行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

同質性產品不同交貨期之兩張訂單最佳生產計劃模式之探討

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC94-2416-H-343-003-
執行期間：94年08月01日至95年07月31日
執行單位：南華大學管理科學研究所

計畫主持人：陳淼勝

計畫參與人員：蔡福建,陳柏宇

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 95年9月18日

同質性產品不同交貨期之兩張訂單最佳生產計劃模式之探討

摘要

從事訂單式的生產計劃，生產成本、存貨成本與交貨期限此三者是製造商所關切的基本問題。本文在考慮總成本含生產成本與存貨成本的情況下，探討同型態產品兩個不同交貨期之訂單的生產計畫模式。在追求總成本最低且能如期交貨為目標的前題下，如何將問題製作成一個可具體討論的數學模式，是本文處理的方式。對於模式之最佳解與最佳解中重要參數的敏感度分析，則是本文的主要內容。利用研究的結果，本文提供一個如何決定新訂單的最佳生產計劃，供從事生產計劃實務者在面對新訂單來臨時的參考依據。

關鍵字：生產計劃、生產速率、存貨管理、數學模式。

Abstract

Production cost, inventory cost and delivered date are three manufacturer’s concerns of production plan for order. This paper explored models of production plans for order of the homogeneous products of two different delivered dates taking into the consideration factors of total cost, including the production cost and inventory cost. Taking the premises for the purpose of minimal cost and punctual delivery of products, this paper proposed a process with tangible mathematical model. The main outcomes of this paper were the optimal solution properties and the sensitivity analyses for its key parameters in the model. By utilization the results of this research, this article provides a methodology in deciding the optimal production control plan for new orders for the production planners a base in dealing with new orders.

Keywords: Production plan; Production rate; Inventory management; Mathematical model

1・簡介

不論何時，當決策者考慮接受新的訂單後，決定生產的起始點與在任何給定時點之生產速率的控制，此二者對於一個製造商在擴大其生產利潤或減低其生產總成本，是個很重要的決策[1,2,3]。如果過早生產或生產速率過快，不僅有生產成本浪費的問題，同時其存貨亦將快速累積成本。因此，基於生產成本與存貨成本因素的考量，過早生產或生產速率過快，都並非是最適宜的。另一方面，如果太晚生產或生產速率過慢，則將會有無法如期交足貨品數量的危機，這種危機不僅包括因延誤交貨或中途被退掉此訂單所造成的公司財務損失，也將造成公司無形的商譽損失，甚至永遠流失顧客。正如 Soroush[4]在其文中所指出的，能符合應交貨日期是生產計劃管理中最令人愉悅的目標。

在本文中所要探討的是同型態產品之訂單的生產計劃模式。對於一個製造商，假設在整個製程中，其可供使用的資源均能充份供應的情況下，它仍必須面對著生產成本、存貨成本、交貨數量與交貨期限等的壓力。這些壓力因素，有些是公司內部可以掌控的，而有些則是外在無法掌控的，它是隨客戶訂單的需求而異。因此，當決策者在面臨新的訂單時，必須抉擇在何時間點開始生產以及應以何種生產速率來從事生產，才能如期交足貨品數量且使得總成本（含生產成本、存貨成本）為最小。

本文在滿足相關訂單需求且使得總成本為最小的情況下，首先探討單一交貨期之訂單的生產計劃模式及其最佳解；然後再利用此單一交貨期之訂單生產計劃模式的結果，進一步探討同型態產品兩個不同交貨期之訂單的生產計劃模式及其最佳解，同時探討最佳解的敏感度分析。

2・單一交貨期之訂單模式與最佳解

2.1 假設與符號

在本節中，數學模式製作的符號、意義及假設，介紹如下：

T：生產者接到訂單之時間起點 0 至交貨時點 T 之間的時間長度，即生產期間為 $[0, T]$。

B：在 T 時點生產者應交貨的貨品數量。

c_2：單位貨品在單位時間內之存貨成本，其中 $c_2 > 0$ 為常數。

$w(t)$：生產者在時間區間 $[0, t]$ 之累積產量，其中 $w(0) = 0$，$w(T) = B$。

本研究稱 $w(t)$ 為生產計劃函數，它是生產決策者的一個決策函數；$w'(t)$ 為生產計劃函數 w 在時點 t 之生產速率。

t_w：為生產計劃函數 w 之生產起始點，$t_w = Max\left\{ t \mid w(t) = 0, t \in [0, T] \right\}$；即

$w(t) = 0,\ 0 \le t \le t_w$ 且 $w(t) > 0,\ t_w < t \le T$。

$(m)^+$：此符號的意義為 $(m)^+ = \begin{cases} m, & m > 0 \\ 0, & m \le 0 \end{cases}$。

本文假設在時點 t 的生產率 y 的邊際生產成本，隨著生產速率 y 的增加而線性增加，且記

作$b\cdot y$，其中$b>0$為常數。因此，在時點t之生產率為$w'(t)$的生產成本為：

$$PC_t(w'(t))=\int_0^{w'(t)} b\cdot y\,dy=\frac{b}{2}\cdot\left(w'(t)\right)^2=c_1\cdot\left(w'(t)\right)^2$$ ，式中$c_1=\dfrac{b}{2}>0$為常數。

