行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※
※　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　※
※　生產速率控制與銷售速率控制之間的整合模式分析　※
※　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　※
※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

計畫類別：☑個別型計畫　　□整合型計畫

計畫編號：NSC90－2416－H－343－001

執行期間：　90 年 8 月 1 日至 91 年 7 月 31 日

計畫主持人：陳淼勝

共同主持人：朱美珍

計畫參與人員：張明坤 陳柏宇

執行單位：南華大學

中　華　民　國　九十一年十月十一日

行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告

生產速率控制與銷售速率控制之間的整合模式分析

The Analysis of Integration Model on Production-Rate Control and Sales-Rate Control

計劃編號：NSC 90-2416-H-343-001

執行期限：90 年 8 月 1 日至 91 年 7 月 31 日

主持人：陳 淼 勝　　南華大學管理研究所

共同主持人：朱美珍 銘傳大學資訊管理學系

計畫參與人員：張明坤 南華大學管理研究所

一、摘要

本研究為線性需求函數假設下的一個產銷配合最適控制問題的數學模式。其目的在探討：決策者如何決定最佳生產速率及如何透過價格的制定來控制各個不同時點的銷售速率，使得在未來決策期間總利潤最大。研究結果顯示：決策者可透過平均成本最小化的產出量與恆零存貨利潤最大化的產出量兩者之間相對大小關係，決定最佳生產速率進而可界定決策者最適存貨政策的類別：屬於〝恆零存貨政策〞;或屬於〝恆正存貨政策〞;或屬於〝部份零與部份正存貨政策〞。

關鍵詞：製商整合，決策分析，價格策略，生產計劃

Abstract

A mathematical model is developed and presented to solve the optimal control problem in matching between manufacturing and marketing when the market demand possesses the property of linearity. The main purpose of this paper is to investigate the optimal choice between production rate which may affect the inventory level and the optimal sales rate at each time through different pricing strategies so as to achieve the maximum profit for a given planning horizon. The results demonstrated that the relative size of the output yielded by minimizing average cost and yielded by maximizing profit at constant-zero inventory can determine the optimal production rate and sales rate. Furthermore, the optimal inventory policy can be determined to be a constant-zero inventory policy or constant-positive inventory policy, or mixed inventory policy, according to the value of optimal production rate.

Keywords: The integrated production-sales problem, decision analysis, price, production planning

二、前言

網際網路(Internet) 和全球資訊網(World Wide Web; WWW)應用的快速發展，再加上企業追求一個以低成本、高效率的方式來迅速傳遞市場與供應商或製造商的訊息。因此，企業導入這些資訊科技系統後，使得其整個經營管理階層能迅速得知其營業過程中在供給、需求與市場等三方面的重要資訊，從而達成供應鏈整體運作的最大效益。所以企業面對這種經營型態的轉變，並不再只

單獨考慮製造商在生產方面如何決定生產速率多少以期總成本極小化問題，抑或單獨考慮銷售商在銷售方面應如何制定價格以期總利潤極大化問題，而是必須結合生產與銷售兩方面來探討製商整合的問題。因此如何透過適當的模式建構來探討製商整合問題以提供決策者做為決策參考,實為一重要之研究課題。

