.9	0.4256	0.4256	0.4256	0.4254	0.4252	0.4220	0.4121	0.4049
		0.95	0.4439	0.4439	0.4439	0.4437	0.4434	0.4391	0.4259	0.4163
		0.975	0.4606	0.4606	0.4606	0.4603	0.4600	0.4546	0.4383	0.4266
		0.99	0.4811	0.4811	0.4811	0.4807	0.4803	0.4736	0.4534	0.4390
1.5	*25n/16*	0.9	0.4206	0.4206	0.4206	0.4205	0.4203	0.4178	0.4096	0.4034
		0.95	0.4372	0.4372	0.4372	0.4370	0.4368	0.4334	0.4226	0.4143
		0.975	0.4523	0.4523	0.4523	0.4521	0.4518	0.4476	0.4343	0.4241
		0.99	0.4708	0.4708	0.4707	0.4704	0.4701	0.4649	0.4484	0.4360

表 11 在 *Weibull hazard* 事前分配下，製程能力指標之事後分配的眾數，
$n = 125$， $W(\alpha, \beta_0)$，$\hat{\delta} = 0$

製程指標	β_0							
	0.001	0.01	0.1	0.5	1	10	50	100
$C_{pp}(\mu = T)$	0.3613	0.3612	0.3607	0.3585	0.3557	0.3121	0.2021	0.1403
$C_{pp}(\mu \neq T)$	0.3613	0.3612	0.3607	0.3585	0.3557	0.3121	0.2021	0.1403

表 12 在 *Weibull hazard* 事前分配下，製程能力指標 $C_{pp}(\mu \neq T)$之
事後分配的期望值，$n = 125$，$W(\alpha, \beta_0)$

		β_0							
$\hat{\delta}$	$\hat{f}$	0.001	0.01	0.1	0.5	1	10	50	100
0	n	0.3730	0.3730	0.3724	0.3700	0.3671	0.3209	0.2058	0.1421
0.5	$9n/8$	0.3724	0.3723	0.3718	0.3697	0.3671	0.3254	0.2163	0.1524
1	$4n/3$	0.3715	0.3715	0.3711	0.3693	0.3671	0.3313	0.2312	0.1678
1.5	$25n/16$	0.3709	0.3708	0.3705	0.3690	0.3671	0.3361	0.2444	0.1823

表 13 在 *Weibull hazard* 事前分配下，製程能力指標 $C_{pp}(\mu \neq T)$的
上界信用區間，$n = 125$，$W(\alpha, \beta_0)$

			β_0							
$\hat{\delta}$	$\hat{f}$	p	0.001	0.01	0.1	0.5	1	10	50	100
0	n	0.9	0.4361	0.4360	0.4353	0.4323	0.4286	0.3711	0.2314	0.1567
		0.95	0.4580	0.4579	0.4572	0.4540	0.4500	0.3883	0.2399	0.1614
		0.975	0.4782	0.4781	0.4774	0.4739	0.4697	0.4041	0.2476	0.1657
		0.99	0.5032	0.5031	0.5023	0.4986	0.4940	0.4235	0.2569	0.1708
0.5	$9n/8$	0.9	0.4316	0.4315	0.4309	0.4283	0.4250	0.3737	0.2424	0.1678
		0.95	0.4519	0.4518	0.4512	0.4484	0.4449	0.3901	0.2509	0.1727
		0.975	0.4706	0.4705	0.4698	0.4668	0.4631	0.4051	0.2587	0.1772
		0.99	0.4936	0.4935	0.4928	0.4896	0.4856	0.4235	0.2681	0.1825
1	$4n/3$	0.9	0.4256	0.4256	0.4251	0.4229	0.4202	0.3768	0.2576	0.1840
		0.95	0.4439	0.4439	0.4433	0.4410	0.4381	0.3920	0.2662	0.1892
		0.975	0.4606	0.4606	0.4600	0.4576	0.4545	0.4059	0.2739	0.1939
		0.99	0.4811	0.4811	0.4805	0.4779	0.4746	0.4229	0.2834	0.1995
1.5	$25n/16$	0.9	0.4206	0.4206	0.4202	0.4183	0.4161	0.3790	0.2709	0.1993
		0.95	0.4372	0.4372	0.4367	0.4348	0.4324	0.3932	0.2795	0.2047
		0.975	0.4523	0.4523	0.4518	0.4498	0.4472	0.4060	0.2872	0.2096
		0.99	0.4708	0.4707	0.4702	0.4681	0.4654	0.4217	0.2966	0.2154

7. 結論

由於製程品質特性分配之參數通常都是未知的，須藉由樣本的資料來估計，才能得到指標的估計值。但往往使用者常會根據此點估計值，作為是否符合製程標準的依據。

因此僅根據指標的點估計值來判斷製程是否達到要求的話，常因忽略了抽樣誤差而造成不可靠。於是為了能夠聲明，有一相當確定的程度包含真實的製程能力指標值，通常寧願得到一個區間估計值。況且有些製程能力指標估計量的抽樣分配通常很複雜，要想建構出一個好的區間估計值是件很困難的事。

因此，我們在本文，採用貝氏方法，探討在平方誤差損失函數及保證在合格製程中所發生的事後機率至少為 $100 \times p\%$下，求其與傳統信賴區間相類似的貝氏信用區間。另外，也為了使貝氏程序能在製造業、高科技的半導體產業上更容易使用，除了提供一些表格可供參考外，還提供一套判斷的步驟。

參考文獻

1. Caulcutt, R. (2001), “Why is Six Sigma so sucessful ?” *Journal of Applied Statistics*, 28(3&4), pp301-306.
2. Chan, L. K., Cheng, S. W. and Spiring, F. A. (1988), “A new measure of process capability: C_{pm}.” *Journal of Quality Technology*, 20(3), pp162-175.
3. Chou, Y. M. and Owen, D. B. (1989), “On the distribution of the estimated process capability indices.” *Communicaton in statistic --- Theory and Method*, 18(12), pp4549-4560.
4. Chou, Y. M., Owen, D. B and Borrego A.,S.A. (1990), “Lower confidence limits on process capability indices.” *Journal of Quality Technology*, 22(3), pp223-229.
5. Greenwich,M. and Jahr-Schaffrath, B.L. (1995),” A process incapability index.” *Internation* Journal *of Quality & Reliability Management*, 12(4), pp58-71.
6. Juran, J. M. (1974), *Jurans Quality Control Handbook.* McGraw Hill, New York.
7. Juran, J. M. and Gryna, F. M. (1980), *Quality Planning and Analysis.* McGraw Hill, New York.
8. Kane, V.E. (1986), “Process capability indices.” *Journal of Quality Technology*, 18(1), pp41-52.
9. Montgomery, D.C.(2001), *Introduction to Statistical Quality Control*. Wiley, New York.
10. Patnaik, P. B.(1949), “ The non-central χ^2 and F-distributions and their approximations.” *Biometrika* , 36, pp202-232.
11. Pearn, W. L., Kotz, S. and Johnson, N. L. (1992), “Distributional and inferential properties of process capability indices.” *Journal of Quality Technology*, 24(4), pp216-231.
12. Wright, P. A. (1998), “The probability density function of process capability index C_{pmk}.” *Communicaton in statistic --- Theory and Method*, 27(7), pp1781- 1789.