2.2 模式與最佳解

根據上面的符號意義及假設，我們可得在時間區間$[t_w\,,T]$之總生產成本及總存貨成本分別為$\int_{t_w}^{T} c_1(w'(t))^2\,dt$及$\int_{t_w}^{T} c_2 w(t)\,dt$。如何尋求$w$使得其所對應之總成本為最小之問題的數學模式，可表示如下：

$$\textbf{(I)}\quad \begin{cases} \underset{w}{Min}\ \displaystyle\int_{t_w}^{T}\left[c_1\left(w'(t)\right)^2+c_2 w(t)\right]dt \\ \quad s.t.\quad w(t_w)=0\ ,\ w(T)=B\ ,\ w'(t)\ge 0\ ,\ t_w\le t\le T \end{cases}$$

假設**模式(I)**的最佳解存在，並以符號w^*表示**模式(I)**的最佳解，並令t_{w^*}為w^*定義域之左端點。在此我們先忽略**模式(I)**之限制條件"$w'(t)\ge 0\quad t\in[t_w\,,T\,]$"，而考慮下列的模式：

$$\textbf{(II)}\quad \begin{cases} \underset{w}{Min}\ \displaystyle\int_{t_w}^{T}\left[c_1\left(w'(t)\right)^2+c_2 w(t)\right]dt \\ \quad s.t.\quad w(t_w)=0\ ,\ w(T)=B \end{cases}$$

因為**模式(I)**比**模式(II)**多了一個限制條件"$w'(t)\ge 0\quad t\in[t_w\,,T\,]$"，而**模式(II)**是一個標準型的變分法問題；因此，利用**模式(II)**之最佳解必須要滿足其尤拉方程式[5,6]以及該限制條件，我們可以得w^*如下：

令決策準則函數DF_1如下：

$$DF_1=DF_1(c_1,c_2,B,T)=B-\frac{c_2T^2}{4c_1}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (2.1)$$

情況 1：若$DF_1\ge 0$，則 $w^*(t)=\dfrac{c_2}{4c_1}\cdot t^2+\left(\dfrac{B}{T}-\dfrac{c_2T}{4c_1}\right)\cdot t$ ，$\forall\, t\in[0\,,T]$。

情況 2：若$DF_1<0$，則 $t_{w^*}=T-2\sqrt{c_1B/c_2}>0$ ，且$w^*(t)=\dfrac{c_2}{4c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}\right)^2$ ，$\forall\, t\in[t_{w^*}\,,T\,]$。

結合**情況 1** 與**情況 2**，得最佳生產計劃為

$$w^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left(t-t_{w^*}\right)^2+\frac{c_2}{4c_1T}\cdot\left(\left(2\sqrt{c_1B/c_2}\right)^2-T^2\right)^+\cdot t\ ,\ \forall\, t\in[t_{w^*}\,,T\,]\ \cdots\cdots\ (2.2)$$

式中$t_{w^*}=\left(T-2\sqrt{c_1B/c_2}\right)^+$。

為了要利用單一交貨期之訂單模式所得之最佳解的結果，推展到兩個不同交貨期之訂單模式的求解，令**模式(I)**之最佳解的目標值函數為$L(B\,,T)$如下：

$$L(B\,,T)=\int_{t_{w^*}(B)}^{T}\left[c_1\left(w_B^{*}{}'(t)\right)^2+c_2w_B^*(t)\right]dt\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (2.3)$$

3・兩個不同交貨期之訂單模式的建立

假設廠商接獲訂單，生產計畫決策者之決策時點為$t=0$，且此生產計畫被要求在未來的T_1及T_2時點須分別交貨品數量B_1及B_2單位，其中$T_2>T_1$（其它的生產假設條件與符號，與第2.1節相同）。針對此兩個不同交貨期之訂單的生產計劃，決策者必須抉擇以何種的生產速率與起始生產時點來從事生產，才能如期分別交足貨品數量且使得整個製程的總成本（含生產成本、存貨成本）為最小。