對於製商整合問題的研究裡，有Thomas[10]在需求為已知的情形下，利用動態規劃方法得到動態多期最適存貨與價格之間的協調策略。Pekelman[10]是探討動態連續性的存貨、價格與生產量協調策略的問題的先驅，並且得到條件下的最適價格與生產量。相繼的又有多位學者研究這類型的問題如：Feichtinger和Hartl[4]放寬成一般非線性函數並允許缺貨情形下，決定最適生產量及價格控制銷售速率的問題。Gaimon[5]則是利用最適控制理論得到動態的價格，生產率存貨與產能之間的協調策略模式。Eliashberg和Steinberg[3]探討在產與銷的系統中，在面臨不穩定非季節性需求考量下，得到製造商的最適訂價，生產量與存貨政策之協調策略及經銷商的最適訂價，銷售量與存貨量之協調策略問題。Jorgensen[6]延伸Pekelman所探討的模式利用最適控制理論求得製造商與經銷商價格策略與存貨之間協調準則。Lee和Kim[8]利用完全整合和部分整合模型決定最適價格、行銷支出、需求量及生產量的生產與銷售整合問題。Lee、Kim和Cabot[9]也探討生產與銷售結合的問題,他們以Cheng[2]所提模式為基礎，考慮在兩種不同決策下制定最適價格、需求量及生產量，以期利潤最大化問題。最近,Kim和Lee[7]提出探討在生產線上，擴充人力資源為固定及變動情形下的最適價格批量問題和分權與集權制度下最適生產與銷售協調策略等問題。然而上述諸多文獻在探討生產與銷售整合問題時，並未對每一時點的價格變化對銷售速率影響進而又影響生產時間長度的問題有所討論。Chen和Chu[1]所探討之如何透過各時點之價格的決定，來控制其產品銷售速率，進而決定其零存貨時間長度與生產時間終點，以期在給定的銷售期間總利潤最大之產銷配合問題中卻未對生產速率與銷售速率控制作一整合分析。本研究針對在未來可生產與銷售的時間區間內，且其相關產品的生產環境及銷售環境係處於穩定狀態，亦即在未來的可銷售時間區間內，產品的價格與數量變動關係不變且決策者的認知估計改變不大的情形下，建構一最適控制數學模式來探討如何決定最佳生產速率與如何透過不同時點價格的制定來控制每一時點的銷售速率，以期在給定的銷售期間總利潤最大。

三、數學符號與假設

<u>參數與給定的函數</u>

$[0,T]$：決策者擬定決策的一時間區間，其中T為未來做決策之一時間長度

h：單位貨品儲存單位時間的持有成本

$P_t = b - as_t$：在t時點之需要函數，其中$t \in [0,T]$，P_t為t時點的價格，s_t為t時點的銷售率，$a>0$，$b>0$，且$0 \le s_t \le b/a$

$c(q)$：生產率為q之單位時間的生產成本，此項成本包含產品製造所發生固定及變動成本，其中$c(0)\ge 0$，$c'(q)>0$，$c''(q)>0$

q_{ACM}： 平均成本最小化的產出量，其中 $q_{ACM} \geq 0$ ，即 $\frac{c(q_{ACM})}{q_{ACM}} = \min_q \frac{c(q)}{q}$ ；亦即 $qc'(q) - c(q) \geq 0 \Leftrightarrow q \geq q_{ACM}$

q_{PM} ：恆零存貨利潤最大化的產出量，其中 $q_{PM} \geq 0$ ，即 q_{PM} 為 $\max_q [(b-aq)q - c(q)]$ 的最佳解，亦即

q_{PM} 滿足 $[b - 2aq - c'(q)]\Big|_{q=q_{PM}} = 0$

<u>決策變數或函數</u>

$y(t)$ ： 在 $[0,t]$ 內的銷售量，$0 \leq t \leq \bar{t}_y \leq T$，其中 $\bar{t}_y$ 為 y 所對應之銷售時間區間的終點， $y(0)=0$ 且 $y(t) \leq qt \quad \forall t \in [0, \bar{t}_y]$

q ：產品的生產率(單位時間內的產量)

$\frac{y(\bar{t}_y)}{q}$ ： y 所對應之生產活動的時間終點；即 $[0, \frac{y(\bar{t}_y)}{q}]$ 為生產時間區間，其中 $\frac{y(\bar{t}_y)}{q} \leq T$

t_y : $t_y \in [0, T]$ 為 y 所對應之恆零存貨時間長度，即維持生產速率與銷售速率相同之時間長度，亦即 t_y 為滿足等式 $y(t) = qt$ 的最大 t 值(因 $y(0)=0$，所以此 t_y 值必定存在)

本文參考Chen和Chu[1]所提假設條件且可得到在利潤最大化之下的 $\bar{t}_y$ 必滿足 $\bar{t}_y = T$ 。同時在此假設條件下產品的生產率 q 將被限制在下列集合內考慮：

$$\{q \mid (b-aq)q - c(q) \geq 0\} = \{q \mid q_s \leq q \leq q_l\};$$

其中 q_s 及 q_l 為滿足 $(b-aq)q - c(q) = 0$ 之兩個根。

四、數學模式與最佳解

對決策者而言在 $[0,T]$ 時間區間，如何決定產品的生產速率 q 及如何透過價格制定，來控制每一時點的銷售速率 $y'(t)$ ， $0 \leq t \leq T$ ，使得在 $[0,T]$ 時間區間獲取最大利潤之產銷配合數學模式可表為:

模式I:

$$\underset{(q,y)}{\text{Max}} \; J(q,y) = \underset{q}{Max}\underset{y}{Max}\int_{t_y}^{T}\left(-ay'^2(t) + by'(t) + hy(t)\right)dt + (b-aq)qt_y - \frac{c(q)y(T)}{q} + \frac{hqt_y^2}{2} + \frac{hy^2(T)}{2q} - hTy(T)$$

s.t. $y(t_y) = qt_y$ 且 $y(t) < qt \quad \forall t \in (t_y, T]$

$$0 \leq y'(t) \leq \frac{b}{a} \qquad \forall t \in [t_y, T]$$

$$q_s \leq q \leq q_l$$

令 y_q 為模式I固定 q 之下的一最佳解,則由Chen和Chu[1]的最佳解求解的過程中可得到最佳解 y_q 如下：

情況一：

若 $0 < q - \sqrt{\frac{(-aq+b)q - c(q)}{a}} < \frac{hT}{2a}$

則 $t_{y_q} = T - \frac{2a}{h}\left(q - \sqrt{\frac{(-aq+b)q - c(q)}{a}}\right)$

$$y_q(t) = \begin{cases} qt & \forall\, t \in [0, t_{y^*}] \\ -\frac{h}{4a}(t - t_{y^*})^2 + qt & \forall\, t \in [t_{y^*}, T] \end{cases}$$

(即最佳解之狀況為部份零與部份正存貨政策)

情況二：

若 $q - \sqrt{\frac{(-aq+b)q - c(q)}{a}} \geq \frac{hT}{2a}$ 則

$$t_{y_q} = 0$$

$$y_q(t) = -\frac{h}{4a}t^2 + \frac{1}{4a}\left[2aq + hT + 4a\frac{(-aq+b)q - c(q)}{2aq - hT}\right]t \qquad \forall\, t \in [0, T]$$

（即最佳解之狀況為恆正存貨政策）

情況三：

若 $q-\sqrt{\dfrac{(-aq+b)q-c(q)}{a}}\le 0$ 則

$t_{y_q}=T$

$y_q(t)=qt \qquad \forall t\in[0\,,T]$

（即最佳解之狀況為恆零存貨政策）

至於如何決定模式 I 的最佳生產速率，我們可考慮將模式 I 表示成模式 II。

模式II $\max\limits_{q_s\le q\le q_l} J(q\,,y_q)$

若令 q^* 為模式II的最佳生產速率，則 q^* 為模式II最佳解的充要條件為 $(q^*\,,y_{q^*})$ 為模式I的最佳解。令 $J(q)=J(q\,,y_q)$，將前述最佳解 y_q 代入目標函數可得下列關係式：

(1)若 $q\in S_1$

$$S_1=\{q\,|\,q_s\le q\le q_l \ and\ q-\sqrt{\frac{(b-aq)q-c(q)}{a}}\le 0\}$$

則 $J(q)=J_1(q)=[(b-aq)q-c(q)]T$

(2) 若 $q\in S_2$

$$S_2=\{q\,|\,q_s\le q\le q_l \ and\ q-\sqrt{\frac{(b-aq)q-c(q)}{a}}\le \frac{hT}{2a}\}$$

則

$$J(q)=J_2(q)=[(b-aq)q-c(q)]T$$
$$+[(b-aq)q-c(q)]\left[\frac{4\sqrt{a}}{3h}\sqrt{(b-aq)q-c(q)}-\frac{(b-aq)q-c(q)}{2hq}-\frac{aq}{h}\right]+\frac{a^2q^3}{6h}$$

(3) 若 $q\in S_3$

$$S_3=\{q\,|\,q_s\le q\le q_l \ and\ q-\sqrt{\frac{(b-aq)q-c(q)}{a}}\ge \frac{hT}{2a}\}$$