令x為滿足上述兩個不同交貨期訂單需求之生產計畫的可行解，其中$x(t)$表示在時間區間$[0,t]$之貨品累積量，為生產決策者的一個決策函數。令$t_x=Max\left\{t \mid x(t)=0,\, t\in[0,T_1]\right\}$為生產計劃函數$x$之生產起始點，則仿照第2.1節，我們可得在時間區間$[t_x,T_2]$之兩個不同交貨期之訂單生產計畫的數學模式如下：

$$\textbf{(III)}\quad \begin{cases} \underset{x}{Min}\ \displaystyle\int_{t_x}^{T_1}\left[c_1\left(x'(t)\right)^2+c_2x(t)\right]dt+\int_{T_1}^{T_2}\left[c_1\left(x'(t)\right)^2+c_2\left(x(t)-B_1\right)\right]dt \\ \quad s.t.\quad x(t_x)=0\ ,\ t_x\ge 0\ ,\ x(T_1)\ge B_1\ ,\ x(T_2)=B_1+B_2\ ,\ x'(t)\ge 0\ ,\ \forall t\in[t_x,T_2] \end{cases}$$

利用變數變換，可將**模式(III)**中之第二個積分式，表示如下：

$$\int_0^{T_2-T_1}\left\{c_1(x'(t+T_1))^2+c_2(x(t+T_1)-x(T_1))\right\}dt+c_2\left(x(T_1)-B_1\right)\left(T_2-T_1\right)\text{。}$$

任給定**模式(III)**的一個可行解x，則此x可對應一組函數(y,z)如下：

$$\begin{cases} y(t)=x(t) & ,\quad t_x\le t\le T_1 \\ z(t)=x(t+T_1)-x(T_1) & ,\quad 0\le t\le T_2-T_1 \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.1)$$

反之，任給一組函數(y,z)，y為定義在$[t_y,T_1]$之增函數，$t_y=Max\left\{t \mid y(t)=0,\, t\in[0,T_1]\right\}$；$z$為定義在$[0,T_2-T_1]$之增函數；則利用(3.1)式，$(y,z)$亦可對應**模式(III)**之其一可行解$x$。此外，因為$x(T_1)\ge B_1$，故存在實數$a\in[0,B_2]$，使得$x(T_1)=B_1+a$。因此，利用(3.1)式與$x(T_1)=B_1+a$，**模式(III)**可表示如下：

$$\textbf{(IV)}\quad \underset{a\in[0,B_2]}{Min}\ f(a)$$

其中
$$f(a)=\begin{cases} \underset{(y,z)}{Min}\ \displaystyle\int_{t_y}^{T_1}\left[c_1\left(y_a'(t)\right)^2+c_2y_a(t)\right]dt+\int_0^{T_2-T_1}\left[c_1\left(z_a'(t)\right)^2+c_2z_a(t)\right]dt+c_2a\left(T_2-T_1\right) \\ \quad s.t.\quad y_a(t_y)=0\ ,\ t_y\ge 0\ ,\ y_a(T_1)=B_1+a\ ,\ y_a'(t)\ge 0\ ,\ \forall t\in[t_y,T_1] \\ \qquad\quad z_a(0)=0\ ,\ z_a(T_2-T_1)=B_2-a\ ,\ z_a'(t)\ge 0\ ,\ \forall t\in[0,T_2-T_1] \end{cases}$$

對給定的a，**模式(IV)**之可行解(y_a,z_a)均與a有關；在此，我們將致力於尋找最適的a。

當給定函數z_a後，若令 $t_z=Max\left\{t \mid z_a(t)=0,\, t\in[0,T_2-T_1]\right\}$，則在$f(a)$中之第二個積

分式為$\int_{t_z}^{T_2-T_1}\left(c_1(z_a'(t))^2+c_2z_a(t)\right)dt$；因此，$f(a)$可進一步表示如下：

$$f(a)=\begin{cases}\underset{y_a}{Min}\int_{t_y}^{T_1}\left[c_1\left(y_a'(t)\right)^2+c_2y_a(t)\right]dt+\underset{z_a}{Min}\int_{t_z}^{T_2-T_1}\left[c_1\left(z_a'(t)\right)^2+c_2z_a(t)\right]dt+c_2a\left(T_2-T_1\right)\\ \quad s.t.\quad y_a(t_y)=0,\ t_y\ge 0,\ y_a(T_1)=B_1+a,\ y_a'(t)\ge 0,\ \forall t\in[t_y,T_1]\\ \qquad\qquad z_a(t_z)=0,\ t_z\ge 0,\ z_a(T_2-T_1)=B_2-a,\ z_a'(t)\ge 0,\ \forall t\in[t_z,T_2-T_1]\end{cases}$$

若令$L_1(a)$及$L_2(a)$分別為下列兩個模式在其最佳解時的目標值函數，則$f(a)$可以再進一步改寫成 $f(a)=L_1(a)+L_2(a)+c_2a\left(T_2-T_1\right)$。

$$\begin{cases}\underset{y_a}{Min}\int_{t_y}^{T_1}\left[c_1\left(y_a'(t)\right)^2+c_2y_a(t)\right]dt\\ s.t.\quad y_a(t_y)=0,t_y\ge 0,y_a(T_1)=B_1+a,\\ \qquad y_a'(t)\ge 0,\forall t\in[t_y,T_1]\end{cases};\quad\begin{cases}\underset{z_a}{Min}\int_{t_z}^{T_2-T_1}\left[c_1\left(z_a'(t)\right)^2+c_2z_a(t)\right]dt\\ s.t.\quad z_a(t_z)=0,t_z\ge 0,z_a(T_2-T_1)=B_2-a,\\ \qquad z_a'(t)\ge 0,\forall t\in[t_z,T_2-T_1]\end{cases}$$

利用(2.3)式，可得$f(a)$及$f'(a)$如下：

$$f(a)=L(B_1+a,T_1)+L(B_2-a,T_2-T_1)+c_2a\left(T_2-T_1\right)$$

$$f'(a)=\left.\frac{\partial L(B,T_1)}{\partial B}\right|_{B=B_1+a}-\left.\frac{\partial L(B,T_2-T_1)}{\partial B}\right|_{B=B_2-a}+c_2\left(T_2-T_1\right)$$

更進一步得$f''(a)>0$，$\forall\, a\in[0,B_2]$；故得$f'(a)$為$a\in[0,B_2]$上之嚴格增函數。

4．兩個不同交貨期訂單模式的求解

首先，我們尋求**模式(IV)**的最佳解，然後再利用(2.2)式及(3.1)式，得**模式(III)**的最佳解。假設a^*為**模式(IV)**的最佳解，求解a^*如下：

情況 A：假設$B_1\ge\frac{c_2T_1^2}{4c_1}$時，得

當$B_2\le\left(\frac{B_1}{T_1}+\frac{c_2T_1}{4c_1}\right)\cdot\left(T_2-T_1\right)+\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}$時，則$a^*=0$必成立。

當$B_2>\left(\frac{B_1}{T_1}+\frac{c_2T_1}{4c_1}\right)\cdot\left(T_2-T_1\right)+\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}$時；則$a^*$必滿足$f'(a^*)=0$，即

$$a^*=\frac{T_1B_2}{T_2}-\frac{\left(T_2-T_1\right)B_1}{T_2}-\frac{c_2T_1\left(T_2-T_1\right)}{4c_1}$$，且$a^*\in\left(0,\frac{T_1B_2}{T_2}\right)$。

情況 B：假設$B_1<\frac{c_2T_1^2}{4c_1}$時，得

當$B_2\le\left(T_2-T_1\right)\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}+\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}$時，則$a^*=0$必成立。

當$B_2>\left(T_2-T_1\right)\sqrt{\frac{c_2B_1}{c_1}}+\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1}$時；則$a^*$必滿足$f'(a^*)=0$，即

$$a^* = B_2 + \frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1} - (T_2-T_1)\sqrt{\frac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}} > 0$$

利用符號 $m \odot n = Min\{m, n\}$，並令決策函數 $DF_2 = DF_2(c_1, c_2, B_1, B_2, T_1, T_2)$ 如下：

$$DF_2(c_1, c_2, B_1, B_2, T_1, T_2) = B_2 - \left\{ \frac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1} + (T_2-T_1)\left[\left(\frac{B_1}{T_1} - \frac{c_2 T_1}{4c_1} \right)^+ + \frac{c_2 T_1}{2c_1} \odot \sqrt{\frac{c_2 B_1}{c_1}} \right] \right\} \quad \cdots (4.1)$$

則綜合上述**情況 A** 與**情況 B**，得**模式(IV)**之最佳解 a^* 如下：

(1) 當 $DF_2 \le 0$ 時，則 $a^* = 0$ 。 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (4.2)

(2) 當 $DF_2 > 0$ 時，得 $a^* > 0$ 且 a^* 如下：

$$a^* = \begin{cases} \dfrac{T_1 B_2}{T_2} - \dfrac{(T_2-T_1)B_1}{T_2} - \dfrac{c_2 T_1 (T_2-T_1)}{4c_1} & , \quad B_1 \ge \dfrac{c_2 T_1^2}{4c_1} \\ B_2 + \dfrac{c_2(T_2-T_1)^2}{4c_1} - (T_2-T_1)\sqrt{\dfrac{c_2(B_1+B_2)}{c_1}} & , \quad B_1 < \dfrac{c_2 T_1^2}{4c_1} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.3)$$

由(4.2)及(4.3)所得之 a^*，利用(2.2)式，可得 (y_{a^*}, z_{a^*})；再利用(3.1)式，則得**模式(III)**之最佳解 x^* 如下：