則 $J(q)=J_3(q)=\dfrac{(2b-2c(q)-hqT)^2T}{8q(2aq-hT)}+\dfrac{h^2T^3}{48a}$

透過最佳解存在的性質與圖解分析討論可得到模式I的最佳生產速率 q^* 有下列情況的發生：

情況1：若 $q_{ACM}\le q_{PM}$ 則

$q-\sqrt{\dfrac{(b-aq)q-c(q)}{a}}\le 0$ 且

$q^*=q_{PM}$

情況2：若 $q_{ACM}>q_{PM}$ 且 $q_{PM}\ge\bar{q}$ 則

$q-\sqrt{\dfrac{(b-aq)q-c(q)}{a}}\ge\dfrac{hT}{2a}$ 且 $q^*=\bar{q}$

情況3：若 $q_{ACM}>q_{PM}$ 且 $q_{PM}<\bar{q}$ 則

$0<q-\sqrt{\dfrac{(b-aq)q-c(q)}{a}}<\dfrac{hT}{2a}$ 且

$q^*\in[q_{PM}\,,\bar{q}\Theta q_{ACM}]$

五、結論

本研究構建一個屬於產銷配合控制問題的數學模式提供給決策者參考，透過數學模式求解決策者只要考量平均成本最小化的產出量 q_{ACM} 及恆零存貨利潤最大化產出量 q_{PM} 之間相對大小關係，即可決定此問題之最佳生產速率 q^*，進而決定最適存貨政策的型態，茲說明如下：

情況 I：若平均成本最小化的產出量，小於或等於，恆零存貨利潤最大化的產出量；則最佳生產速率為恆零存貨利潤最大化的產出量，且決策者的最適存貨政策為〝恆零存貨政策〞。

情況 II：若平均成本最小化的產出量，大於，恆零存貨利潤最大化的產出量，且恆零存貨利潤最大化的產出量，大於，生產速率上限，則最佳生產速率為生產速率上限，且決策者的最適存貨政策為〝恆正存貨政策〞。

情況 III：若平均成本最小化的產出量，大於，恆零存貨利潤最大化的產出

量，且恆零存貨利潤最大化的產出量，小於或等於，生產速率上限，則需視各相關參數值的相對大小確定後，最佳生產速率恆介於恆零存貨利潤最大化的產出量及平均成本最小化的產出量與生產速率上限之最小值之間，且決策者的最適存貨政策可能為〝恆零存貨政策〞、〝恆正存貨政策〞或〝部份零與部份正存貨政策〞三者之一。

重視產銷配合經營的決策者，必須迅速掌握供應、需求與市場三方面的訊息，本文所構建之數學模式決策者可設計一即時反應的自動機制；每天生產多少可迅速通報生產單位及銷售價格變化的訊息獲知可決定最適存貨政策且敏感度分析亦可透過此自動機制獲得。

參考資料

[1] Chen, M.S. and Chu, M.C., “The Analysis of Optimal Price Control Model in Matching Problem Between Production and Sales,” *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, vol. 18, pp. 131-148, 2001.

[2] Cheng, T. C. E., “An Economic Order Quantity Model with Demand-Dependent Unit Production Cost and Imperfect Production Processes,” *IIE Transactions*, Vol. 23, pp. 23-28, 1991.

[3] Eliashberg, J. and Steinberg, R., “ Marketing-Production Decisions in an Industrial Chanel of Distribution,” *Management Science*, Vol. 33, No. 8, pp. 981-1000, 1987.

[4] Feichtinger, G. and Hartl, R. , “Optimal Pricing and Production in an Inventory Model,” *European Journal of Operational Research*,” Vol. 19, pp. 45-56, 1985.

[5] Gaimon, C., “Simultaneous and Dynamic Price, Production, Inventory and Capacity Decisions,” *European Journal of Operational Research*, Vol. 35, pp. 426-441, 1988.

[6] Jorgensen, S., “Optimal Production, Purchasing and Pricing: A Differential Game Approach,” *European Journal of Operational Research*, Vol. 24, pp. 64-76, 1986.

[7] Kim, D. and Lee, W. J., “Optimal Coordination Strategies for Production and Marketing Decisions,” *Operations Research Letter*, Vol. 22, pp. 41-47,1998.

[8] Lee, W. J. and Kim, D., “Optimal and Heuristic Decision Strategies for Integerated Production and Marketing Planning,” *Decision Science*, Vol. 24, No. 6, pp. 1203-1213, 1993.

[9] Lee, W. J., Kim, D. and Cabot, A. V., “Optimal Demand Rate, Lot Sizing and Process Reliability Improvement Decisions,” *IIE Transactions*, Vol. 28, pp. 941-952, 1996.

[10] Pekelman, D., “Simultaneous Price-Production Decisions,” *Operations Research*, Vol. 22, No. 1, pp. 788-794, 1974.

[11] Thomas, J., “Price-Production Decisions with Deterministic Demand,” *Management Science*, Vol. 16, No. 11, pp. 747-750, 1970.