(1)．當 $DF_2 \le 0$ 時，得

$$x^*(t) = \begin{cases} x_1^*(t) & , \quad t \in [t_{x_1^*}, T_1] \ , \ t_{x_1^*} = \left(T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1 B_1}{c_2}} \right)^+ \\ x_2^*(t) & , \quad t \in [t_{x_2^*}, T_2] \ , \ t_{x_2^*} = T_1 + \left((T_2-T_1) - 2\sqrt{\frac{c_1 B_2}{c_2}} \right)^+ \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.4)$$

其中 $x_1^*(t) = \dfrac{c_2}{4c_1} \cdot \left(t - t_{x_1^*} \right)^2 + \dfrac{c_2}{4c_1 T_1} \cdot \left(\left(2\sqrt{\frac{c_1 B_1}{c_2}} \right)^2 - T_1^2 \right)^+ \cdot t$

$$x_2^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot \left(t - t_{x_2^*} \right)^2 + \frac{c_2}{4c_1(T_2-T_1)} \cdot \left(\left(2\sqrt{\frac{c_1 B_2}{c_2}} \right)^2 - (T_2-T_1)^2 \right)^+ \cdot (t - T_1) + B_1$$

(2)．當 $DF_2 > 0$ 時，得

$$x^*(t) = \begin{cases} x_3^*(t) & , \quad t \in [t_{x_3^*}, T_1] \ , \ t_{x_3^*} = \left(T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1(B_1+a^*)}{c_2}} \right)^+ \\ x_4^*(t) & , \quad t \in [t_{x_4^*}, T_2] \ , \ t_{x_4^*} = T_1 + \left((T_2-T_1) - 2\sqrt{\frac{c_1(B_2-a^*)}{c_2}} \right)^+ \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (4.5)$$

其中 $x_3^*(t) = \dfrac{c_2}{4c_1} \cdot \left(t - t_{x_3^*} \right)^2 + \dfrac{c_2}{4c_1 T_1} \cdot \left(\left(2\sqrt{\frac{c_1(B_1+a^*)}{c_2}} \right)^2 - T_1^2 \right)^+ \cdot t$

$$x_4^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot \left(t - t_{x_4^*} \right)^2 + \frac{c_2}{4c_1(T_2-T_1)} \cdot \left(\left(2\sqrt{\frac{c_1(B_2-a^*)}{c_2}} \right)^2 - (T_2-T_1)^2 \right)^+ \cdot (t - T_1) + B_1 + a^*$$

式中 $0 < a^* \le B_2$ 且 a^* 滿足(4.3)式。

5・分析與討論

在生產計畫的決策模式中，我們在乎的是起始生產點與在任何給定時點的生產速率，這也是一個生產管理者重要的決策依據；其次，最佳解目標值函數隨著主要參數的變動，也可以提供決策者作為決策的參考。本單元將著重在最佳起始生產點t_{x^*}的分析；在此，當$t_{x^*}=0$時，我們稱生產計畫為「立即生產（Immediate Production; IP）」模式；當$t_{x^*}>0$時，稱為「延後生產（Delayed Production; DP）」模式。

5.1 單一交貨期訂單模式分析

在(2.2)式中，**模式(I)**的最佳起始生產點為$t_{w^*}=\left(T-2\sqrt{c_1B/c_2}\right)^+$，其決策準則工具為函數$DF_1$（參見(2.1)式），它是依參數$c_1$、$c_2$、$B$、$T$的大小而定，其中$c_1$、$c_2$為製造商內部的成本因素，而$B$、$T$為客戶訂單的需求因素。廠商在接到單一交貨期的訂單時，若$DF_1\geq 0$，則得$t_{w^*}=0$，這表示決策者應採取 IP 模式；很明顯地，當c_1愈大、c_2愈小、B愈大、T愈小時，愈支持此 IP 模式的決策。若$DF_1<0$時，則得$t_{w^*}>0$，這表示決策者基於成本因素的考量，可稍延後一些時間再開始生產，較合乎節省成本的原則；很明顯地，當c_1愈小、c_2愈大、B愈小、T愈大時，愈支持此 DP 模式的決策。因此，當廠商接到單一交貨期的訂單時，決策者應事先評估函數DF_1的值，以決定應採行 IP 或 DP 的生產計畫模式。

5.2 兩個不同交貨期之訂單模式分析

兩個不同交貨期之訂單生產計畫模式的求解，是利用單一交貨期訂單模式的結果而得，其結果有可能退化為各自獨立的單一交貨期之訂單生產計畫模式，其決策準則工具為函數DF_2（參見(4.1)式）；當$DF_2\leq 0$時，得$a^*=0$，這表示兩個不同交貨期之訂單實為兩個各自獨立的單一交貨期訂單之生產計畫模式；而當$DF_2>0$時，得$a^*>0$，這表示兩個不同交貨期之訂單在第一期交貨前，應額外多生產a^*的數量，以應付第二期交貨之需。

對決策者而言，他所關心的是在接到訂單時的最初決策。因此，在本單元，除了對a^*的探討外，我們將專注在起始生產點的分析，以探討其是為 IP 或 DP 模式。為了方便討論，令決策準則函數DF_3及DF_4分別如下：

$$DF_3=DF_3(c_1,c_2,B_1,T_1)=B_1-\frac{c_2T_1^2}{4c_1} \quad \cdots\cdots (5.1)$$

$$DF_4=DF_4(c_1,c_2,B_2,T_1,T_2)=B_2-\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)^2}{4c_1} \quad \cdots\cdots (5.2)$$

(1)・當$DF_2\leq 0$時，最佳解為(4.4)式，且$a^*=0$。

這表示第二期交貨數量相對地並非緊迫；因此，在時間點T_1及T_2分別交貨B_1及B_2單位的生產模式，可分別視為在時間區間$[0,T_1]$生產B_1單位及在時間區間$[T_1,T_2]$生產B_2單位的單一期交貨之訂單模式，這個結果可由$t_{x_1^*}$及$t_{x_2^*}$明顯看出。此外，在時間區間$[t_{x_1^*},T_1]$之最佳生

產計畫 $x_1^*(t)$ 與 B_2 無關；在時間區間 $[t_{x_2^*}, T_2]$ 之最佳生產計畫 $x_2^*(t)$，除了必須加入第一階段已生產的量 B_1 外（但在 T_1 時點已交貨），其它生產過程與 B_1 無關。

(2)．當 $DF_2 > 0$ 時，最佳解為(4.5)式，且 $a^* > 0$。

此表示在第一期交貨之生產期間必須要多生產 a^* 的量，即表示第二期交貨數量相對地緊迫；因此，在第一期交貨時點 T_1 交貨之前的累積產量必然與 B_2 有關。然而，在整個製程中基於成本因素的考量，在時間區間 $[0, T_1]$ 的生產不必然為 IP 模式；但在時間區間 $[T_1, T_2]$ 的生產卻必為 IP 模式。

5.3　兩個不同交貨期訂單模式之決策分析

對於兩個不同交貨期之訂單模式的最佳解(4.4)式及(4.5)式，如果我們再更進一步詳細分析，則可得七種不同的生產決策模式（以 $y^*(t)$ 、 $z^*(t)$ 型式表之；參考(3.1)式），如表(1)所示（見附錄 A）。

對於表(1)中所提出的七種不同的生產決策模式，我們可以更進一步地將它作成決策模式流程，如圖(1)所示（見附錄 B），以方便決策者的決策活動。對管理者而言，當接到訂單時，他必須要在最短的時間內決定應採行的生產模式，圖(1)的決策模式流程，提供了兩個不同交貨期之生產決策最好、最便捷的工具，它具有實務上的價值。

6．結論

對於本研究，在相關的假設（在第 2.1 節與第 3 節）前題下，我們得重要的結果如下：

第一、對於單一交貨期之訂單最佳生產計劃函數為 w^*（參考(2.2)式），決策者應採取 IP 或 DP 模式的決策準則工具為函數 DF_1 之值（參考(2.1)式），其決策準則如下：

(1)．若 $DF_1 \geq 0$ ，則最佳起始生產點 $t_{w^*} = 0$ ，決策者應採取 IP 模式。

(2)．若 $DF_1 < 0$，則最佳起始生產點 $t_{w^*} > 0$ ，決策者應採取 DP 模式，且其延後生產的時間長度為 t_{w^*} 之值，即為 $T - 2\sqrt{c_1 B / c_2}$ 。

第二、對於兩個不同交貨期之訂單最佳生產計劃函數為 x^*（參考(4.4)及(4.5)式），決策者應否採行兩個各自獨立的單一交貨期訂單生產模式的決策準則工具為函數 DF_2 之值（參考(4.1)式），其決策準則如下：

(1)．若 $DF_2 \leq 0$ ，則 $a^* = 0$，決策者應採行兩個各自獨立的單一交貨期訂單模式。

(2)．若 $DF_2 > 0$，則 $a^* > 0$，決策者在第一期交貨前必須額外多生產一些，以應付第二期交貨之需，其最佳額外生產的數量為 a^* 之值（參考(4.3)式）。

第三、對於兩個不同交貨期之訂單最佳生產計劃，當採行兩個各自獨立的單一交貨期訂單模式之生產計畫（參考(4.4)式）時，其為 IP 或 DP 模式，分別取決函數 DF_3 及 DF_4 之值（參考(5.1)及(5.2)式），如下：

(1)．若 $DF_3 \geq 0$ ，則第一期最佳生產計畫 $x_1^*(t)$ 為 IP 模式；否則， $x_1^*(t)$ 為 DP 模式。

(2)．若 $DF_4 \geq 0$，則第二期最佳生產計畫 $x_2^*(t)$ 為 IP 模式；否則，$x_2^*(t)$ 為 DP 模式。

第四、對於兩個不同交貨期之訂單最佳生產計劃，當於第一期交貨前必須額外多生產 a^* 的量以應付第二期交貨之需時，第二期最佳生產計畫 $x_4^*(t)$ 必為 IP 模式，而第一期最佳生產計畫 $x_3^*(t)$ 是否為 DP 模式，則同時取決於條件 DF_3 與 $DF_3 + a^*$ 之值；當 $DF_3 < 0$ 且 $DF_3 + a^* < 0$ 時，則 $x_3^*(t)$ 為 DP 模式。

第五、在本文中，由單位時間 t 的生產成本與存貨成本的假設可知，在第一次交貨後，存貨成本已消除大部份；然而，生產成本的壓力仍然繼續存留著；因此，由 a^* 的敏感度分析知，當訂單需求因素 T_1、T_2、B_1、B_2 維持不變，而成本因素 c_1 增加、c_2 減小時，提早多生產一些對生產者在追求成本最小化的目標上較為有利。

第六、對於兩個不同交貨期之訂單的最佳生產計劃，我們進一步提供了七種不同的生產決策模式並製做成決策流程（參考附錄 A 及 B）；決策管理者只需要依據內部成本因素及外部顧客訂單之需求因素，就可以很快決定出應採行的最佳生產計畫模式，並付諸執行，達成目標。

一個管理者首應注重的是「決策」活動；好的決策，不僅可以使資源作有效及充份的利用，同時也可以更精準地達成生產管理目標。在本文中，對於一個製造商而言，參數 c_1、c_2 長期仍可能為其內部的因素；而參數 T、B、T_1、T_2、B_1、B_2 等則恆為外在無法控制的因素，它們是隨著客戶的訂單需求而定。因此，不同客戶的訂單，須採用的生產計畫模式（參附錄 B 之圖(1)）就不盡相同；在本文中的敏感度分析，亦可提供決策者作為其內部因素控管與因應外在因素變化的參考。

7．參考文獻

[1] Miao-Sheng Chen and Chun-Hsiung Lan, *Dynamic Production Plan of Probabilistic Market Demand and Fixed Selling Time with Unreliable Machines and Obtainable Working Hour Capacity*, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 44, No. 1,March 2001, pp. 57-66.

[2] Miao-Sheng Chen and Mei-Chen Chu, *The Analysis of Optimal Control in Matching Problem Between Manufacturing and Marketing*, European Journal of Operational Research, Vol. 150, pp.293-303, 2003.

[3] G. Feichtinger, R. Harth, *Optimal Pricing and Production in An Inventory Model*, European Journal of Operational Research, Vol. 19, pp. 45-56, 1985.

[4] Soroush, H., *Sequencing and due-date determination in the Stochastic single machine problem with earliness and tardiness costs*, European Journal of Operational Research, Vol. 113, pp.450-468, 1999.

[5] Kamien, M. I., and N. L. Schwartz, *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Elsevier North Holland, 1991.

[6] Chiang, A., *Dynamic optimization*, McGraw-Hill, Inc., Singapore, 1992.

8・計畫成果自評

本研究的內容除原先考量以訂單作區隔改為以交貨期作區隔外，與原計畫大致相符合。在目標達成方面，除了電腦程式的製作正在進行中外，其餘均已達成。在學術或應用上，本研究係以模式建構與推導為主，推導方式及使用方法在學術上具有一定的價值；至於在實務應用上，因為參數條件的限制，可能稍嫌不足。本研究適合在生產管理方面的期刊作學術文章的發表，正積極進行中；然而，未有可供推廣之研發或專利。

9・附錄

附錄 A：

表(1)：兩個不同交貨期訂單模式之決策分析

決策準則			第一期：$y^*(t)$	第二期：$z^*(t)$	模式
$DF_3 \ge 0$	$B_2 \le D_1$，$a^* = 0$	$DF_4 \ge 0$	IP；$y_1^*(t)$，$t \in [0, T_1]$	IP；$z_1^*(t)$，$t \in [0, T_2 - T_1]$	M1
		$DF_4 < 0$	IP；$y_2^*(t)$，$t \in [0, T_1]$	DP；$z_2^*(t)$，$t \in [t_{z^*}, T_2 - T_1]$	M2
	$B_2 > D_1$，$a^* = D_3$		IP；$y_3^*(t)$，$t \in [0, T_1]$	IP；$z_3^*(t)$，$t \in [0, T_2 - T_1]$	M3
$DF_3 < 0$	$B_2 \le D_2$，$a^* = 0$	$DF_4 \ge 0$	DP；$y_4^*(t)$，$t \in [t_{y^*}, T_1]$	IP；$z_4^*(t)$，$t \in [0, T_2 - T_1]$	M4
		$DF_4 < 0$	DP；$y_5^*(t)$，$t \in [t_{y^*}, T_1]$	DP；$z_5^*(t)$，$t \in [t_{z^*}, T_2 - T_1]$	M5
	$B_2 > D_2$，$a^* = D_4$	$DF_3 + a^* < 0$	DP；$y_6^*(t)$，$t \in [t_{y^*}, T_1]$	IP；$z_6^*(t)$，$t \in [0, T_2 - T_1]$	M6
		$DF_3 + a^* \ge 0$	IP；$y_7^*(t)$，$t \in [0, T_1]$	IP；$z_7^*(t)$，$t \in [0, T_2 - T_1]$	M7

註：$t_{y^*} = T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1(B_1 + a^*)}{c_2}}$ 、$t_{z^*} = (T_2 - T_1) - 2\sqrt{\frac{c_1(B_2 - a^*)}{c_2}}$ ：參考(4.4)及(4.5)式。

DF_3 、DF_4 ；參考(5.1)及(5.2)式。

$$D_1 = \frac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1} + (T_2 - T_1)\left(\frac{B_1}{T_1} + \frac{c_2 T_1}{4c_1}\right) \text{、} \quad D_2 = \frac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1} + (T_2 - T_1)\sqrt{\frac{c_2 B_1}{c_1}} \text{、}$$

$$D_3 = \frac{T_1 B_2}{T_2} - \frac{(T_2 - T_1) B_1}{T_2} - \frac{c_2 T_1 (T_2 - T_1)}{4c_1} \text{、} \quad D_4 = B_2 + \frac{c_2 (T_2 - T_1)^2}{4c_1} - (T_2 - T_1)\sqrt{\frac{c_2 (B_1 + B_2)}{c_1}} \text{；}$$

$$y_1^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot t^2 + \left(\frac{B_1}{T_1} - \frac{c_2 T_1}{4c_1}\right) \cdot t \text{；} \quad z_1^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot t^2 + \left(\frac{B_2}{T_2 - T_1} - \frac{c_2 (T_2 - T_1)}{4c_1}\right) \cdot t$$

$$y_2^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot t^2 + \left(\frac{B_1}{T_1} - \frac{c_2 T_1}{4c_1}\right) \cdot t \text{；} \quad z_2^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot \left[t - \left((T_2 - T_1) - 2\sqrt{\frac{c_1 B_2}{c_2}}\right)\right]^2$$

$$y_3^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot t^2 + \left(\frac{B_1 + a^*}{T_1} - \frac{c_2 T_1}{4c_1}\right) \cdot t \text{；} \quad z_3^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot t^2 + \left(\frac{B_2 - a^*}{T_2 - T_1} - \frac{c_2 (T_2 - T_1)}{4c_1}\right) \cdot t$$

$$y_4^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot \left[t - \left(T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1 B_1}{c_2}}\right)\right]^2 \text{；} \quad z_4^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot t^2 + \left(\frac{B_2}{T_2 - T_1} - \frac{c_2 (T_2 - T_1)}{4c_1}\right) \cdot t$$

$$y_5^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot \left[t - \left(T_1 - 2\sqrt{\frac{c_1 B_1}{c_2}}\right)\right]^2 \text{；} \quad z_5^*(t) = \frac{c_2}{4c_1} \cdot \left[t - \left((T_2 - T_1) - 2\sqrt{\frac{c_1 B_2}{c_2}}\right)\right]^2$$

$$y_6^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot\left[t-\left(T_1-2\sqrt{\frac{c_1\left(B_1+a^*\right)}{c_2}}\right)\right]^2 \text{；} \qquad z_6^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2+\left(\frac{B_2-a^*}{T_2-T_1}-\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)}{4c_1}\right)\cdot t$$

$$y_7^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2+\left(\frac{B_1+a^*}{T_1}-\frac{c_2T_1}{4c_1}\right)\cdot t \text{；} \qquad z_7^*(t)=\frac{c_2}{4c_1}\cdot t^2+\left(\frac{B_2-a^*}{T_2-T_1}-\frac{c_2\left(T_2-T_1\right)}{4c_1}\right)\cdot t$$

附錄 B：

圖(1)：兩個不同交貨期訂單之決策模式流程